



# I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

[i.cemacyc.org](http://i.cemacyc.org)

Santo Domingo, República Dominicana



## **Generalidades de un experimento de enseñanza desarrollado en la formación inicial de maestros de educación primaria**

Gabriela Valverde Soto  
Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica  
Costa Rica  
[gabriela.valverde@ucr.ac.cr](mailto:gabriela.valverde@ucr.ac.cr)

### **Resumen**

El propósito de la comunicación es describir los elementos centrales de una investigación que se ha desarrollado en el contexto de la formación inicial de maestros de educación primaria de la Universidad de Granada. Este estudio se centró en promover el desarrollo del conocimiento matemático sobre la razón y la proporcionalidad de estudiantes de magisterio como una forma de sustentar y favorecer el proceso de desarrollo de la competencia matemática de dichos estudiantes. Metodológicamente, la investigación consiste en un experimento de enseñanza centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas. En esta contribución se presenta someramente el estudio a través de ejemplos procedentes de la planificación, implementación y análisis de una de las sesiones, a su vez se presentan resultados referentes al conocimiento matemático y competencias matemáticas promovidas en esa sesión.

*Palabras clave:* razón, proporcionalidad, competencias matemáticas, formación inicial de maestros, análisis didáctico, experimentos de enseñanza.

### **Abstract**

The purpose of this report is to present characteristics of a study which objective was to improve both the mathematical knowledge (about ratio and proportionality) as mathematical literacy of pre-service elementary school teachers at the University of Granada. From a methodological perspective this study is framed within design research paradigm; particularly this is a teacher development experiment. We present

briefly the phases of planning, implementation, and analysis from one session and we describe some results of the study related to mathematical knowledge and mathematical literacy of prospective mathematics teachers.

*Key words:* ratio, proportionality, mathematical literacy, prospective elementary school teachers, didactic analysis, teaching experiments

### **Introducción**

Considerando que los nuevos planes de formación de maestros en España se han establecido en términos de competencias, siendo una de ellas la competencia matemática, el profesorado universitario se enfrenta al desafío de diseñar procesos instruccionales orientados al desarrollo de las mismas. La investigación realizada se centró en la competencia matemática como una expectativa de aprendizaje deseable de promover durante la formación inicial de los maestros de educación primaria, teniendo en cuenta que en su futura labor profesional asumirán el reto de gestionar procesos de enseñanza y de generar ambientes de aprendizaje cuyo fin será la alfabetización matemática de los escolares (MEC, 2007).

Una de las preguntas que guió el estudio ha sido ¿cómo promover el desarrollo del conocimiento matemático y las competencias matemáticas de los futuros maestros de educación primaria?, cuestión que se aborda desde los contenidos matemáticos razón y proporcionalidad. Se eligió centrar la investigaciones en estas nociones dado que ambas están implicadas en múltiples situaciones del entorno, motivo por el cual ofrecen condiciones propicias para concretar un trabajo de aula que se sustente en el enfoque funcional del conocimiento matemático (Rico y Lupiáñez, 2008) y en consecuencia es posible contar con diversos problemas, contextos y situaciones desde los cuales estimular la competencia matemática. Basándonos en las consideraciones descritas, para el desarrollo de este estudio se plantearon dos objetivos generales:

- Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una “secuencia de trabajo en el aula” que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.
- Investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.

Con el fin de abordar estos objetivos se decidió realizar un experimento de enseñanza centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas (Simon, 2000). Este tipo de estudios persiguen comprender y mejorar la realidad educativa a través del desarrollo de un diseño instruccional (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Una descripción detallada de las acciones realizadas en cada fase del experimento puede encontrarse en Valverde (2012). En esta comunicación se presentarán las generalidades relativas a las tres fases del experimento de enseñanza realizado, para esto se utiliza información procedente de la cuarta sesión de trabajo.

### **Planificación del diseño instruccional**

En la preparación del experimento se realizaron distintas acciones, entre las que destacan: (a) un análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (Gómez, 2007) de la razón y la proporcionalidad, (b) negociación con los profesores de la asignatura, y (c) registro de las

decisiones tomadas. Todos estos pasos culminaron en la planificación de 4 sesiones. Dado que el diseño instruccional elaborado se fundamenta en la perspectiva funcional del conocimiento matemático considerado en el estudio PISA (OCDE, 2004), se hizo necesario seleccionar y organizar un conjunto de tareas matemáticas que contemplaran diferentes tipos de problemas de razón y proporcionalidad.

