DESARROLLO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Jesús Ávila Godoy, Ramiro Ávila Godoy, Francisco Javier Parra Bermúdez,
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
jag_virgo@hotmail.com, ravilag@gauss.mat.uson.mx , francisco.parra@correo.fisica.uson.mx

Resumen. En este trabajo, presentamos algunos resultados del estudio realizado sobre el desarrollo epistemológico de la derivada, llevado a cabo bajo la perspectiva teórica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) de J. D. Godino.

Aquí mostramos, cómo el objeto derivada de una función, al igual que la matemática en general, es una herramienta construida socialmente por el hombre en el análisis, la interpretación y resolución de un cierto tipo de problemas relacionados con los procesos de cambio y cómo el desarrollo de su significado expresado en distintos sistemas de prácticas ha pasado por distintas etapas hasta integrarse como parte de un sistema de conocimientos lógicamente estructurado.

Palabras clave: derivada, significado, contexto, desarrollo espistemológico

Abstract. In this paper, we present some results of the study of epistemological development of the derivative, conducted under the theoretical perspective “Ontosemiotic Approach of Cognition and Mathematics Instruction” (EOS) of J. D. Godino.

Here we show, how the derivative of a function object, like mathematics in general, is a tool socially constructed by man in the analysis, interpretation and resolution of a certain type of problems related to the processes of change and how the development of meaning expressed in different practice systems has gone through different stages to be integrated as part of a knowledge system logically structured.

Key words: derivative, meaning, context, epistemological development

Introducción

En este trabajo, presentamos los resultados obtenidos del estudio histórico-epistemológico del origen y desarrollo del objeto matemático *derivada de una función*.

Éste se realizó en el marco del proyecto de investigación que estamos desarrollando dentro del Programa de Doctorado en Ciencias que ofrece el Instituto de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, México, en el que nos hemos propuesto investigar sobre la relación del contexto con los significados de los objetos matemáticos, que construyen los estudiantes, concretamente, el significado de la derivada de una función en el contexto de los problemas que se abordan en las carreras de ingeniería.

En la realización de este trabajo, empezamos revisando las ideas que sobre el infinito estaban presentes en la matemática griega, ya que consideramos que en éstas se encuentra el germen de lo que hoy se conoce como Cálculo Diferencial e Integral. También revisamos las ideas de los trabajos matemáticos de los siglos XVI y XVII (Kepler, Cavalieri, Fermat, Descartes, Barrow, entre otros), que con métodos particulares para cada caso, abordaron algunos de los problemas que en la segunda mitad del siglo XVII y en el siglo XVIII abordaron Leibniz y Newton, quienes construyeron en diferentes contextos y, prácticamente de manera simultánea, un método general para resolver una gran variedad de problemas. Por otro lado, se revisaron también las contribuciones de algunos de los continuadores de dichos trabajos como L'Hopital, los hermanos Bernoulli, Euler, Lagrange, D'Alembert, Cauchy y otros.

En el estudio realizado, asumimos las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática desarrollado por Juan Díaz Godino y colaboradores, y bajo esta perspectiva teórica, se muestra cómo el desarrollo histórico- epistemológico del significado de la derivada de una función, se ha expresado en diferentes momentos y en variados contextos como sistemas de prácticas personales y, que dichos sistemas de prácticas se desarrollaron a partir de la necesidad de resolver diversas situaciones problemáticas como las siguientes: hallar la tangente a una curva en un punto dado, calcular la velocidad de un cuerpo en movimiento en un instante dado, problemas de máximos y mínimos, entre otros, en este sentido, se muestra también que la *derivada de una función* es una *herramienta* construida socialmente por el hombre al tratar de entender y resolver una serie de problemas relacionados con *los procesos de cambio* y que el significado de dicho objeto se ha ido diversificando y enriqueciendo en el proceso mismo de resolución de dichos problemas.

Se destaca que aun y cuando a Leibniz y Newton se les considera los creadores del cálculo diferencial e integral, y lo hicieron prácticamente en el mismo periodo histórico pero en diferentes contextos, esto originó que los significados construidos y la simbología utilizada por ellos fueran distintos, y que sólo posteriormente, se pudiera mostrar que ambos sistemas de prácticas eran esencialmente equivalentes.

