View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS PARA EVALUAR INTEGRALES DEFINIDAS Y SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Rogelio Acosta González
Universidad de las Tunas Cuba
racosta@ult.edu.cu

Resumen. La evaluación de integrales definidas utilizando la definición consume demasiado tiempo. Esto puede explicar por qué, en los textos y en la práctica docente, se procura establecer lo más rápidamente posible la fórmula de Newton–Leibniz. El tránsito acelerado desde los aspectos conceptuales hasta la parte procedimental, relativa al cálculo de una integral definida con la fórmula de Newton–Leibniz, puede tener un costo en lo que a comprensión conceptual se refiere. Esto plantea el siguiente problema: ¿Será aconsejable demorar la introducción de la fórmula de Newton–Leibniz y concentrar los esfuerzos iniciales en promover la comprensión conceptual, mediante el desarrollo de actividades concebidas para que los estudiantes utilicen la definición, interpretaciones, propiedades y aplicaciones para evaluar integrales definidas? En el trabajo se aborda esta problemática y empleando procedimientos geométricos se calculan integrales definidas no triviales, con un consumo aceptable de tiempo y la participación activa de los estudiantes.

Palabras clave: integral definida, procedimientos geométricos de cálculo

Abstract. The evaluation of definite integrals using its definition consumes too much time. This can explain why, in textbooks and educational practice, it's attempted to establish the Newton-Leibniz formula as quickly as possible. The accelerated transfer from the conceptual aspects to the procedural part, relative to the calculation of a definite integral with the Newton-Leibniz formula, may have a cost referring to conceptual comprehension. From this arises the following problem: Will it be advisable to delay the introduction of the Newton-Leibniz formula and focus the initial efforts in promoting the conceptual comprehension, through the development of activities conceived so that the students use the definition, interpretations, properties and applications to evaluate definite integrals? This paper addresses this issue, and non-trivial definite integrals are calculated applying geometric procedures, within an acceptable period of time and active participation of the students.

Key words: definite integral, geometrical calculation procedures

Introducción

La integración de funciones reales de una variable real se desarrolla en las disciplinas de formación matemática en carreras de perfiles agropecuarios, técnicos y económicos, entre otras. Es frecuente en el aula, y en muchos textos, que se inicie la exposición con las integrales indefinidas. Menos común, aunque también legítimo, es comenzar con las integrales definidas. Este ordenamiento es el que se sigue, por ejemplo, en Cálculo con trascendentes tempranas (Stewart, 2002), libro que se utiliza en Cuba como texto básico para las carreras de Ciencias Técnicas. Por más de diez años, en carreras que se desarrollan en la Universidad de Las Tunas, el autor ha seguido este orden, etapa en el cual ha procurado fundamentar sus ventajas, concibiendo y desarrollando medios para su puesta en práctica (Acosta, 2010).

La necesidad de introducir la fórmula de Newton–Leibniz lo antes posible, atendiendo a las dificultades que comporta el proceso de evaluación de una integral definida cuando se utiliza únicamente la definición, se refleja en cómo se trata la integración en los textos y en el aula; fundamentalmente en esta última, donde la disponibilidad de tiempo es limitada.

El tránsito acelerado que entonces se lleva a cabo, desde los aspectos conceptuales hasta los procedimentales, puede tener un efecto negativo sobre los primeros, porque se corre el riesgo de que las habilidades de cálculo analítico de integrales definidas, que es necesario desarrollar por parte de los estudiantes, se logren al margen o en detrimento de la comprensión conceptual, que es la cuestión más importante que se debe atender en la formación matemática de los estudiantes (concentrarse en la comprensión de los conceptos es la primera recomendación de la Conferencia para la Reforma del Cálculo, Universidad de Tulane, 1986, citada por Stewart, 2002).

De las consideraciones anteriores se revela una contradicción. De una parte se tiene la necesidad de disponer tempranamente de la fórmula de Newton−Leibniz, como medio eficiente para calcular integrales definidas, ante los inconvenientes prácticos que se presentan al hacerlo mediante la definición. Por otro lado, se puede comprometer la comprensión conceptual si no se mantiene el foco de atención de los estudiantes sobre el concepto, las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de la integral definida.

¿Es una contradicción sin solución? ¿Será aconsejable demorar la introducción de la fórmula de Newton−Leibniz y concentrar los esfuerzos iniciales en promover la comprensión conceptual, mediante el desarrollo de actividades concebidas para que los estudiantes utilicen la definición, interpretaciones, propiedades y aplicaciones para evaluar integrales definidas?