La programación de las cuatro sesiones se describió a través de los componentes: objetivos de investigación e instrucción, contenidos y tareas. En la Tabla 1 se muestra, a modo de ejemplo, un extracto de la planificación de la cuarta sesión, la cual se centró en el estudio de la noción de escala y de las relaciones entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas o de volúmenes correspondientes.

Tabla 1

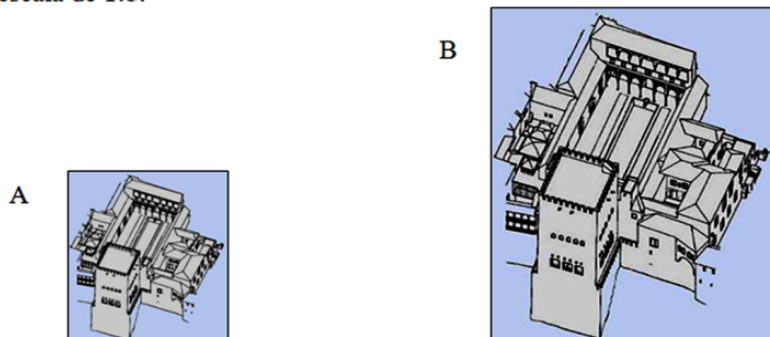
*Extracto de la planificación de la cuarta sesión para ambos grupos*

Objetivos de la investigación para la cuarta sesión	Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en relación con las escalas así como detectar si los estudiantes incurren en la “ilusión de la linealidad” en situaciones de semejanza que requieran la interpretación de una escala.
Contenidos	Escala. Relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes. Relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes.
Objetivos instruccionales	Extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala. Explorar la relación entre la razón de las medidas de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes.
Competencias matemáticas	Pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, plantear y resolver problemas.
Tarea	El palacio real de la Alhambra

Con el fin de facilitar la presentación del estudio, en adelante la información aportada se centra en la cuarta sesión y en la tarea matemática “El palacio real de la Alhambra” (Figura 1). Esta atiende ideas asociadas a los conceptos de escala y semejanza, de acuerdo con Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) este tipo de tareas es considerado como uno de los más difíciles pues en ellas se deben relacionar varios tópicos tales como la medida, visualización espacial, figuras y objetos en dos y tres dimensiones, escala lineal, cuadrática y cúbica, conversión de unidades, perímetro, área, volumen y en algunos casos cálculos complicados. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la tarea “El palacio real de la Alhambra” se considera un constructo.

## El Palacio Real de la Alhambra

Es un rico complejo palaciego que alojaba al monarca y a la corte del Reino de Granada Nazarí en el siglo XIV. A partir de una maqueta de la Alhambra, elaborada hace unos años (maqueta A), se va a construir otra (maqueta B) para un nuevo museo aplicando una escala de 1:5.



### I Fase

Uno de los atractivos, como en otras obras musulmanas de la época son los interiores, entre los que destaca el Patio de los Arrayanes que es de forma rectangular y la Torre de Comares cuya terraza superior es de forma cuadrangular.

En la tabla aparecen las dimensiones del Patio de los Arrayanes y de la terraza superior de la Torre de Comares en la maqueta A, completa la información que se te pide:

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm <sup>2</sup>
	Maqueta B				
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm <sup>2</sup>
	Maqueta B				

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

### II Fase

En el Patio de los Arrayanes hay un estanque de almacenamiento de agua con forma de prisma rectangular, éste divide al patio longitudinalmente.

En la tabla aparecen las dimensiones del estanque en la maqueta A, completa la información que se te pide:

	Largo	Ancho	Profundidad	Volumen
Maqueta A	12 cm	3 cm	2 cm	72 cm <sup>3</sup>
Maqueta B				

Enuncia una conjetura sobre la razón entre los volúmenes de dos prismas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivas aristas. Explica con detalle cómo has razonado.

Figura 1. Tarea “El palacio real de la Alhambra”

De acuerdo con los indicadores de los niveles de complejidad de las tareas expuestos por Rico y Lupiáñez (2008) se tiene la parte (a) es de reproducción mientras que la parte (b) corresponde al nivel de reflexión.

