

## ECOLOGÍA DE LOS SIGNIFICADOS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS INTERVINIENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ruth E. Rivera, Ramiro Ávila G., Maximiliano De Las Fuentes, Alberto Navarro V.

Universidad Autónoma de Baja California

México

Universidad de Sonora

rivera@uabc.edu.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, navarrovaal@yahoo.com.mx.

**Resumen.** Presentamos un análisis ecológico de los objetos intervinientes, sus significados y su relación con las dificultades para resolver problemas utilizando ecuaciones diferenciales. Esto bajo el Enfoque Ontológico-Semiótico (EOS). Este análisis muestra que la posibilidad de entender un proceso está asociada a la significación que tienen los elementos que intervienen y a las diferentes formas de representarse. Un objeto matemático tiene sentido alrededor de otros objetos. Debido al carácter epistémico de la investigación se utilizó una metodología cualitativa. Se abordaron casos de estudiantes que cursaban ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería-Mexicali, dependiente de la Universidad Autónoma de Baja California, México.

**Palabras clave:** análisis ecológico, ecuaciones diferenciales

**Abstract.** We present an ecological analysis of the objects involved, its meanings and its relationship with the difficulty in solving problems using differential equations. This approach under the Ontologico-Semiotico (EOS). This analysis shows that the ability to understand a process is linked to the significance that have the elements that are involved and the different ways to represent them. A mathematical object makes sense around other objects. Due to the nature of the traditional epistemic research study, we used a qualitative methodology. Examined cases of students who were studying differential equations in the Engineering Faculty campus Mexicali, dependent on the University of Baja California, Mexico.

**Key words:** ecological analysis, differential equations

### Introducción

El curso de ecuaciones diferenciales se considera asignatura clave para todas las ramas de la ingeniería pues en él se pretende que los estudiantes las conozcan y aprendan a utilizarlas, asumiendo que se trata de la principal herramienta matemática utilizable en el análisis, interpretación y resolución de diversos problemas de la ciencia y de la ingeniería, tales como los problemas ligados a la comprensión de diversos fenómenos de la naturaleza; como el crecimiento y decaimiento poblacional, fenómenos de desintegración nuclear, los de la variación de la temperatura de los cuerpos, la propagación de virus, o problemas de ingeniería como los relacionados con los sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos eléctricos, etc. Los objetos matemáticos intervinientes han sido estudiados previamente en los cursos de Cálculo Diferencial, contexto en el que se han construido los significados previos de dichos objetos, que al aparecer en el contexto de las ecuaciones diferenciales requerirán adecuarse para un uso más eficaz de los mismos en el proceso de modelación, comprensión y resolución de los nuevos problemas.

El presente reporte de investigación muestra los resultados de una investigación orientada a tratar de entender las dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería cuando intentan resolver problemas utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden. La investigación se llevó a cabo partiendo de la premisa de que dichas dificultades están asociadas a los significados que adquieren los objetos matemáticos intervinientes como consecuencia de las nuevas relaciones ecológicas que surgen en el nuevo nicho que constituyen las ecuaciones diferenciales. En este reporte se caracterizan los cambios que se originan en los significados de los objetos matemáticos intervinientes en el proceso de resolución de los problemas utilizados en la investigación y se muestra cómo estos cambios se deben fundamentalmente a las nuevas relaciones ecológicas presentes en las ecuaciones diferenciales utilizadas al tratar de resolver los problemas.

El análisis realizado permitió confirmar que los significados previos de los objetos matemáticos intervinientes requieren modificarse para ser utilizados con eficacia en el nuevo contexto debido a las nuevas relaciones que surgen en el nuevo nicho ecológico. Para ilustrar que el significado de los objetos matemáticos está determinado por sus relaciones con otros objetos, consideremos un ejemplo: Tomemos el caso del objeto matemático número cinco: cuando hablamos de él nos concretamos a hablar de sus relaciones con otros números, así decimos que es un número entero, positivo, impar, que es un número primo, que es un divisor de 5, 10, 15...etc.- como puede observarse, el significado, en este caso, del objeto matemático llamado número cinco, está determinado por sus relaciones con otros objetos. Todos estos objetos constituyen lo que en el EOS se denomina, metafóricamente, un nicho ecológico (el de los números enteros). Siempre que se quiere hablar del número cinco se tiene que relacionar con otros números para poder hablar de él. Lo mismo sucede con las funciones y las ecuaciones diferenciales, no es posible hablar de una ecuación diferencial sin mencionar que proviene de relacionar, sumar o restar las derivadas o diferenciales de una función.