En este trabajo, que se fundamenta en la concepción histórico-cultural (Vygotsky, L. S., 1973) y donde se asumen preupuestos del Aprendizaje Cooperativo, se plantean posibles respuestas a esta cuestión. La idea básica es la siguiente: mediante procedimientos geométricos intuitivos y asequibles, como son los de rotación, traslación y reflexión, junto con conocimientos previos sobre longitudes, áreas y volúmenes, se pueden evaluar integrales definidas no triviales con un costo aceptable de tiempo. Este proceso de evaluación se concibe con la participación activa de los estudiantes, se materializa utilizando la definición y recurre a sus propiedades, interpretaciones y aplicaciones.

Algunos resultados sobre el cálculo integral

Tanto en los textos como en la práctica docente predomina el enfoque de introducir el concepto de integral definida de una función $y = f(x)$, que es continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$, en estrecha relación con el problema de la determinación del área del trapecio curvilíneo correspondiente (figura 1). Para una función continua que no conserva el signo en el intervalo de integración, a la integral definida se le interpreta como una suma algebraica de áreas con signo.

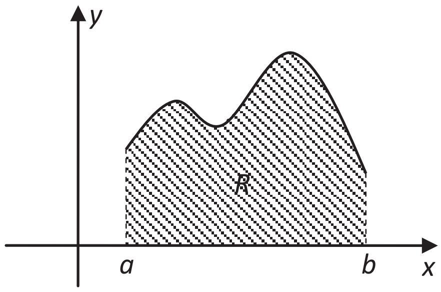

Figura 1. La integral definida de la función $y = f(x)$, continua y no negativa en $[a, b]$, es numéricamente igual a la medida del área de la región R, que está limitada por arriba por la gráfica de $y = f(x)$ en este intervalo.

Ya definido el concepto de integral definida como el límite de las sumas integrales, se precisa con todo rigor la noción intuitiva de área de una figura plana, al tiempo que se garantiza que existe la integral definida en $[a, b]$ para toda función $y = f(x)$ que es continua en este intervalo. Sobre la base de la definición, y manteniendo una fuerte apelación a la interpretación geométrica, lo que favorece su comprensión, se establecen algunas de las propiedades más importantes de la integral definida, otras interpretaciones y aplicaciones. También es práctica usual que se desarrollen algunos ejemplos.

Un ejemplo de integral definida aplicando la definición

La evaluación de una integral definida utilizando la definición es un proceso complejo, pero que no se debe eludir porque brinda la mejor oportunidad de trabajar con el concepto y su interpretación en términos de áreas. Seguidamente se desarrolla el ejemplo que corresponde a la función exponencial natural $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$ (Piskunov, 1983), que es continua en todo R, de manera que existe la integral definida correspondiente, y el límite de la suma integral que la define no depende de la partición que se haga del intervalo, ni de cómo se seleccione el punto que se requiere en cada intervalo parcial. Por eso, lo mejor es dividir $[0, 1]$ en n $(n \in N)$ subintervalos de la misma amplitud h, mediante la partición

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = 1, \text{ siendo } x_k = kh \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n, \text{ donde } h = \frac{1}{n}.$$

Seleccionando el extremo izquierdo en cada subintervalo, se obtiene la siguiente suma integral (es la suma integral inferior por ser $f(x) = e^x$ creciente):

$$S_n^I = \frac{1}{n} + \frac{\sqrt[n]{e}}{n} + \frac{(\sqrt[n]{e})^2}{n} + \cdots + \frac{(\sqrt[n]{e})^{n-1}}{n}.$$

Cada sumando es numéricamente igual al área de un rectángulo, y la propia suma S_n^I representa el área conjunta de la figura escalonada que resulta de la unión de todos los rectángulos, y constituye una aproximación por defecto del área del trapecio curvilíneo determinado por $f(x) = e^x$ en [0, 1]. Después de extraer el factor común $1/n$ y observar que multiplica a la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica de primer término $a = 1$ y razón $q = \sqrt[n]{e}$, se aplica la fórmula para la suma de los primeros n términos en tales progresiones y se obtiene la expresión

$$S_n^I = \frac{1}{n}(1 + \sqrt[n]{e} + (\sqrt[n]{e})^2 + \cdots + (\sqrt[n]{e})^{n-1}) = \frac{e-1}{n(\sqrt[n]{e}-1)}.$$

Con el cambio de variables $x = \frac{1}{n}$ se expresa $S_n^I = \frac{(e-1)x}{e^x - 1}$, donde $x \to 0^+$ si $n \to +\infty$. De la aplicación de la Regla de L'Hospital se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^I = e - 1$, de modo que

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1,$$

que se interpreta como la medida del área del trapecio curvilíneo determinado por la función exponencial natural $f(x) = e^x$ en el intervalo [0, 1].