Tabla 2

*Descripción de la tarea “El palacio real de la Alhambra” según nivel de complejidad*

		Tarea “El palacio real de la Alhambra”	
		Parte (a) I y II Fase	Parte (b) I y II Fase
<b>Reproducción</b>	Contextos familiares.		
	Conocimientos ya practicados.	X	
	Aplicación de algoritmos estándar.		
	Realización de operaciones sencillas.	X	
	Uso de fórmulas elementales	X	
<b>Conexión</b>	Contextos menos familiares		
	Interpretar y explicar		
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación		
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.		
<b>Reflexión</b>	Tareas que requieren comprensión y reflexión.		X
	Creatividad		
	Ejemplificación y uso de conceptos.		
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.		X
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.		X

### Implementación del diseño instruccional

La implementación se realizó en condiciones naturales de desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica<sup>1</sup> durante el curso académico 2009-2010, el estudio se ha desarrollado con dos grupos (G1 y G2). En el G1 participaron 85 estudiantes y en el G2, 42 estudiantes.

Para el desarrollo de las sesiones se aplicó una adaptación de la metodología ACODESA (Hitt, 2007). Esta metodología de trabajo en el aula se basa en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Tiene un enfoque de tipo socio-constructivista. Entre las características de esta metodología que han respaldado la elección de la misma están: la inclusión de tareas abiertas, complejas o no tradicionales que promuevan la reflexión y el debate, el interés por estudiar la evolución en la resolución de la tarea y en general evidenciar cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa. En síntesis, la experimentación se desarrolló en cuatro fases: trabajo individual en clase, trabajo colaborativo, puesta en común y trabajo individual fuera de clase.

<sup>1</sup> Asignatura troncal ubicada en el primer curso del plan de estudios de la titulación de Diplomado en Maestro: Educación Primaria de la Universidad de Granada, aprobado en BOE de 14 de febrero de 2001.

### Análisis de datos de la investigación

En términos generales, el experimento de enseñanza utilizado se inclina por proporcionar una perspectiva dual sobre el desarrollo del conocimiento del profesor coordinando análisis sobre el conocimiento individual y grupal (Simon, 2000). En este sentido se han realizado dos tipos de análisis de la información, uno centrado en el gran y pequeño grupo y otro referente a casos individuales de estudiantes (Figura 2). Ambos son análisis cualitativos de corte interpretativo. El estudio de casos considera a 6 estudiantes y el análisis de las sesiones considera todos los equipos participantes, sobre este último se focalizan los aportes de esta comunicación.

