UNA APROXIMACIÓN A LA PRUEBA A TRAVÉS DE LA ARITMÉTICA

Jesús Salinas Herrera, Alexander Maz Machado
Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM México
Departamento de Matemáticas Universidad de Córdoba España
jes54@servidor.unam.mx, ma1mamaa@uco.es

Resumen. Se presentan resultados de un experimento de enseñanza, en el que se utiliza una perspectiva histórica y cultural de las matemáticas. Este experimento se llevó a cabo con alumnos de primer semestre de bachillerato con el propósito de introducirlos en el aspecto deductivo de las matemáticas, a través de la aritmética. Se observa el uso que hacen los estudiantes de diagramas de la aritmética pitagórica y se analiza el tipo de desarrollo cognitivo que muestran.

Palabras clave: historia, cultura, números poligonales, prueba

Abstract. We present the results of a teaching experiment, which uses a historical and cultural perspective of the mathematics. This experiment was carried out by students of the first semester of high school with the intention to introduce them in the deductive aspect of mathematics, through the arithmetic. It is observed the use that they do of the Pythagorean graphs and there is analyzed the type of cognitive development that they show.

Key words: history, culture, polygonal numbers, proof

Introducción

En este documento se reportan los resultados de un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000; Salinas, 2010) que se realizó en un curso regular con alumnos de primer semestre de bachillerato, cuyos contenidos están centrados en la aritmética y el álgebra. El tratamiento histórico aquí, destaca el valor del racionalismo creado por los griegos en las matemáticas. Por medio de este enfoque generamos las condiciones para que los alumnos encuentren interés y pongan en marcha un proceso de validación (Balacheff, 2000)

Se aborda el tema de los números poligonales, el cual fue estudiado por los pitagóricos desde la antigüedad como parte de una temprana teoría de números. Los números poligonales han influido en la construcción de muchos resultados matemáticos a lo largo de la historia (Duke, 1997; Guy, 1994). En el ámbito de la educación matemática existen múltiples trabajos que han abordado el tema de los números poligonales, tanto para reflexionar desde un punto de vista cognitivo como para realizar propuestas de tipo curricular (Andrew, 1990; Norman, 1991; Castro, 1995). Sin embargo, son más abundantes los estudios que relacionan a los números poligonales con el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de inducción.

Problema de Investigación

¿El tratamiento histórico de la noción de número puede contribuir para introducir a los alumnos a la demostración?

Marco teórico

Nuestra perspectiva central es que la interacción entre la historia de las matemáticas y la educación matemática ayuda a construir estrategias que contribuyen al proceso de enseñanza de las matemáticas (Fauvel & Mannen, 2000; Maz-Machado, 1999).

Una manera de conectar con este enfoque es considerar diferentes ámbitos de estudio que se relacionan con el aspecto socio cultural. Así, consideramos la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995), en la cual el proceso de aprendizaje es considerado un proceso de apropiación de los métodos de acción y de representación de una cultura dada (Radford, 1997). En dicha apropiación, los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial en el desarrollo cognitivo, son los recursos simbólicos: signos, símbolos, textos, formulas, medios gráfico-simbólicos que ayudan al individuo a realizar procesos de pensamiento más complejos (Kozulin, 2000). Este experimento de enseñanza se basa en utilizar los diagramas pitagóricos de los números poligonales para realizar una demostración.

Metodología

De acuerdo con nuestro marco teórico, en las actividades se propició la interacción interpersonal de grupos pequeños de personas, fundamentalmente entre parejas de estudiantes. Las intervenciones del profesor-investigador estuvieron orientadas a describir previamente el contexto histórico y cultural en el que se desarrolló la aritmética pitagórica, e hizo énfasis en la relación de las matemáticas con el pensamiento filosófico de los pitagóricos. Las actividades que realizaron los estudiantes fueron de investigación documental para complementar la información sobre los orígenes de la filosofía y la diferencia de la matemática helena con respecto a las antiguas culturas de Egipto y Mesopotamia. En las siguientes sesiones, los estudiantes debían observar e interpretar los diagramas pitagóricos que se representan en la fig. 1, y reconocer los patrones aritméticos y geométricos que les permitieran resolver algunos problemas que adaptamos de la aritmética pitagórica.