Integral definida de una función impar en [–b, b], b>0. Consecuencias

De la interpretación como una suma algebraica de áreas con signo, la integral definida de una función impar y continua en $[-b, b]$, donde $b > 0$, es igual a cero, resultado que se formaliza con la igualdad

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0 \qquad (1)$$

Al sumar a la función impar y continua $f(x)$ su máximo M en $[-b, b]$, se obtiene una nueva función, definida por la expresión $\boldsymbol{g(x) = f(x) + M}$, que determina una traslación vertical de $f(x)$, ya que su grafica resulta de trasladar M unidades hacia arriba la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ descompone al rectángulo con vértices en los puntos de coordenadas $(-b, 0)$, $(b, 0)$, $(b, 2M)$ y $(-b, 2M)$ en dos regiones congruentes y por eso con la misma área, igual a la mitad del área del rectángulo. Una de estas regiones es el trapecio curvilíneo determinado por la gráfica de $g(x)$ en $[-b, b]$. De la interpretación geométrica de la integral definida de una función que es no negativa, como es $g(x)$ en $[-b, b]$, se obtiene que

$$\int_{-b}^{b} g(x)dx = \int_{-b}^{b} (f(x)+M)dx = 2bM \qquad (2)$$

Adicionalmente, si $y = f(x)$ es impar en $[-b, b]$, se define $\mathbf{h(x) = g(x-k) = f(x-k) + M}$, donde M es el máximo de $f(x)$ en este intervalo y k es un número real. Así $\mathbf{h(x)}$ es el resultado de una traslación vertical (M unidades hacia arriba) seguida de una horizontal (hacia la derecha para $k > 0$; para la izquierda en caso de ser $k < 0$) de $y = f(x)$. Observar que las traslaciones son movimientos geométricos, de manera que los términos utilizados, sobre las traslaciones de $y = f(x)$, se deben interpretar como traslaciones de su gráfica.

La integral definida de $h(x)$ en cada intervalo $[-b+k, b+k]$ es igual a $2bM$ y es lo que se ilustra en la figura 2 para $k = b$ y se formaliza en (3)

$$\int_{k-b}^{k+b} h(x)dx = \int_{k-b}^{k+b} (f(x-k)+M)dx = 2bM \qquad (3)$$

Las relaciones (1), (2) y (3) pueden interpretarse como la aplicación del teorema del valor medio a las correspondientes funciones e intervalos. Ejemplos donde se apliquen las relaciones (1), (2) y (3) se obtienen precisando una función impar y los parámetros b y k, así como determinando el máximo M en $[-b, b]$. Si el valor de b se prefija, la aplicación de la relación (3) a $h(x) = g(x-k) = f(x-k) + M$, para todo $k \neq 0$, permite obtener un ejemplo para cada elección de k.

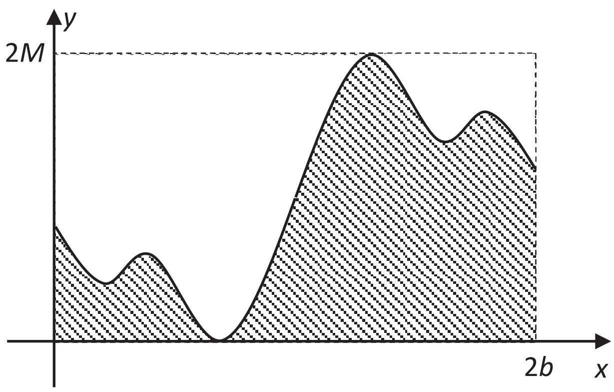

Figura 2. La integral definida de $y = h(x)$ en el intervalo $[0, 2b]$ es igual a $2bM$. La función $h(x)$ resulta de una traslación vertical (M unidades) seguida de una horizontal (b unidades) de la función $f(x)$, continua e impar en $[-b, b]$.