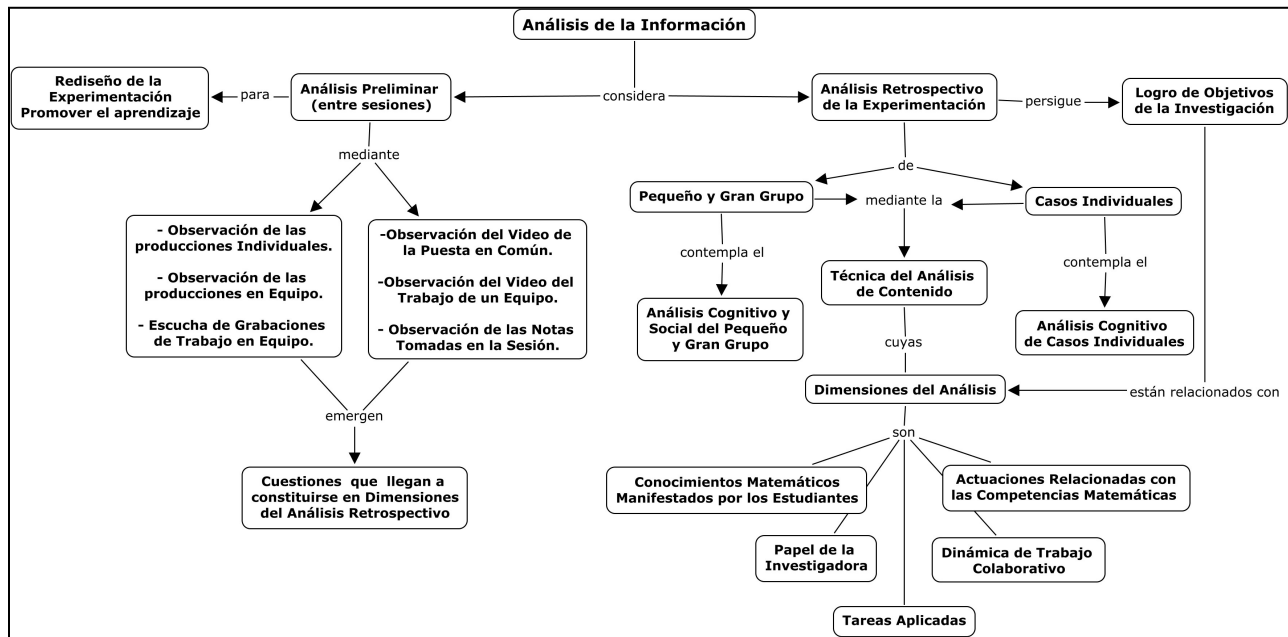


Figura 2. Tipos de análisis realizados en el estudio

### Aspectos metodológicos del análisis de las sesiones

El fin del análisis de las sesiones es profundizar en la situación ocurrida durante la intervención en el aula, aportando marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y generar supuestos sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias. Con ello se busca aportar “conocimiento” que amplíe los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria. Además, detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de aula y de las tareas aplicadas, así como estudiar el papel de la investigadora durante la experimentación. En resumen, pretende dar información sobre el grado en que se han logrado los objetivos de investigación en cada sesión.

Para el análisis de cada sesión se delimitaron cinco dimensiones: (1) conocimiento matemático manifestado por los estudiantes en la resolución de las tareas, (2) balance de las tareas realizadas, (3) logro de las expectativas de aprendizaje supuestas en la planificación de las tareas, (4) papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, y (5) metodología de trabajo en el aula. Estas dimensiones se relacionan con los objetivos parciales de la investigación, los cuales son concreciones de los dos objetivos generales.

Para estudiar el conocimiento matemático se analizaron 118 transcripciones de los trabajos colaborativos y 8 transcripciones de las puestas en común. Las 124 producciones escritas de los equipos (78 del G1, 46 del G2) se han utilizado principalmente como material de respaldo de las producciones orales. Para este fin se ha aplicado la técnica de análisis de contenido (Cabrera, 2009).

En relación con el método de estudio de la competencia matemática se destaca que en la investigación desarrollada no se estudia el logro individual de las expectativas de aprendizaje ni se concluye acerca de la competencia como capacidad manifestada por un alumno particular. En este análisis se procura recuperar las actuaciones manifestadas en el trabajo colaborativo que evidencian el logro del objetivo instruccional, sin afirmar que todos los estudiantes del equipo mostraron esa capacidad y que en consecuencia se estimuló o promovió alguna de las competencias matemáticas en todos los miembros del equipo. En su lugar, con este análisis se pretende aportar una panorámica del porcentaje de los equipos en los que se mostraron actuaciones que evidencian el logro de las expectativas de aprendizaje planificadas. Con base en la observación del tipo de actuación, usando como marco de referencia los descriptores del estudio PISA para los grupos de competencia<sup>2</sup> (OCDE, 2004; Rico y Lupiáñez, 2008), se llega a concluir sobre el nivel con que se ha trabajado una u otra competencia.

Uno de los supuestos que ha guiado el análisis de las sesiones ha sido el considerar que el estudio del conocimiento matemático manifestado por los estudiantes aporta la información para observar el grado de consecución de los objetivos específicos de instrucción, lo cual hace posible valorar, si y en qué manera, se ha promovido la competencia matemática. En lo que sigue hacemos referencia a resultados de estas dos dimensiones de análisis, los mismos proceden del análisis de la cuarta sesión.

#### **Resultados del análisis de la cuarta sesión: Dimensión conocimiento matemático.**

Uno de los objetivos de la investigación para la cuarta sesión de trabajo se centró en conocer las concepciones<sup>3</sup> que muestran los estudiantes en relación con las escalas así como detectar si los estudiantes incurren en la “ilusión de la linealidad” (Modestou y Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005) en situaciones de semejanza que requieran la interpretación de una escala. Otro foco de interés ha sido describir y analizar las conjeturas que sobre las relaciones entre razones lograran mostrar los estudiantes.