La población de estudio

La población observada fue un grupo de 24 alumnos de primer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 12 hombres y 12 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

Procedimiento

Se aplicó una unidad didáctica en la que se realizaron diversas actividades. La duración fue de 6 horas. En dos sesiones de una hora, cada una, el profesor-investigador describió y explicó a los estudiantes algunas ideas centrales del pensamiento numérico de los pitagóricos, en el marco de su contexto cultural (Klein, 1992). Estás fueron esencialmente "la visión del universo físico como un cosmos, como un universo ordenado, en contraposición al caos. Un universo regido por la armonía, por unas leyes asequibles a la razón" (González Urbaneja, 2009, p. 13). Asimismo, la idea de que todo en el universo es número y gracias a los números el universo es inteligible.

Los alumnos complementaron esta información con una investigación documental. En las siguientes dos sesiones, de hora y media cada una, los estudiantes tenían que observar el diagrama de la fig. 1 y resolver los siguientes problemas:

1. Indica los números triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal que siguen a los que están en la tabla; y dibújalos.

2. Indica las series a partir de las cuales se forman los números poligonales que aparecen. Escribe los números poligonales que siguen, hasta los números decagonales. Asimismo, escribe las series que permiten formar dichos números.

3. Dibuja el patrón geométrico que permite construir las figuras de la tabla.

Finalmente, los estudiantes debía probar el siguiente teorema: Probar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

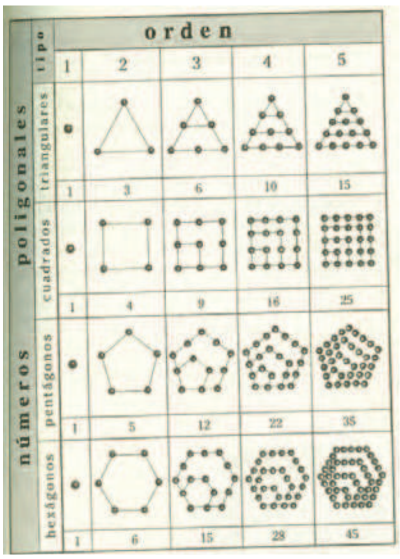

Figura 1. Representación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales. Tomado, de González Urbaneja (2009).

Instrumentos de observación

Los datos que se obtuvieron fueron tomados de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase. Tales datos fueron expresados en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos. En la primera sesión interesó observar si los alumnos interpretan adecuadamente los patrones aritméticos y geométricos del diagrama de la Fig. 1. En la segunda sesión, se observó si los estudiantes establecen conexiones entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones geométrica y la secuencia de desarrollos aritméticos, de los números poligonales; y si aplican estas conexiones para caracterizar otros números poligonales. Finalmente, se observó que hacen estos estudiantes al intentar probar un teorema de la aritmética pitagórica. El análisis de las respuestas a esta actividad es en que se centra este reporte.

Resultados y discusión

En las actividades previas, a la que vamos a analizar, los alumnos manifiestan habilidad para la representación aritmética y geométrica de los números poligonales, incluso no limitadas a los números triangulares y cuadrados. Se observa que reconocen, el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en la fig. 1; vinculan ambos patrones y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en la operatividad o tratamiento del registro de representación aritmético. Las respuestas para probar el enunciado general, tienen diferentes características, las cuales reflejan un distinto desarrollo cognitivo. El mayor número de alumnos, 66.6%, solo responden poniendo dos o tres ejemplos. Dibujan casos de dos números triangulares sucesivos y el número cuadrado resultante.

En la respuesta que se muestra a continuación hay un tratamiento por separado en cada uno de los registros de representación usados, el aritmético y el geométrico. Posteriormente, establecen una correspondencia entre ellos. Así, primero realizan la suma de casos de números triangulares sucesivos y encuentran el resultado, enseguida representan geométricamente los números de las operaciones aritméticas realizadas y muestran que corresponde con un número cuadrado. Las figuras se usan como mera ilustración, no se opera con ellas, no se analizan en partes, etc.