Por ejemplo, tomando $b = 1$ y la función impar $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, resultan las integrales $\int_{-1}^{1} \dfrac{2x}{x^2+1}dx = 0$ y $\int_{-1}^{1} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = 2$, ya que $M = 1$ es el máximo de $f(x)$ en $[-1, 1]$ y la relación (2) se aplica a $g(x) = f(x)+1 = \dfrac{2x}{x^2+1}+1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Volúmenes de revolución

Otra recurso para evaluar integrales definidas no triviales es la fórmula integral para el cálculo del volumen del cuerpo de revolución que se obtiene de la rotación alrededor del eje x del trapecio curvilíneo determinado por $y = f(x)$ en $[a, b]$. La fórmula es

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx, \tag{4}$$

y se establece como el límite de la suma integral V_n de la función $g(x) = \pi(f(x))^2$. Este resultado se basa en la interpretación de cada término de V_n como el volumen de un disco. La integral definida en (4) existe si $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$. Si el cuerpo de revolución que resulta tiene volumen conocido, entonces la integral definida que se obtiene de aplicar la fórmula integral (4) es numéricamente igual a ese volumen.

Por ejemplo, de la rotación de un semicírculo de radio R alrededor de su diámetro se obtiene un cuerpo esférico. Definiendo un sistema de coordenadas cartesianas con eje de las abscisas conteniendo al diámetro y eje de las ordenadas por el centro del semicírculo, entonces la semicircunferencia que limita al semicírculo es la gráfica de la función definida por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. De la aplicación de la relación integral (4), y de la conocida fórmula para calcular el volumen de un cuerpo esférico de radio R, se obtiene que

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

De la última integral se obtiene la integral definida de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, R]$. Se comienza multiplicando sus dos miembros por $1/\pi$, luego se usa la propiedad de linealidad para expresar el miembro de la izquierda como la diferencia entre las integrales definidas de R^2 y x^2, y finalmente se despeja la integral definida de $f(x) = x^2$.

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \frac{4\pi R^3}{3} \Leftrightarrow \int_{-R}^{R} R^2 dx - \int_{-R}^{R} x^2 dx = \frac{4R^3}{3} \Rightarrow \int_{-R}^{R} x^2 dx = 2R^3 - \frac{4R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}.$$

La integral definida de la función constante $h(x) = R^2$, igual a $2R^3$, se obtiene como consecuencia de su interpretación como la medida del área del rectángulo de base $2R$ y altura R^2. Para pasar de $[-R, R]$ a $[0, R]$ se apela a una sutileza geométrica: $f(x) = x^2$ es **par** y de ello

$$\int_0^R x^2 dx = \frac{R^3}{3}.$$

Un ejemplo interesante

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son no negativas en $[0, \pi/2]$. Los trapecios curvilíneos que ambas determinan en este intervalo son congruentes, ya que cualquiera de ellos es el reflejo del otro con respecto a la recta paralela al eje de las ordenadas por el punto $x = \pi/4$. Por lo tanto, si esos trapecios rotan alrededor del eje x, se forman cuerpos de revolución del mismo volumen V (en la figura 3 se representa el cuerpo que corresponde a $g(x) = \cos x$). Al aplicar a estas funciones la fórmula (4), resulta

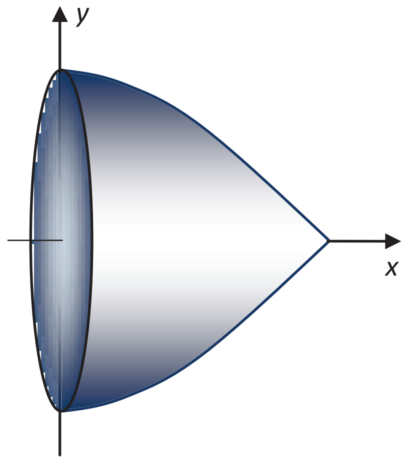

Figura 3. Cuerpo de revolución que se obtiene de la rotación alrededor del eje de las x del trapecio curvilíneo determinado por $g(x) = \cos x$ en $[0,\pi/2]$.