En la Tabla 1, se presenta una síntesis de las actuaciones manifestadas por los estudiantes en la resolución de la tarea “El palacio real de la Alhambra”. Tales actuaciones corresponden a la dimensión de análisis relativa al conocimiento matemático. En la Tabla se indica la cantidad de equipos de cada grupo (G1 y G2) en los cuales se detectó cada concepción, después de la tabla se describe con detalle el indicador de actuación IE3.

---

<sup>2</sup> Reproducción, conexión y reflexión.

<sup>3</sup> En el estudio se adopta la idea de que una concepción es un conocimiento que ha sido construido por un individuo, ya sea de manera personal o en interacción con pares, y que no es necesariamente "equivalente" al conocimiento reconocido por una comunidad académica (Hitt, 2007).

Tabla 3

*Actuaciones manifestadas en la resolución de la tarea “El palacio real de la Alhambra”*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Interpretaciones de la Escala	IE1	Afirmar explícitamente que la escala 1:5 indica que cada centímetro de la maqueta A corresponde a 5 centímetros de la maqueta B.	37%	33%
	IE2	Aplicar la escala para hallar las longitudes de los lados y del perímetro de la maqueta B.	81%	89%
	IE3	Aplicar la escala 1:5 para hallar el área y el volumen requeridos en la maqueta B. Esta aplicación es una manifestación de la <i>ilusión de la linealidad</i> .	19%	55%
Conjetura sobre las relaciones entre razones de longitudes, área o volumen de cuerpos o figuras semejantes	C1	No se enuncia la conjetura, se manifiesta desconocimiento de cómo abordar la tarea.	44%	0%
	C2	Enunciar la conjetura “deslizándose el foco de atención” o con errores de expresión o con errores en la comunicación de la misma. Detectar la relación, pero no expresarla adecuadamente.	25%	44%
	C3	Enunciar la conjetura sobre la relación entre las razones correctamente.	25%	44%
	C4	Enunciar una afirmación cierta, pero no pertinente, sobre las cantidades y no sobre la relación entre las razones.	6%	33%
	C5	Expresar alguna relación o afirmación falsa sobre las cantidades.	12%	22%

*Nota:* Los porcentajes correspondientes a cada grupo sobrepasan el 100% dado que en algunos de los equipos se manifestó más de una actuación.

### **Descripción del indicador IE3: Aplicación de la escala para hallar el área y (o) volumen.**

Uno de los casos más conocidos de uso indebido de la linealidad es el relacionado con los problemas sobre el efecto del agrandamiento o reducción de una figura sobre su área o su volumen. El principio que gobierna este tipo de problemas es bien conocido: un aumento o reducción de cualquier figura geométrica (cuadrado, círculo, cubo, figura irregular,...) por un factor  $r$ , multiplica las longitudes por un factor  $r$ , las áreas por un factor  $r^2$  y los volúmenes por un factor  $r^3$ .

La inclusión del área y volumen como datos desconocidos en la primera parte de la tarea obedece a nuestro interés por conocer si los estudiantes utilizaban la misma escala para hallar las medidas de tales cantidades, esto es si incurrían en el fenómeno de la ilusión de linealidad o si por el contrario los estudiantes analizaban de alguna manera que el crecimiento del área o del volumen no seguía la misma razón de ampliación que relaciona las longitudes en las dos maquetas.

Tal fenómeno se evidenció en las producciones orales y (o) escritas de los equipos E2, E12 y E17 del G1 y en los equipos E1, E4, E5, E7 y E10 del G2. Se mostró en la resolución de la primera parte de la tarea (tablas) y en los intentos por enunciar la conjetura en la segunda parte de la tarea. Se muestra un fragmento del trabajo del equipo E12 del G1.



B14: a ver he dicho que sabiendo el largo y el ancho puedes calcular el área entonces la segunda figura va crecer en relación proporcional a la primera atendiendo a que la escala es uno, cinco

C14: ¿ponemos eso?

B14 y C14: sabiendo el largo el ancho...

