GENERALIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE FUNCIONES LINEALES

Ángel Homero Flores Samaniego, Guadalupe Xochitl Chávez Pérez
Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM México
ahfs@unam.mx, matematica60_xch@hotmail.com

Resumen. En este artículo se presentan los avances de una investigación educativa que busca indagar los procesos de generalización de patrones en estudiantes de Bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM (edades entre 15 y 17 años) y el papel que tales procesos juegan en el estudio de funciones lineales. Se buscó respuesta a la pregunta: *¿Cuál es el grado de entendimiento del concepto de función lineal en estudiantes de primer semestre de Bachillerato cuando su estudio parte de actividades de reconocimiento de patrones y generalización?,* mediante un experimento de enseñanza exploratoria. Entre los resultados obtenidos se tiene que los estudiantes definen función lineal en el contexto del problema que se está resolviendo, lo cual implica que deben encontrarse mecanismos para trascender este contexto.

Palabras clave: reconocimiento de patrones, generalización, funciones lineales

Abstract. In this paper the advances of an educational research are shown. The aim is to inquire about the pattern generalization processes in Bachillerato students (ages between 15 and 17) at the Colegio de Ciencias y Humanidades, and the role of such processes in the study of linear functions. The answer to the research question: "What is the degree of understanding of the concept of linear function in students from first semester of Bachillerato when their study initiates with activities of pattern recognition and generalization?", through an exploratory teaching experiment. Among the results obtained it was found that students define linear function in the context of the problem that is solving. This implies that it is necessary to find mechanisms to go beyond that context.

Key words: pattern recognition, generalization, linear functions

Introducción

El presente trabajo es parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México, y tiene como objetivo presentar los avances de una investigación que busca, entre otras cosas, indagar los procesos de generalización de estudiantes de Bachillerato (15-17 años) y el papel que tales procesos juegan en el estudio de funciones lineales.

Una de las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando inician el estudio del álgebra es el paso del pensamiento aritmético al algebraico principalmente en dos aspectos:

- El uso de literales para representar números (Bills, 1997; Küchemann, 1981) y
- La comprensión del concepto de función; en particular como una relación de dependencia entre dos variables (Sierpinska, 1989).

A esto podemos añadir el obstáculo que las pruebas estandarizadas han significado en el entendimiento de los conceptos. Al respecto baste citar el estudio de Hodgen, Küchemann, Brown y Coe (2009) quienes encontraron que en Gran Bretaña, después de 30 años de reformas, los estudiantes han tenido una mejora en los resultados de las pruebas estandarizadas, pero hay evidencias de que esto se debe más a que los estudiantes han sido entrenados para resolver este tipo de pruebas que a un verdadero entendimiento del concepto:

> Además, vale la pena observar de nuevo que la muestra de estudiantes probada en 2008 corresponde a un grupo de resultados relativamente altos. Por tanto, los datos presentados aquí sugieren que el incremento en el desempeño en los exámenes no viene emparejado con un aumento en el entendimiento conceptual… (p. 545).

La investigación cuyos avances se presentan parte de la siguiente hipótesis: Si un estudiante es capaz de generalizar ciertos resultados a partir de la consideración de patrones en actividades de resolución de problemas, tendrá menos dificultades en la comprensión del concepto de función.

En particular, para el presente trabajo, se buscó respuesta a la pregunta:¿Cuál es el grado de entendimiento del concepto de función lineal en estudiantes de primer semestre de Bachillerato cuando su estudio parte de actividades de reconocimiento de patrones y generalización?

Marco teórico

En el desarrollo del trabajo se consideró el estudio de Küchemann (1981) sobre el uso de literales. Este autor encontró que los estudiantes utilizan las literales en expresiones algebraicas de seis formas: letra evaluada; letra no usada; como objeto; como una incógnita específica; como número generalizado; y como variable. Para efectos de este estudio nos interesa retomar los tres últimos usos de la literal. En la tabla siguiente se detallan estos usos.

Uso de la literal	Interpretación	Ejemplos
Incógnita específica	Se le considera como un número específico, pero desconocido. Es posible operar en éste directamente	$h + 3 = 5$; $h = 2$ Si $x + y = 5$, halla una expresión para $x + y + z$.
Número generalizado	Puede tomar varios valores, no sólo uno.	Los valores que pueden tomar las literales en expresiones como $d = vt$.
Variable	Puede tomar una gama de valores no especificados. Existen relaciones que conectan a dos de tales conjuntos.	Los valores que pueden tomar cuando representan el dominio o el contradominio de una función.