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx.$$

El valor $V = \pi^2/4$ se obtiene de la siguiente secuencia de igualdades:

$$2V = \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx + \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi^2}{4},$$

consecuencia de utilizar la propiedad de linealidad, luego la identidad trigonométrica fundamental y finalmente la interpretación de la última integral a la derecha como la medida del área del rectángulo de base $\pi/2$ y altura 1, que es el trapecio curvilíneo determinado por la función constante $h(x) = 1$ en $[0, \pi/2]$. Sustituyendo $V = \pi^2/4$ y multiplicando por $1/\pi$ todos los miembros de la relación para V, se obtienen las integrales

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Integral definida de una función si se conoce la de su inversa

Se supone ahora que se conoce el valor de la integral definida de cierta función $y = f(x)$ en $[0, b]$, para algún $b > 0$, donde ella es continua, creciente y no negativa. Mediante una reflexión con respecto a la recta de ecuación $y = x$ del trapecio curvilíneo determinado por $y = f(x)$ en $[0, b]$, se determina la integral definida de su inversa $y = g(x)$ en $[f(0), f(b)]$.

Si $y = f(x)$ es continua, no negativa y creciente en $[0, b]$, para $b > 0$, entonces se cumple que

$\int_0^b f(x)dx + \int_{f(0)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b),$ donde $y = g(x)$ es la inversa de $y = f(x)$. Esta igualdad es la expresión analítica de un hecho geométrico: el área del rectángulo con vértices en los puntos de coordenadas (0, 0), (b, 0), (b, $f(b)$) y (0, $f(b)$) —dada por el producto $bf(b)$—, es la suma de las áreas de las dos regiones en que la gráfica de $y = f(x)$ en [0, b] descompone a ese rectángulo. Al aplicar esta relación a $f(x) = e^x$ en [0, 1] y a su inversa $g(x) = \ln x$ en [f(0), f(1)] = [1, e], se obtiene que $\int_0^1 e^x dx + \int_1^e \ln x dx = e,$ y luego el valor $\int_1^e \ln x dx = 1$, pues utilizando la definición ya se determinó que $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Sobre la legitimidad de los resultados obtenidos

Hasta aquí una muestra de integrales que pueden obtenerse de procedimientos geométricos, como resultado de actividades diseñadas para el trabajo grupal cooperativo.

Dos cuestiones importantes se plantean: ¿Es legítimo establecer resultados sobre la base exclusiva de procedimientos geométricos? ¿Se puede asegurar que son correctas las integrales definidas obtenidas de la aplicación de esos procedimientos?

La respuesta a la segunda interrogante es sí, son correctas. También lo serán todas las integrales definidas que se calculen aplicando (correctamente) esos procedimientos.

Un experto, como un matemático o un profesor de matemáticas, seguro coincidirá en que es conveniente apelar, cada vez que ello sea posible y necesario, a un enfoque geométrico del contenido, como medio que favorece su comprensión. Al propio tiempo, posiblemente se resista a aceptar como válidos resultados que se hayan obtenido en virtud de consideraciones geométricas (es lo que ha prevalecido hasta aquí), o rechace utilizar conocimientos que no se hayan establecido con todo rigor. Este problema no es nuevo y sobran ejemplos para demostrarlo.

Por ejemplo, el hecho de que la integral definida de una función continua e impar en [$-b$, b] es igual a cero, no se demuestra con una figura. Una prueba rigurosa se tiene que basar en el empleo de la definición de la integral definida como un límite, aunque a la luz de la interpretación geométrica sea difícil aceptar otro resultado.

Una objeción similar se puede hacer con la fórmula que permite calcular el volumen de un cuerpo esférico. Los estudiantes pueden recordar (algunos lo hacen) la fórmula $V = 4\pi R^3/3$, aunque es posible que no reconozcan o hayan olvidado, si es que alguna vez se les dijo o leyeron, que no hay una manera rigurosa de establecerla en el nivel de enseñanza donde se introduce.

La propia función exponencial $f(x) = e^x$ no es posible definirla de manera satisfactoria a nivel elemental. Incluso, algo que posiblemente resulte paradójico en el contexto de este trabajo, en algunos textos (Spivak, 1974; Swokowski, 1989) se introduce la función logaritmo natural como la integral definida de $f(t) = 1/t$ en $[1, x]$, donde $x > 0$, para luego definir $f(x) = e^x$ como su inversa.

La posición que se asume toma en cuenta que el conflicto al que se enfrenta el experto con la necesidad de rigor, el estudiante ni siquiera se lo llega a plantear. Para él es un hecho que el volumen de la «esfera» se calcula con la fórmula $V = 4\pi R^3/3$ y el área del círculo con $A = \pi R^2$. Y la función exponencial está disponible, junto con muchas otras.