En dicho estudio, se puso de manifiesto además, que la diversidad y riqueza de los sistemas de prácticas desarrollados (significados del objeto), por un lado, y la exigencia de fundamentar rigurosamente dichos sistemas de prácticas, es decir, la necesidad de construir una fundamentación cuyo soporte no fuera de tipo físico o geométrico, como había sido en un principio, sino una fundamentación basada en la lógica formal, por otro, así como la necesidad de organizar con fines escolares lo realizado hasta ese momento en esta nueva área de la matemática, motivaron el avance hacia la construcción gradual de lo que hoy se considera en la comunidad matemática, en la currícula escolar y en los textos utilizados, como el significado institucional de referencia de la derivada de una función, es decir, se muestra que el objeto matemático *derivada de una función*, ha pasado, en su desarrollo histórico, de la misma manera que la matemática en general, por diferentes etapas de revisiones críticas que han conducido a su sistematización como parte de un sistema de conocimientos lógicamente estructurado.

Consideramos importante mencionar que el análisis e interpretación del desarrollo histórico-epistemológico de la *derivada de una función*, en el marco de nuestro proyecto de investigación se justifica dado que asumimos que, de la misma manera que debe haber una relación entre el contexto de la enseñanza y los significados de los objetos matemáticos, también consideramos que esto debe poder observarse en el origen y desarrollo histórico de dicho objeto, asumimos, además, que esta relación debe ser similar lo cual nos permitirá aprovechar lo observado en una situación para diseñar la estrategia de observación en la otra, sin que esto signifique que pensemos que se puede diseñar una estrategia que elimine todos los errores y dificultades en el aprendizaje.

Desarrollo histórico-epistemológico de la derivada

En este apartado, por razones de espacio, presentaremos sólo algunas reflexiones sobre el trabajo de los matemáticos en la cultura griega y con más detalle las ideas que desarrolló Leibniz en los siglos XVII y XVIII sobre el cálculo diferencial e integral.

En la matemática griega, debido a la inconsistencia lógica que implicaba la concepción pitagórica del espacio, el tiempo, el movimiento y las magnitudes en general (concebidas como continuas) puestas de manifiesto por Zenón de Elea en las llamadas paradojas, la mayoría de los matemáticos de la época evitaron abordar los problemas en cuya resolución aparecían procesos infinitos. Dichas concepciones se expresaban en los siguientes enunciados teóricos…

> Sobre las magnitudes en general:
>
> Toda magnitud finita puede subdividirse indefinidamente mediante la bisección.
>
> En el proceso de subdivisión de una magnitud, las partes se hacen más pequeñas cada vez.
>
> Las últimas partes resultantes de este proceso se llaman "indivisibles".
>
> Las partes "indivisibles" de una magnitud (espacio. tiempo, movimiento) tienen una y la misma magnitud finita (distinta de cero).
>
> Una magnitud finita es la unión (suma) de sus infinitas partes "indivisibles". Así un número es la unión (suma) de unidades.
>
> Toda cantidad finita tiene magnitud finita.
>
> La suma de infinitas magnitudes finitas (distintas de cero) es infinita.
>
> Sobre el espacio:
>
> Punto es la "unidad" que ocupa una cierta posición en el espacio.

El espacio está constituido de “indivisibles” (puntos).

Un cuerpo es la unión (suma) de sus puntos.

Sobre el tiempo y movimiento:

El tiempo está constituido de “indivisibles” (instantes).

Un móvil en cada instante ocupa una posición determinada en el espacio.

Un instante ocurre cuando el móvil pasa de una posición a la siguiente.

Un móvil recorre una distancia finita en un tiempo finito.

La suma de movimientos da el movimiento total.

Dos móviles con la misma velocidad recorren distancias iguales en tiempo iguales.
(Díaz, 2008, p. 4-5).

Esto dio lugar a que algunos matemáticos, entre otros, Arquímedes, abordaran el estudio de problemas relacionados con las áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies, utilizando métodos que, de manera muy ingeniosa, evitaban los procesos infinitos, pero que permitían encontrar soluciones a los problemas abordados con un grado de aproximación suficiente para los requerimientos prácticos. Los resultados y los métodos de resolución se mostraron en los trabajos *Sobre la esfera y el cilindro*, *Medidas del círculo y el Método.*

El origen del cálculo diferencial e integral, así como de la matemática en general, se encuentra en la necesidad de resolver determinados problemas, algunos de carácter extramatemático y otros de naturaleza intramatemática.

En el siglo XVII los problemas que estaban interesados en resolver los matemáticos y otros científicos y que dieron lugar al surgimiento de las ideas y métodos del cálculo son los siguientes: i) Hallar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto, este problema era de interés matemático y técnico. Matemático, porque era un problema planteado en el contexto de la geometría en Grecia y que resolvieron con métodos geométricos para algunas curvas, y se pretendía resolverlo para toda curva; y técnico ya que estaba ligado al problema del diseño de lentes ópticas y a la determinación de la velocidad y dirección de un móvil en un instante dado así como de su aceleración; ii) Problemas de máximos y mínimos, como encontrar el ángulo de inclinación del tubo de un cañón que maximiza el alcance de un proyectil, las distancias máxima y mínima de un planeta al sol, el diseño de recipientes de cierta forma de capacidad máxima, etc.; iii) Problemas de integración, como hallar el área de figuras con lados curvos, hallar la longitud de segmentos de curvas, la distancia recorrida por un móvil conocida la expresión de su velocidad, etc.