B14: podemos hallar el área de la primera figura... ¿no?, podemos hallar el área, ya está... pues se queda en el aire, sabiendo el largo y ancho podemos saber que el área de la segunda figura crecerá de manera proporcional y directa en relación a la primera figura y sabiendo que la escala es 1, 5..., parece conjetura ¿o no?

No obstante, se subraya que en el G2 el trabajo colaborativo y las intervenciones tanto de la investigadora como de la profesora colaboradora contribuyeron a que los estudiantes detectaran y reflexionaran acerca de esta interpretación. En la mayoría de los casos se les preguntó por la manera de calcular el área de un rectángulo, situación que les produjo un conflicto ya que al aplicar la fórmula usual obtenían un resultado distinto, a partir de este contraste se vieron motivados a reelaborar el trabajo realizado.

En la Figura 3 se presenta un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E10 del G2, en la misma se observa cómo los estudiantes inicialmente calcularon el área aplicando la escala lineal. Sin embargo, es evidente que durante el intercambio colaborativo corrigieron ese error.

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm <sup>2</sup>
	Maqueta B	75 cm	25 cm	200 cm	<del>375 cm<sup>2</sup></del> 1875 cm <sup>2</sup>
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm <sup>2</sup>
	Maqueta B	30 cm	30 cm	120 cm	<del>180 cm<sup>2</sup></del> 900 cm <sup>2</sup>

Figura 3. Actuación IE3 manifestada en el equipo E10 del G2

Se ha observado que los estudiantes participantes en el estudio que reflejaron la aproximación IE3 aplicaron la proporcionalidad directa de forma espontánea y natural, además se ha detectado que las deficiencias de conocimiento relacionado con el uso razonado de las fórmulas para calcular el área del cuadrilátero limitaron la detección de las relaciones numéricas y en consecuencia esto entorpeció el enunciado correcto de la conjetura.

**Resultados del análisis de la cuarta sesión: Dimensión competencia matemática.**

En la planificación de la tarea “El palacio real de la Alhambra” se había previsto que, con base en las posibles actuaciones en esta tarea, se favorecieran las competencias *pensar y razonar, modelizar, comunicar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.*

En la Tabla 1 se indican las “Interpretaciones de la escala” mostradas por los estudiantes. La interpretación IE1 se ha detectado en aquellos equipos en los que ha mostrado explícitamente que la escala relaciona las longitudes de ambas maquetas, esta interpretación es reflejo del significado de la razón como relación funcional, en este caso modelizada por la expresión  $f(x) = 5x$ . Se hizo presente en el 37,5% de los equipos del G1 y en el 33,3% de los equipos del G2. Aunada a esta interpretación se ha señalado que más del 80% de los equipos de ambos grupos aplicaron la escala para determinar la medida de las longitudes correspondientes (Tabla

1). Con base en este dato consideramos que se ha logrado la expectativa de aprendizaje centrada en extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala. Las actuaciones que se han recogido en la aproximación IE1 muestran que se han trabajado las competencias *pensar y razonar*, y *modelizar* en un nivel de reproducción. Las actuaciones descritas en el acercamiento IE2 evidencian que los estudiantes han empleado las fórmulas de cálculo de área y las operaciones por lo que el tratamiento del primer ejercicio ha fomentado el trabajo sobre la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico* y las *operaciones* en un nivel de reproducción.

Las actuaciones mostradas en la tarea de elaborar una conjetura sobre la relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes promovió indiscutiblemente la exploración de este principio, aunque esto no implica que los estudiantes hayan logrado elaborar y describir la conjetura. Por motivos de espacio se omite la descripción de las actuaciones manifestadas en los equipos, no obstante, destacamos que los acercamientos C2, C3 y C4 evidencian los esfuerzos de los estudiantes por detectar relaciones verdaderas entre las cantidades o entre las razones en cuestión.

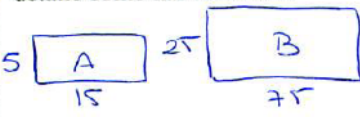
En el G1, uno o varios de estos tres acercamientos se mostraron en nueve de los 16 equipos (56,25%) y en el G2 se manifestaron en siete de los nueve equipos (77,7%). La búsqueda de relaciones entre las cantidades o entre razones evidenció la puesta en escena de la competencia *pensar y razonar* en un nivel de reflexión debido a que se requirió una generalización de tales relaciones.