Se define función como la relación de dependencia entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente corresponde un solo valor de la dependiente.

Metodología

Las actividades se llevaron a cabo en un experimento de enseñanza basado en el Modelo de Enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007, 2010) que se centra en el estudiante y sus aprendizajes, y se basa en consideraciones teóricas generales tomadas de las tesis de Dewey (1989), Vigostsky (1963, 1978), y, en un nivel intermedio, consideraciones propias de la didáctica de la matemática basadas en la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997) y de los registros de representación de Duval (1993, 1995), entre otros.

El experimento de enseñanza consistió en el diseño y la aplicación de problemas sobre función lineal. En el desarrollo de la secuencia se privilegió la resolución de problemas y el trabajo en equipo. Los resultados de las actividades se consignaron en hojas de trabajo y la información se organizó mediante una lista de cotejo.

Las actividades de enseñanza tuvieron como objetivo que el estudiante tomara la literal como un número desconocido y después la viera como número generalizado y como variable, en el entendido de que esto facilitaría su comprensión del concepto de función. En la Figura 1 se muestran algunas de las actividades de enseñanza.


Funciones Lineales VI

Actividad

Inventa un problema parecido a los que hemos visto en clase. El único requisito es que la representación gráfica del problema sea una recta.

Resuélvelo y explica el procedimiento que seguiste para llegar a tu respuesta.

Nombres:

Grupo:

Problema 1
La carrera de maratón tiene un recorrido de 42.195 km. Supón que vas a competir en la maratón de la Ciudad De México. Si haces la carrera con una rapidez de 13 km por hora, ¿en cuánto tiempo terminarás la carrera?, ¿qué distancia llevarás recorrida en 67 minutos? ¿Qué relación existe entre la distancia qué corres y el tiempo? Explica tu respuesta.

Problema 2
En una fábrica de juguetes, los "cubos mágicos" de 8 cm de lado se empacan en cajas cúbicas de 56 cm de lado. ¿Qué volumen ocupan 45 cubos? ¿Cuántos cubos hay en la caja si ocupan un volumen de 117 760 cm³? Encuentra la ecuación que da el volumen ocupado con respecto al número de cubos. Explica tu respuesta.

Figura 1. Ejemplos de Hojas de trabajo.

Desarrollo experimental

El estudio se hizo en tres grupos con alrededor de 75 estudiantes de entre 15 y 17 años de edad de primer semestre de bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Sur turno vespertino.

El experimento de enseñanza tuvo una duración de 20 horas distribuidas en cuatro semanas. Se contempla un "ciclo de investigación" en tres fases:

1.- Diseño y planificación de la enseñanza.

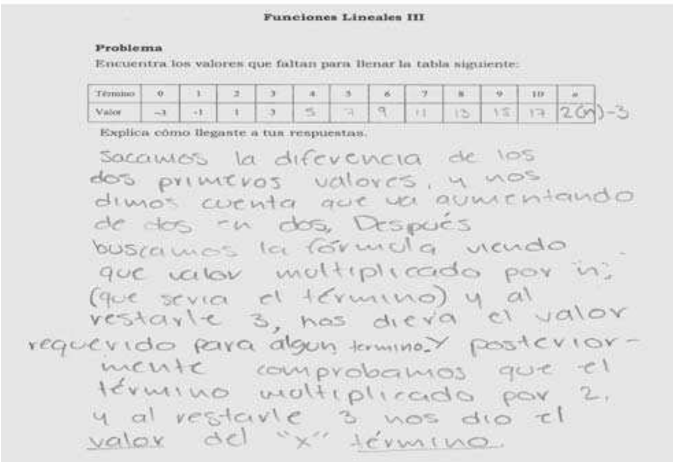
2.- Experimentación en el aula.

3.- Análisis retrospectivo mediante listas de cotejo y rúbricas.

La experimentación en el aula se llevó a cabo siguiendo los lineamientos metodológicos determinados por el propio Modelo de Enseñanza, una de cuyas características principales es permitir la libre comunicación entre los equipos y entre los estudiantes y el profesor. Éste funge como guía y monitor de las acciones.