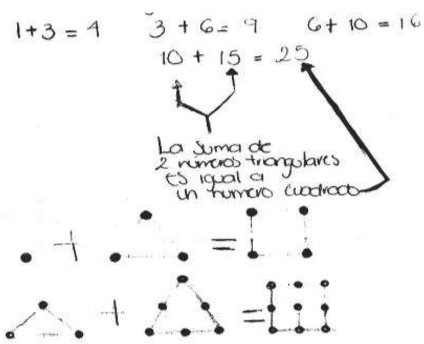

Fig. 2. En esta respuesta los alumnos incorporan otro código, distinguen dos colores uno para los números triangulares y otro para los números cuadrados.

Así, las figuras no proporcionan un soporte intuitivo fundamental, no juegan un papel heurístico para guiar la demostración que se requiere construir. Este modo de validación es el más rudimentario en los procesos de prueba. Se le ha denominado empirismo ingenuo y “consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos” (Balacheff, 2000, p. 26). Otras respuestas, 25% de ellas, muestran indicios, de percibir el carácter general de la tarea. A continuación se muestra dos ejemplos de este tipo de repuesta.

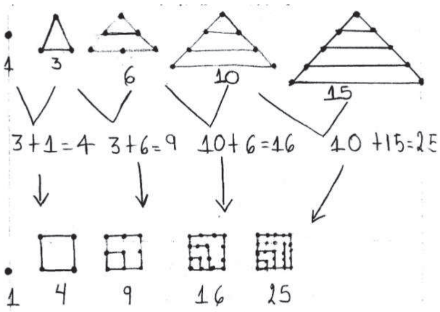

Fig. 3. Otra prueba pragmática.

Análogamente al caso anterior, el papel intuitivo que están jugando las figuras se remite a la mera representación de los números triangulares y cuadrados. Las figuras solo aparecen como dibujos que ilustran que la suma de dos números triangulares da un número cuadrado. Sin embargo, los alumnos no realizan ningún tipo de tratamiento figural. No se muestra ninguna relación geométrica entre los triángulos y cuadrados que están representando a dichas sucesiones de números. Los triángulos y cuadrados aparecen separadamente. De esta manera, es claro que las figuras aparecen como dibujos que no juegan un papel heurístico para guiar a los alumnos en la elaboración de la prueba que se les pide hacer. Este tipo de prueba es ostensiva, como la anterior. “Las operaciones y los conceptos que ésta entraña son ejecutados; no son diferenciados ni articulados, y solamente se presentan para ser observados” (Balacheff, 2000, p. 20). En términos de Balacheff ambas son pruebas pragmática, es decir, aquellas que recurren a la acción o a la ostentación (Balacheff, 2000).

Sin embargo, esta prueba es diferente a la anterior, la prueba que aportan estos alumnos sugiere un proceso inductivo, puesto que las operaciones que realizan parecen indicar que podrían seguirse haciendo indefinidamente. En este sentido es claro que los alumnos se percatan del carácter general del enunciado. Por lo tanto, estas sugieren un tránsito hacia las pruebas intelectuales, puesto que éstas se fundamentan “en la toma de conciencia del carácter general de las situaciones consideradas” (Balacheff, 2000, p. 22). Otras respuesta, que exhibe una rasgo cognitivo diferente es la que tiene un tratamiento figural.

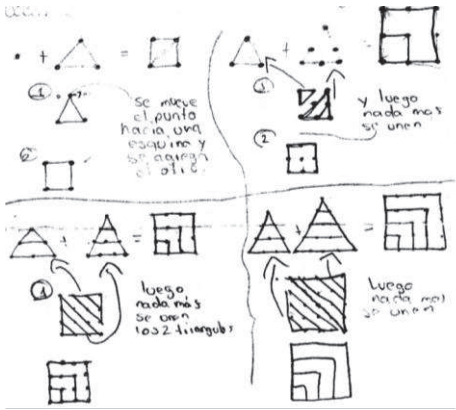

Fig. 4. Esta respuesta muestra habilidad de las alumnas para hacer un tratamiento figural.

En ésta la representación geométrica opera como un apoyo heurístico importante para producir una argumentación que busca validar el enunciado que se quiere demostrar. En este caso, la figura del cuadrado que representa el número poligonal que resulta de dos números triangulares sucesivos, es descompuesto en otras unidades geométricas. Esta respuesta prefigura una habilidad necesaria para la realización de una prueba intelectual.