Durante el trabajo sobre la tarea “El palacio real de la Alhambra”, la variedad de acercamientos mostrados en el intento de enunciar la conjetura relativa a la relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes, es una evidencia de la dificultad que esta demanda supuso para los futuros maestros.

En el G2, el 44% de los equipos logró describir adecuadamente una conjetura sobre la relación entre las razones. En todos los equipos identificamos intercambios productivos de ideas matemáticas que condujeron a la expresión de la conjetura. No obstante, reconocemos que tales intercambios y éxito en la tarea estuvieron determinados por las intervenciones de la profesora de la asignatura y de la investigadora quienes plantearon a los equipos preguntas orientadas a difuminar el fenómeno de ilusión de linealidad que obstruía la observación de las relaciones entre las razones y en consecuencia la expresión de la conjetura. En los equipos representados en el 44% indicado se trabajó la competencia *comunicar* en un nivel de reflexión dada la complejidad de la relación implicada en la conjetura.

En el G1, únicamente detectamos tres intercambios productivos de ideas matemáticas, es decir, aunque se hayan dispuesto las condiciones para trabajar la competencia *comunicar* hemos observado que en las producciones orales de este grupo no se reflejan actuaciones que la evidencien. Posiblemente la falta de familiaridad con este tipo de tareas ha incidido en las actuaciones manifestadas. No obstante, en los trabajos escritos de todos los equipos de este grupo se muestran intentos de enunciar la conjetura y esto nos motiva a pensar que la competencia *comunicar* se promovió en un nivel de reflexión dada la complejidad de la relación que debían expresar. Mostramos un ejemplo de la resolución escrita del equipo E15 del G1 (Figura 4).

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.



Podemos decir que para que 2 figuras planas sean semejantes se debe cumplir que la figura A de ancho sea 5 cm y la figura B 25 cm, y que de largo, la figura sea de 15 cm y la figura B, 75 cm, ya que así podemos decir que para 1 cm en la primera figura es 5 en la 2ª figura (1:5).  
 En el área sería  $5^2$ , ya que  $1875 : 75 = 25$ ; Por lo tanto la razón del área es  $25 = 5^2$ .

Figura 4. Resolución del ejercicio (b) de la I fase manifestada en el equipo E15 del G1

### A modo de conclusión

Las conclusiones del estudio abordan el logro de los objetivos del mismo y cuestiones relativas a la metodología de investigación desarrollada. Específicamente, se sintetiza el uso del análisis didáctico en las fases del experimento de enseñanza: planificación, implementación y análisis. Se argumenta a favor de la contribución de la metodología de trabajo en el aula y de la resolución de las tareas en el desarrollo del conocimiento matemático y de las competencias matemáticas de los estudiantes de magisterio. Además, se han generado conclusiones relativas al papel de la docente-investigadora durante el proceso de institucionalización de los conocimientos, así como conclusiones relacionadas con las fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo en el aula y de las tareas matemáticas realizadas (Valverde, 2012).

La investigación realizada aporta una rica descripción de actuaciones manifestadas por los estudiantes de magisterio en el contexto de la razón y la proporcionalidad. Se destaca, como aporte del estudio, la descripción de actuaciones vinculadas al razonamiento proporcional y a la comprensión de la proporcionalidad en el contexto de la formación de maestros, pues en la literatura existente sobre el tema, consultada, se encuentra la descripción de una gran variedad de actuaciones manifestadas por niños o estudiantes de secundaria y muy poca de maestros en formación.

Por otro lado, se ha considerado que el marco teórico del estudio PISA ha resultado pertinente para la investigación, la caracterización de la competencia matemática y los principios del enfoque funcional recogidos en el mismo han determinado la toma de decisiones en el diseño, puesta en práctica y análisis de la intervención. El estudio del logro de las expectativas de aprendizaje permitió extraer información acerca de la contribución de la experimentación al desarrollo de las competencias matemáticas y el procedimiento seguido ha sido eficaz para lograrlo.

## Referencias

- Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: The impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 333-340.
- Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: Propuesta de fases. *Pedagogía Universitaria*, 14(3), 71-92.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel. [Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia].
- Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (capítulo 2). En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Paris: Hermès.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *BOE*, 312, 53747-53750.
- Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. Tesis doctoral publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.