Al abordar los problemas mencionados, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, René Descartes y otros, diseñaron métodos específicos para resolver los casos que se les iban presentando y de esta manera fueron construyendo estrategias más generales, pero no lograron establecer la relación existente entre los problemas de la diferenciación y la integración, que hoy se expresa en el Teorema Fundamental del Cálculo. Sin embargo, su trabajo representó un aporte muy importante para el diseño de un método general por Newton y Leibniz.

Leibniz, formado profesionalmente en el campo de la abogacía y con experiencia desde muy joven en el servicio diplomático, aspiraba a la construcción de un lenguaje que permitiera resolver las controversias en las relaciones humanas a través de medios pacíficos y esta inclinación por el lenguaje tuvo un efecto muy importante en su versión del cálculo y le permitió introducir una notación que es la que prevalece hasta hoy. El contexto en el que abordó los problemas matemáticos estuvo siempre en los números y la geometría.

Entre los momentos significativos para el trabajo académico se encuentra cuando Huygens le propone resolver el problema de encontrar la suma de los recíprocos de los números triangulares, es decir, hallar el valor de S en:

$$S=1+1/3+1/6+1/10+1/15+\ldots$$

Esto lo resolvió dividiendo $S/2=1/2+1/6+1/12+1/20+1/30+\ldots$

Y reescribiendo $1/2 = 1-1/2$, $1/6 = 1/2 -1/3$, $1/12 = 1/3 - 1/4$, $1/20 = 1/4 - 1/5$ y así sucesivamente y sustituyendo, obtuvo

$$S/2= (1-1/2)+ (1/2-1/3)+ (1/3-1/4)+ (1/4-1/5)+\ldots$$

$$S/2=1$$

$$S=2$$

La resolución de éste y otros problemas resueltos con la estrategia de sumar diferencias le mostró que ésta podía ser muy fructífera y especialmente cuando las diferencias se toman entre cantidades que están "infinitamente cerca" unas de otras.

Esta manera de concebir lo "infinitamente cerca" lo llevó a considerar una curva como un polígono de una infinidad de lados determinados cada uno por dos puntos de la curva que se encuentran "infinitamente cerca" entre ellos y cada lado de longitud infinitamente pequeña.

De acuerdo con esto, si los puntos P y Q están sobre una curva y están infinitamente cerca uno del otro, el segmento PQ es un lado del polígono que constituye la curva y, la pendiente de la recta tangente en P, es el cociente dy/dx. A este triángulo PQR, Leibniz lo llamó triángulo característico Figura 1.

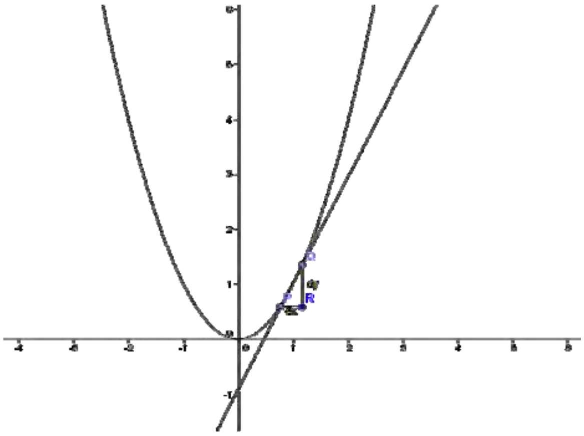

Figura 1: Aquí se muestra el triángulo característico de Leibniz

Leibniz expresa lo anterior de la siguiente manera...Tenemos que entender que hallar una tangente significa trazar una recta que conecta dos puntos sobre la curva que se hallan entre sí a distancia infinitesimal, ello equivale a prolongar uno de los lados del polígono que constituye la curva. La distancia entre los puntos a distancia infinitesimal sobre la curva se puede denotar mediante una diferencial ds. (Kleiner, 2001, p. 146).

Por otro lado, Leibniz calculó el área de la región comprendida entre el eje horizontal, dos rectas verticales y una curva mediante rectángulos de base infinitesimal y en la Figura 2 se observa que la diferencia entre el área bajo la curva y la suma de las áreas de los rectángulos está constituida por las áreas de los "triángulos" de la parte superior. Si la base de los rectángulos se torna infinitesimal entonces los "triángulos" desaparecen.