Resultados

Las figuras 2, y 3 son muestras de hojas de trabajo del tipo de actividades y problemas que se vieron en el experimento. Por falta de espacio no será posible presentar más actividades que sustenten nuestras afirmaciones. En la siguiente sección haremos una pequeña descripción de la información que se puede obtener de estas dos hojas de trabajo, a modo de ilustración de la forma en que se procedió para el procesamiento de las respuestas.


Funciones Lineales III

Problema

Encuentra los valores que faltan para llenar la tabla siguiente:

Término	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Valor	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	2(n)-3

Explica cómo llegaste a tus respuestas.

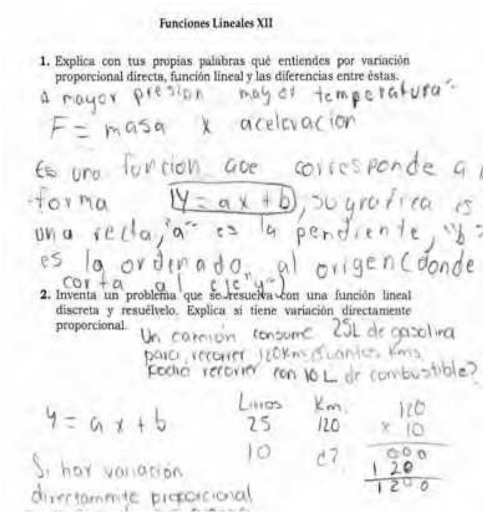
Sacamos la diferencia de los dos primeros valores, y nos dimos cuenta que va aumentando de dos en dos, Después buscamos la fórmula viendo que valor multiplicado por n; (que sería el término) y al restarle 3, nos diera el valor requerido para algun termino. Y posteriormente comprobamos que el término multiplicado por 2, y al restarle 3 nos dio el valor del "x" término.

Figura 2. Ejemplo 1

En esta actividad los integrantes del equipo consideran a la literal *n* como un número generalizado que puede tomar, al menos, los valores presentados en la tabla. El razonamiento que siguen les permitió encontrar un patrón "nos dimos cuenta que va aumentando de dos en dos", y a partir de éste buscan una generalización que les relacione las dos columnas, tomando en cuenta que la diferencia entre los valores es de 3: "Después buscamos la fórmula viendo que valor multiplicado por 'n'...y al restarle 3, nos diera el valor requerido'. Es decir, a partir del reconocimiento de un patrón, fueron capaces de generalizar el procedimiento y relacionar las dos columnas mediante una fórmula matemática tomando la literal *n* como un número generalizado. En la tabla siguiente tenemos la lista de cotejo para esta actividad con los resultados de los 6 equipos participantes de un grupo.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1. Completaron el renglón correspondiente al valor excepto la última entrada.	✓	✓	✓	✓	✓	✗
2. Tomaron los elementos de una columna y a partir del término obtuvieron el valor.	✗	✗	✗	✗	✗	✓
3. Prueban la regla obtenida con otro par de elementos.	✗	✗	✗	✗	✗	✓
4. Si la regla funciona con el par de elementos la prueban con el resto de parejas.	✗	✗	✗	✗	✗	✓
5. Encuentran la relación entre el término y el valor en forma general.	✗	✗	✗	✓	✗	✓
6.El renglón "valor" es una sucesión	✓	✓	✗	✗	✓	✓

Como se observa, sólo dos equipos lograron encontrar la relación entre el valor y el término. Ésta es una de las primeras actividades de este tipo, y el resultado implica que se debe poner, en actividades posteriores, énfasis en la forma de relacionar las dos columnas. Esto y la respuesta del equipo mostrado (Figura 2) dieron la pauta para introducir el criterio de las diferencias finitas para determinar el cociente de *n* en la relación entre las dos columnas.



Funciones Lineales XII

1. Explica con tus propias palabras qué entiendes por variación proporcional directa, función lineal y las diferencias entre éstas.

A mayor presión mayor temperatura.
F = masa x aceleración
Es una función que corresponde a la forma $\boxed{Y = ax + b}$, su grafica es una recta, "a" es la pendiente, "b" es la ordenada al origen (donde corta a la "y")

2. Inventa un problema que se resuelva con una función lineal discreta y resuélvelo. Explica si tiene variación directamente proporcional.