Para llevar a cabo esta investigación fue necesario resaltar el origen y el contexto en que fueron dándose los conceptos que imperan en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, el término *aequatiodifferentialis* fue primeramente usado por Leibniz (en forma bastante restringida) en el año de 1676, para denotar una relación entre las diferenciales  $dx$  y  $dy$  y dos variables  $x$  e  $y$ , este formato se conservaría hasta los tiempos de Euler (1768-1770). Es importante resaltar que las ecuaciones diferenciales ordinarias surgen prácticamente con la aparición del Calculus, en la ya célebre polémica Newton-Leibniz. Famoso es el momento en que Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama I:

6<sup>a</sup> cc d ae l 3e ff 7i el 9n 4° 4q rr 4s 9t l 2v x,

que en latín quiere decir “Data aequatione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa”, o bien: “Dada una ecuación concantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa”. Este fue el descubrimiento fundamental de Newton que consideró necesario mantener en secreto. En lenguaje matemático actual significa: “Es útil resolver ecuaciones diferenciales”. Existe la afirmación por parte de historiadores como Ince (1926) que la fecha de aparición de estas es el 11 de noviembre del 1675, cuando Leibniz escribió la ecuación  $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ , aunque acepta que no resolvió una ecuación diferencial, sino que fue el nacimiento de una herramienta muy poderosa y el momento en que apareció el signo de la integral (Grijalva, 2007).

Se revisaron los problemas que generaron la aparición de dichas ecuaciones a partir del siglo XVII (Benítez, 2008). En 1690 Jacques Bernoulli planteó el problema de encontrar la forma de la curva que adopta una cuerda flexible inextensible y colgada de dos puntos fijos, a la cual Leibniz llamó catenaria (del latín cadena). En aquel tiempo Galileo pensó que esta curva era una parábola, pero Huygens demostró que esto no era correcto. En 1694, Leibniz y Jean Bernoulli, estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvas dadas. Bernoulli señaló que este problema es importante para determinar las trayectorias de los rayos de luz que recorren un medio no uniforme, porque dichos rayos cortan ortogonalmente los llamados frentes de luz. Como se pudo ver estos problemas oscilaron entre los ambientes geométricos y los de la Física. Cada personaje que intervino en esta historia participó poniendo en ésta el enfoque de sus prácticas matemáticas y de sus creencias, así como la importancia que jugó el papel de sus preferencias en la producción de todos esos elementos que hoy denominamos objetos matemáticos adscritos al campo de las ecuaciones diferenciales.

### Marco teórico

Para el desarrollo de la investigación se utilizó el Enfoque Ontológico-Semiótico (EOS), (Godino, 2003). Del cual tomamos las herramientas teóricas utilizadas para abordar el problema de investigación. El EOS considera dos herramientas de análisis: *Semiométrico* y *Ecológico*. En un estudio semiométrico (Contreras y Ordoñez, 2006) se requiere caracterizar aquellos problemas que se presentan a los estudiantes para generar el significado propio de las ecuaciones diferenciales; como son el tipo de representaciones, los conceptos y argumentos utilizados; el lenguaje, etc. El estudio ecológico: está centrado en lo que rodea al objeto. Para analizar, interpretar y resolver el campo de problemas de las ecuaciones diferenciales, debemos tomar en cuenta que no son un objeto aislado, requieren de conocimientos previos, de los conceptos que se ponen en juego para comprenderlas.

El Análisis Ecológico consiste en revisar las relaciones implícitas y explícitas dentro de los elementos que aparecen cuando un estudiante trata de resolver problemas. Cuáles son los significados que él pone en juego, o bien, cuáles utiliza para dar explicación a los nuevos conceptos que aparecen en dicha situación problemática; por ejemplo el caso de una expresión matemática, un signo, etc. Se considera conflicto semiótico a la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción. Dicho conflicto es un constructo teórico que puede ser utilizado para explicar las dificultades y limitaciones en los aprendizajes y en las estrategias de enseñanza implementadas. (Godino, 2003). A continuación se presenta un gráfico que muestra un esquema de las acciones principales del análisis ontológico semiótico:

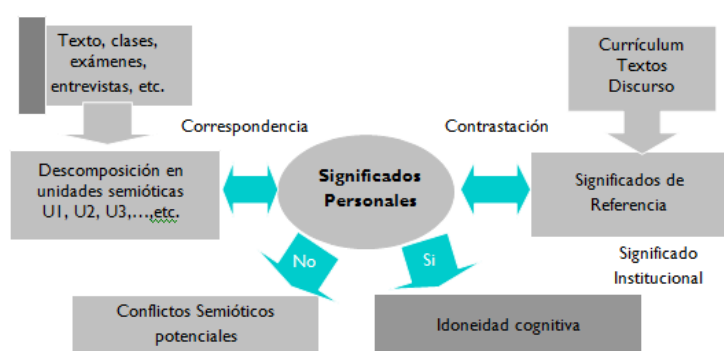


Figura 1: Análisis Ontológico-semiótico

Los elementos primarios del EOS son: El lenguaje, las situaciones-problémicas, propiedades, procedimientos, conceptos y argumentos. Los elementos anteriores, de acuerdo al rol de lenguaje con que participan pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: Personal-institucional, Elemental-sistémico. (Godino, 2002).

El fundamento de esta teoría (EOS), que aún se encuentra en construcción, es el carácter antropológico del conocimiento, se sitúa tanto en lo cognitivo como en lo epistemológico. Muestra por una parte, la preocupación por los procesos cognitivos del sujeto desde el punto de vista de la semiótica. Además la construcción de los significados personales y la simbología puesta en juego durante el aprendizaje. Por otro lado la propuesta epistemológica, argumenta que en el estudio de las situaciones didácticas es fundamental problematizar el conocimiento matemático, no considerarlo evidente.

### Método

Debido al carácter epistémico de la investigación se utilizó una metodología de corte cualitativo. Una combinación de diversas técnicas y métodos de recolección de datos (observación, encuestas, estudio de casos). Se consideraron casos de estudiantes que cursaban

la materia de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería, Campus Mexicali, dependiente de la Universidad Autónoma de Baja California, México.

Se realizó una revisión de los libros de texto más utilizados por los profesores que imparten dicha asignatura.

Se seleccionaron problemas típicos, de crecimiento y de temperatura, del texto de Ecuaciones Diferenciales de Dennis G. Zill (Pág. 96-97) y del Simmons, George F. (2002). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. Debido a que el primero es uno de los más utilizados por los profesores que imparten este curso en la Facultad de Ingeniería y el segundo adquiere también cierta relevancia pues contiene una buena cantidad de reseñas históricas de interés para motivar el estudio de los temas a partir de cómo los va desarrollando el autor. Para el análisis de los problemas, cada uno de ellos, se ha dividido en unidades, que están relacionadas en función de los elementos primarios del EOS. Tales como:

*El lenguaje*, se revisó el lenguaje utilizado en el texto para ver de qué tipos son las notaciones que aparecen, si contiene expresiones representadas en forma de gráficos o numérico. *Las situaciones*, en esta parte se revisan como son presentados o abordados los ejemplos de problemas en el texto. *Las acciones o procedimientos*, que hace el autor del texto para resolver ejemplos tipo. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino, 2007). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

Se recurrió también al diseño de un cuestionario (pre-test y post-test), para indagar el estado de los conocimientos previos en un grupo de 30 estudiantes inscritos en un curso de Ecuaciones Diferenciales, dentro del programa de Tronco Común en licenciatura que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (México). El cuestionario se dividió en tres secciones; la primera, denominada la sección A, contiene cinco reactivos abiertos, sobre las características, propiedades y desarrollo de las funciones *logarítmicas* y *exponenciales*. La siguiente, es la sección B, y está compuesta por cinco reactivos abiertos sobre *diferenciación*, la tercera, la sección C, la forman cuatro ejercicios de tipo rutinario y representativo de la aplicación de métodos y técnicas de *integración*.

### Análisis

Para analizar las respuestas dadas en el cuestionario, cada enunciado fue clasificado en unidades de análisis relacionadas con los elementos primarios del EOS: *El lenguaje*, se revisó el lenguaje utilizado por los estudiantes, si se introducen notaciones y de qué tipo, gráfico, numérico, etc.

Las acciones o procedimientos que utiliza el estudiante para resolver los ejercicios planteados. Los argumentos y los conceptos involucrados. Las proposiciones o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino, 2006). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

Normalmente se espera que aquellos estudiantes que obtienen los mejores resultados en un examen diagnóstico, sean también los que obtengan los mejores resultados en el curso. El análisis de los cuestionarios nos permitió seleccionar a los estudiantes que obtuvieron algunos resultados más representativos para la presente investigación. Se analizaron tanto sus aciertos como sus desaciertos. Finalmente se seleccionaron nueve estudiantes considerados en función de su desempeño. A estos estudiantes se les solicitó resolvieran 2 problemas del tipo de Crecimiento, la siguiente Tabla muestra la comparación entre los conocimientos previos de dichos estudiantes y su desenvolvimiento en la resolución de dichos problemas, en donde podemos observar las siguientes situaciones:

Los estudiantes 1 y 5 obtuvieron un avance significativo entre la aplicación de los dos cuestionarios, no les va muy bien a la hora de resolver problemas, pero son exitosos con el curso al final. Los estudiantes 8 y 12, son aquellos que mostraron solidez y buenos resultados en ambas aplicaciones del cuestionario, resuelven problemas y son bastante exitosos en el curso en general. Los demás estudiantes seleccionados no muestran un avance consistente ni significativo entre una aplicación y otra. Con excepción del alumno 22, ninguno resuelve los problemas, pero al finalizar el curso solo dos de ellos no logran aprobar.