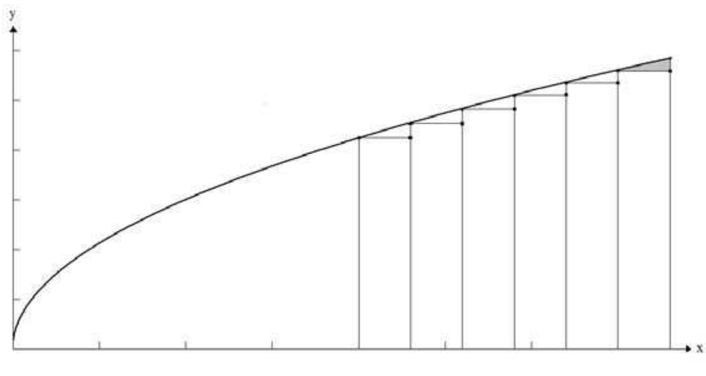

Figura 2: Aquí se muestran los rectángulos de área infinitesimal cuya suma es el área bajo la curva

De aquí, Leibniz concluye que el área bajo la curva es $A=\int ydx$ (donde $\int ydx$ representa la suma de las áreas de los rectángulos de base infinitesimal) y $dA=ydx$ de donde $dA/dx=y$.

La resolución del problema de la tangente a una curva en un punto y del área bajo la curva utilizando los infinitésimos puso de manifiesto la relación fundamental entre el área bajo la curva y la curva misma. Aquí se encuentra ya el núcleo de lo que más tarde se enunció como el Teorema Fundamental del Cálculo.

En el trabajo de Leibniz resaltan dos principios que L'Hôpital retomó en su libro Análisis de los infinitesimales y los presentó como sus axiomas, estos principios son los siguientes:

1.- Toda curva puede considerarse como un polígono que tiene una infinidad de lados. Cada lado es un segmento infinitesimal.

2.- Si A es una cantidad finita y α es un infinitesimal (cuando se le compara con A) entonces, $A+\alpha$ puede sustituirse por A en los cálculos.

Evidentemente el trabajo de Leibniz no fue aceptado unánimemente por la comunidad matemática de la época ya que éste no pudo establecer con el rigor requerido lo que eran los infinitésimos y su argumento para defender el uso de estos nuevos objetos matemáticos era su utilidad para la realización de cálculos que permitían obtener resultados correctos.

Es importante destacar que el sistema de prácticas, tanto operativas como discursivas (significado), implementado por Leibniz está determinado por el contexto de los problemas que abordó previamente y los que intentaba resolver con la nueva estrategia así como por su formación previa en el campo de la abogacía y la diplomacia, ya que todos estos elementos forman parte del contexto.

Reflexiones finales

Como podemos observar, en el trabajo de los griegos y en el trabajo de Leibniz en el siglo XVII, los significados de los objetos matemáticos, en este caso, la derivada de una función, está condicionado por el contexto en el que se usa, incluyendo dentro de éste las significaciones previas que poseen los sujetos, que son los elementos con los que se abordan los nuevos problemas y son la base sobre los que se construyen los nuevos significados.

Esta relación entre el contexto y el significado del objeto matemático derivada de una función que se muestra en el análisis de su desarrollo histórico-epistemológico, y cómo dicho objeto es construido a partir de la necesidad de resolver determinadas situaciones problemáticas, y además, cómo sus distintos significados se expresan como un sistema de prácticas personales es lo que nos proponemos mostrar que también ocurre en el aula escolar.

Por esta razón, dicho análisis representó un elemento muy importante a considerar en el diseño de las estrategias de enseñanza que implementamos en el aula y, consideramos que en general, también debe ser un elemento para el diseño de estrategias que se propongan contribuir a mejorar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Referecias bibliográficas

Barceló, B. *El descubrimiento del cálculo*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. Antología Pensamiento matemático II. México.

Beliáiev, Y.; Pierminóv, V. (1991). *Problemas filosóficos y metodológicos de la matemática.* Universidad de Sonora. México.

Cauchy, A.-L. (1994). *Curso de análisis*. Facultad de Ciencias, UNAM. México.

Díaz, M. (2008). De la dialéctica de Zenón, al método reducción al absurdo. *Revista Alternativa, 5 (17)*

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* Recuperado el 12 de enero de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Recuperado el 12 de enero 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino

Grabiner, J. V. (1990). *The Calculus as Algebra. J.-L. Lagrange, 1736-1813*. Garland Publishing, Inc. New York & London.

Hawking, S. (2010). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Crítica. Barcelona.

Ímaz, C.; Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* Trillas. México.

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics 48 (2/3).*

Kline, M. (2000). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI editores. México.