Un camión consume 25L de gasolina para recorrer 120Km ¿Cuántos Kms podrá recorrer con 10 L de combustible?

y = ax + b

Litros	Km
25	120
10	¿?

120 x 10 = 000 / 120 / 1200

Si hay variación directamente proporcional

Figura 3. Ejemplo 2

En la Figura 3 se presenta otra de las actividades, ésta corresponde a una de las últimas de la secuencia y en la siguiente tabla su lista de cotejo.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Explicaron lo que es variación proporcional directa, con base en la definición (actividad IX)				✓	✓	
Explicaron lo que es variación proporcional directa en forma intuitiva	✓	✓	✓			✓
Definen variables, dependiente e independiente			✓	✓	✓	✓
Explicaron lo que es función lineal	✓	✓			✓	✓
Indicaron la diferencia entre variación proporcional directa y función lineal	✓	✓	✓			
Inventaron el problema solicitado	✓	✓	✓	✓	✓	✓
El problema es una copia de los vistos en clase						
El problema cumple con el requisito de que se resuelva con una función lineal	✓	✓	✓	✓	✓	✓
El problema cumple con el requisito de que se resuelva con una función discreta	✓		✓	✓		✓
Resolvieron el problema	✓		✓	✓	✓	✓
Explicaron si corresponde a variación directamente proporcional						
Hicieron Gráfica	✓	✓	✓		✓	✓

La lista de cotejo y el reporte de la hoja de trabajo dejan ver que no se logró tener el concepto de variación directamente proporcional como se esperaba, sino de manera intuitiva, lo cual se ilustra con los ejemplos de la respuesta de la Figura 3: "A mayor presión mayor temperatura" y "F = masa X aceleración". Pero, según nuestro criterio, el uso de estos ejemplos nos hablan de que se está considerando la literal (por ejemplo la F) como un número generalizado. Mientras que con el problema que inventaron se evidencia que también reconocen las literales como variables.

Entre los resultados más relevantes tenemos los siguientes:

- Los estudiantes pueden diferenciar entre cantidades constantes y variables.
- En su mayoría, definen función lineal como una relación de dependencia entre dos variables cuya gráfica es una recta.

- La definición de función se da en el contexto del problema.

Conclusiones

Como respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el grado de entendimiento del concepto de función lineal en estudiantes de primer semestre de Bachillerato cuando su estudio parte de actividades de reconocimiento de patrones y generalización? Los resultados apoyan el hecho de que el uso de un razonamiento inductivo (partiendo de la identificación de patrones y su generalización) es de utilidad en la comprensión del concepto de literal como un número generalizado y como variable, facilitando con ello la transición de la aritmética al álgebra, y la comprensión del concepto de función lineal como relación de dependencia entre dos variables.

Lo obtenido no es concluyente, es necesario hacer una revisión más crítica del diseño experimental, sobre todo buscando que las actividades propicien que el estudiante trascienda el contexto del problema en su definición de función lineal.

También se hace necesario contrastar y comparar la información obtenida utilizando más de un instrumento de evaluación. Por ejemplo se podría diseñar una rúbrica específicamente para el concepto de función lineal y llenarla con la información obtenida con una lista de cotejo y una V de Gowin para cada actividad.

*Nota***.** La presente investigación cuenta con el apoyo de la Iniciativa para el Fortalecimiento de la Carrera Académica en el Bachillerato (Infocab) de la UNAM. Proyecto PB100111.

Referencias bibliográficas

Bills, E. (1997). Stereotypes of Literal Symbol Use in Senior School Algebra. *Twenty first Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland*, Program Committee of PME 21. 2: 73-80.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Dewey, J., (1989). *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*, Barcelona: Paidós.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Flores, H. (2007). Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae,* 9 (1), 28-40.

Flores, H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model, *Educaçao Matemática e Pesquisa*. 12 (1), 75-87.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M. y Coe, R. (2009). Children's understandings of Algebra 30 Years on: What has Changed? *Proceedings of CERME 6*, Lyon: Francia (539-548).

Sierpinska A. (1989). On the understanding of the Notion of Function, en Harel G. & Dubinsky E. (Eds) *The concept of function,* Concordia University.

Vigotsky L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.

Vigotsky, L. S., (1978). *Mind in Society*, *The development of Higher Psychological Processes.* Boston: Harvard University Press.