Si se acepta que el papel de los conocimientos previos de los estudiantes es crucial para poder enfrentar nuevos aprendizajes con posibilidades reales de éxito, entonces no se debería poner reparo alguno en activarlos para utilizarlos, incluso en los casos en que carezcan del rigor y el fundamento matemático necesarios; a fin de cuentas, desarrollar la capacidad de reconocer esas eventuales carencias, a la luz de nuevos marcos conceptuales, es un componente importante del quehacer matemático.

En consecuencia, se considera lícito el empleo de todos los conocimientos previos de que dispongan los estudiantes, no importa el grado de formalización que tengan. Y el enfoque geométrico, que permite visualizar y hacer un poco más comprensibles tantos conceptos y resultados matemáticos (Souto, 2009), se tiene que utilizar sistemáticamente para que sea fuente de nuevos conocimientos. Esta posición también implica riesgos, que se enfrentan haciendo las precisiones necesarias, para que cada contenido matemático lleve la cuota de rigor y formalización que le corresponda. Un equilibrio adecuado es una meta compleja de alcanzar, pero se puede trabajar para lograrlo.

Implicaciones didácticas: roles de profesores y estudiantes

La posibilidad de evaluar integrales definidas no triviales por medios geométricos, con un gasto aceptable de tiempo y las ganancias que en cuanto a comprensión conceptual ello puede significar, se concretan con la concepción y desarrollo de actividades que favorezcan la participación consciente y activa de los estudiantes. Se proponen actividades a desarrollar, correspondientes a tres momentos importantes, no los únicos.

1. El problema del área. Trapecio curvilíneo.

2. Procedimientos geométricos para evaluar integrales definidas.
3. Necesidad de una fórmula general para evaluar integrales definidas.

Las tres actividades propuestas se conciben para ser desarrolladas por equipos, tanto en formatos presenciales como no presenciales. Para asegurar que se cumplan los objetivos previstos, pueden ser útiles las indicaciones siguientes:

- Formar equipos no homogéneos en cuanto a competencias matemáticas y que estén acordes con las características del grupo de estudiantes. Asignar roles.
- Presentar la actividad, precisando el trabajo a realizar y sus objetivos.
- Monitorear el trabajo de los equipos. Garantizar niveles adecuados en las ayudas adicionales que sean necesarias. Fomentar la cooperación entre los equipos.
- Discutir los resultados en sesión plenaria, promoviendo el intercambio.
- Precisar los hallazgos y registrar las conclusiones. Realizar las generalizaciones y correcciones que sean pertinentes.

Conclusiones

La integral definida se introduce usualmente en relación con el problema del área de un trapecio curvilíneo. Las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de este concepto se establecen como consecuencia de su definición como un límite, sin que se tenga que tomar en cuenta la fórmula de Newton−Leibniz.

La fórmula de Newton−Leibniz se introduce en los textos y en el aula muy rápido. Asumir esta tendencia puede implicar un costo en cuanto a la comprensión conceptual.

De la utilización del concepto y sus interpretaciones se obtuvieron procedimientos geométricos que permitieron evaluar varias integrales definidas con un gasto aceptable de tiempo. Los procedimientos descritos se basan en movilizar, junto con las interpretaciones de la integral definida, una serie de conceptos y resultados previos sobre funciones, áreas y volúmenes, traslaciones y otros medios geométricos. Estos recursos son asequibles a los estudiantes en virtud de que se apela en ellos a la intuición y porque pueden ser recuperados y activados como parte del proceso de su utilización. Lo señalado apunta a la importante cuestión de promover la comprensión conceptual, aspecto clave en la formación matemática de los estudiantes.

Finalmente, se conciben actividades con el propósito de propiciar que los estudiantes se involucren de forma consciente y sistemática como sujetos activos de su propio aprendizaje sobre contenidos importantes del cálculo integral de funciones reales de una variable real.

Referencias bibliográficas

Acosta, R. (2010). *Fundamentos para la organización del cálculo integral en un tema único, focalizado en la integral definida*. Recuperado el 12 de septiembre de 2010 de http://www.congreso.rimed.cu/.

Piskunov, N. (1983). *Cálculo diferencial e integral*. Moscú: MIR.

Souto, B. (2009). *Visualización en matemáticas. Un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Complutense de Madrid. España.

Spivak, M. (1974). *Calculus*. La Habana: Pueblo y Educación.

Stewart, J. (2002). *Cálculo con trascendentes tempranas*. La Habana: Félix Varela.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Vygotsky, L. S. (1973) Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. En Luria, Leontiev, Vygotsky y otros. *Psicología y Pedagogía*. Madrid. Akal.