Los resultados obtenidos por estos últimos estudiantes, salen de los parámetros esperados, lo cual nos permiten visualizar otro tipo de situaciones que ameritan un estudio amplio sobre estos casos.

Alumno	Sección A		Sección B		Sección C		¿Resuelve Problemas?	Calificación 1er. Parcial <sup>1</sup>	Calificación del curso <sup>2</sup>
1	0	4	4	5	1	4	Resuelve con errores	58	66
5	1	4	3	5	1	4	Solo plantea el problema	80	88
8	5	6	6	6	6	6	Resuelve bien el problema	100	98
12	5	5	5	6	6	6	Resuelve bien el problema	100	85
13	0	4	1	5	2	2	Hace intentos no lo resuelve	23	66
19	0	3	2	6	1	0	Hace intentos no lo resuelve	45	59
20	1	2	2	5	3	3	Solo plantea el problema	20	52
22	0	2	3	5	3	3	Resuelve bien el problema	45	68
31	0	0	2	3	2	3	Ni siquiera intenta	20	60
Nota <sup>1</sup> . Examen primera unidad contiene problemas para resolver con antiderivadas									
Nota <sup>2</sup> . El mínimo aprobatorio es de 60									

Tabla 1: Comparación entre conocimientos previos y resolución de problemas

Es importante hacer notar lo que se observó al revisar las acciones realizadas por los estudiantes al momento de resolver problemas, como ejemplo citaremos el que se les aplicó referente al *Crecimiento Bacteriano*. El enunciado dice lo siguiente:

Un cultivo tiene una cantidad inicial  $P_0$  de bacterias. Cuando  $t=1$  h. la cantidad medida de bacterias es  $\frac{3}{2}P_0$ , si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes  $P(t)$  en el momento  $t$ , calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de micro organismos.

Por la forma de conducirse y los razonamientos y cuestionamientos dados por los estudiantes pudimos percatarnos que aunque parece obvio y sencillo dicho problema, no lo es. Algunos estudiantes no pudieron interpretar que era exactamente lo que les pedía el problema. Algunos otros dudaban de su interpretación sobre el significado del enunciado “directamente proporcional a la población existente”, esto nos hace pensar que aunque pudieron resolver problemas de este tipo en otros contextos, como es el algebraico, no les es fácil cambiarse al contexto de los objetos variables. Otros tuvieron dificultad para interpretar los datos del problema, al parecer no les decía nada que la cantidad inicial era  $P_0$  bacterias...otros menos lograban avanzar en la resolución del problema pero a la hora de cuestionarlos sobre el comportamiento de la función encontrada, no podían describir en forma verbal, las características de dicha función.

### Conclusiones

De los resultados obtenidos en esta investigación, se percibe que el análisis semiótico o de significados es un recurso de utilidad para la investigación en el ámbito de la didáctica de las matemáticas. Que el revisar la ecología de significados existentes alrededor de un concepto, nos puede ayudar a descubrir como los estudiantes se enfrentan a una cantidad de conceptos, llámense conocimientos previos, que no son tan sencillos de relacionar. Este tipo de análisis fino de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad o bien en la resolución de problemas, tales como el uso de términos y expresiones; lo cual nos arroja luz sobre los conflictos y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se presentan en los libros de texto. Estos conflictos semióticos pueden dar explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y nos puede motivar a buscar otras formas de abordar dichos temas.

### Referencias bibliográficas

- Benítez, J. (2008). *El Pensamiento Matemático: de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad. Universidad Politécnica de Valencia, España.
- Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 65-84.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The international Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R., (2006). Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial*, 131-155.
- Grijalva, A. (2007). *El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos. El Caso de la Integral de una Función*. (Tesis inédita de doctorado), Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
- Ince, E. (1926). *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover.
- Simmons, George F. (2002). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. México: Editorial Mc. Graw Hill.
- Zill, Dennis G. (2003). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado*. México: Editorial Thomson.