Finalmente, encontramos una respuesta en la cual los alumnos muestran una reconfiguración de la figura, análoga a la comentada anteriormente, pero además hacen explícita la distinción entre diferentes ámbitos matemáticos y sus respectivos registros de representación.

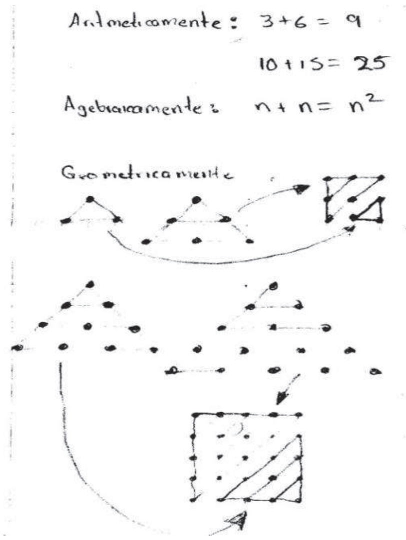

Fig.5. En esta respuesta se usan formulaciones de propiedades y sus relaciones.

Los alumnos intentan probar la verdad del teorema en cuestión utilizando algebra, pero de manera errónea. No manejan bien el lenguaje algebraico, para expresar que la suma de dos números sucesivos que tienen la propiedad de ser triangulares da como resultado un número cuadrado. Sin embargo, por la intensión, podemos decir que ésta es un tipo de prueba que muestra indicios de la que Balacheff denomina intelectual, es decir, “pruebas que separándose de la acción, se apoya en formulaciones de las propiedades en juego y sus relaciones." (Balacheff, 2000, p. 22).

Conclusiones

En general, para probar un resultado matemático, los estudiantes tienen una idea inductiva característica de las ciencias experimentales, que para el caso de las matemáticas confunde dos procesos distintos: la construcción del conocimiento y la prueba de su verdad. Esta situación requiere de un tratamiento explícito de parte del profesor.

Es importante señalar que en algunos alumnos aparecen indicios de desarrollo cognitivo que apunta a separarse de las pruebas pragmáticas, basadas en la ostentación. Así, el experimento de enseñanza permitió observar diferente desarrollo cognitivo en los alumnos para la realización de pruebas y en consecuencia abre la posibilidad de indagar que medios pueden ser utilizados para provocar el desarrollo cognitivo deseado.

El tratamiento geométrico que realizan algunos estudiantes para probar el teorema en cuestión, sugiere la conveniencia de indagar si esta habilidad está relacionada con cierto desarrollo cognitivo provocado o estimulado por el uso del diagrama de la figura 1.

Considerando que el experimento de enseñanza se realiza con alumnos que en el siguiente semestre abordaran temas de geometría euclidiana, los resultados obtenidos hacen recomendable abordar este tipo de problemas para introducir gradualmente a los alumnos al aspecto deductivo de la matemática, previamente al curso de geometría.

Referencias bibliográficas

Andrew, P. (1990). Generalising number patterns. *Mathematics in School.* pp. 9-13

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Edit. Comares.

Duke, W. (1997). Some old problems and new results about quadratic forms. *Notices of the AMS 44 (2),* 190-196.

Fauvel, J. & Mannen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education:* the ICMI study, Dordreght: Kluwer Academic Publisher.

González Urbaneja, P. M. (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola.

Guy, R. K. (1994). Every number is expressible as a sum of how many polygonal numbers?, *Amer. Math. Monthly 101*,169-172.

Klein, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I*. Madrid: Alianza Editorial.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Maz-Machado, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? Y ¿para qué? En Berenger, Mª. I.; Cardeñoso, J. Mª. y Toquero M. (Eds.)(1999). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la matemática.

Norman, F. A. (1991). Figurate Numbers in the classroom. *Arithmetic Teacher38(7),* 42-45

Radford, L. (1997). L`invention d`une idée mathematique: la deuxieme inconnue en algebra. *Repères, Revue des IREMs **28*** (july), 81-96

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* 557-568. Lleida: SEIEM.

Steffe, L. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.