LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AGRONÓMICA. LOGROS Y DIFICULTADES

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar; aengler@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen. Ante la necesidad de la búsqueda de elementos que permitan al alumno la construcción activa del conocimiento, decidimos abordar el estudio de uno de los conceptos del cálculo, la derivada. Nos propusimos estudiar las nociones que construyen los alumnos cuando interactúan con actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven el manejo de diversos sistemas de representación.

Diseñamos e implementamos una secuencia de actividades para la introducción de la derivada. Con la finalidad de aportar datos a la valoración de la experiencia, preparamos una serie de preguntas que fueron incluidas en el examen parcial con el que debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia.

En este trabajo presentamos algunas de esas preguntas, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas de los estudiantes.

Palabras clave: pensamiento variacional, derivada, representaciones

Abstract. Given the need to look for elements that allow students to actively construct knowledge, we have decided to approach the study of one of the concepts of calculus, the derivative. We proposed to study the notions that students construct as they interact with activities articulated around the idea of variation and change, promoting the management of various systems of representation.

We've designed and implemented a sequence of activities for the introduction of the derivate. In order to provide data to the valoration of the experience, we prepared a serie of questions that where included in the mid term exam, in wich the contents developed with the sequence, were to be evaluated, among other things.

In this work we have shown some of this questions, a brief analysis of them and a study, essentially qualitative, of the students' responses

Key words: variational thinking, derivative, representations

Introducción

El cálculo es la matemática de la variación y el cambio. Esto lo convierte en necesario para modelar, explicar, predecir y cuantificar el movimiento. Sin embargo, en el sistema educativo actual, en general se ha perdido este enfoque y se han priorizado procesos de construcción y validación formales así como sus aspectos algorítmicos. Es común que el conocimiento se trate fuera de los contextos apropiados, presentando a los alumnos problemas estereotipados, desvinculados generalmente de la realidad. Esto potencia las dificultades, especialmente en el caso de carreras donde la mayoría de los estudiantes van a ser usuarios de la matemática y no matemáticos de profesión.

Toda esta situación se refleja en que, aunque aprueban los cursos de cálculo, no comprenden de manera satisfactoria los conceptos y no desarrollan adecuadamente los métodos de pensamiento propios de esta rama de la matemática, de manera de poder afrontar más adelante la solución de problemas de áreas específicas de sus carreras.

Ante la necesidad de la búsqueda de elementos que puedan hacer significativo el aprendizaje y permitan al alumno la construcción activa del conocimiento, decidimos abordar el estudio de una de las nociones básicas del cálculo diferencial, la derivada.

Numerosas investigaciones realizadas en el marco de la educación matemática señalan la importancia del desarrollo de ideas variacionales para la comprensión de este concepto.

> "Estudiar qué es lo que varía -y cómo- en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, hecho al cual se suele limitar su enseñanza" (Buendía y Ordóñez, 2009, p. 8).

Enmarcamos nuestro trabajo en la línea del pensamiento y lenguaje variacional, que se interesa específicamente por los procesos del pensamiento que inciden en el estudio de la matemática del cambio.

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003, p. 185).

Como marco de referencia para el análisis de los procesos cognitivos que se involucran en el pensamiento matemático consideramos la teoría de los registros semióticos de Duval (1998, 2008). Dado que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos, es fundamental el papel que juegan las representaciones en la construcción de conocimiento matemático.

El autor señala que la comprensión integral de un objeto está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación pertenecientes a registros diferentes. Manifiesta que llegar a adquirir conceptualmente un objeto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos.

En este contexto, nos propusimos indagar las nociones, relacionadas a la derivada, que construyen los estudiantes cuando se formulan actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven la utilización de diversos sistemas de representación.

Aspectos metodológicos

Diseñamos e implementamos una secuencia de actividades para la introducción de la derivada. No pretendimos un estudio teórico riguroso sino una presentación simple e intuitiva que tenga en cuenta las tres nociones físicas fundamentales: la variación, la razón de cambio media y la razón de cambio instantánea, y que explore la relación de estas últimas con la medida de la pendiente. La idea fue, siguiendo a Dolores (2007, p. 198):

> ...ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.

La secuencia se llevó al aula con todos los alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Los mismos ya habían aprobado o regularizado Matemática I, asignatura en la cual se desarrollan ampliamente los contenidos correspondientes a funciones.

Las observaciones de clase, el análisis de hojas de trabajo de los alumnos, el desarrollo de entrevistas nos permitieron analizar las producciones de los alumnos y estudiar las nociones que pusieron en juego al encarar las distintas situaciones. Con la finalidad de obtener más datos que aporten a la valoración de la experiencia, preparamos una serie de preguntas que fueron incluidas en el examen parcial con el que debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia.

Las preguntas se diseñaron para explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos. Específicamente indagamos sobre el comportamiento variacional de las funciones relacionado a la noción de derivada. Pretendimos además identificar el tratamiento en los registros de representación verbal, numérico, gráfico y analítico, así como si existen rasgos de conversión entre ellos.

Algunos resultados obtenidos

Por razones de extensión mostramos sólo algunas actividades, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas dadas por 26 alumnos (de los cuales 16 resolvieron el tema I y 10 el tema II). Analizamos especialmente los aspectos concernientes a la interpretación física y geométrica de la derivada.

La derivada y su interpretación física

Pregunta 3 – TEMA I

Una epidemia azota a los habitantes de una ciudad y los médicos estiman que la cantidad de personas enfermas t días después del principio de la epidemia está dada por e(t).

i) Explique el significado de e(30) = 2700 y e' (30) = 90 en términos de la situación planteada.
ii) ¿Por qué es significativo el signo de e' (30)?

A partir de una situación de cambio presentada en los registros verbal y analítico se pretende analizar qué conocen los alumnos respecto de la información que proporciona la derivada acerca de la función. La descripción verbal y escrita de los significados implica un acercamiento cualitativo al fenómeno, que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones con respecto a lo que sucederá con los elementos involucrados con el transcurso del tiempo. Esperamos que, en las respuestas, los alumnos utilicen argumentos relacionados al significado de la derivada en el problema, en específico a cómo está creciendo la cantidad de personas enfermas en determinado momento. Pretendemos además determinar si realizan el tratamiento en los registros planteados o si convierten al gráfico.

Con respecto a e'(30) = 90, el 50% de los alumnos dio una respuesta aproximada. Uno de ellos escribió: *"A los 30 días de iniciada la epidemia la enfermedad se está propagando a razón de 90 personas por día"*.

Seis alumnos (37,5%) respondieron incorrectamente. Cinco de ellos confundieron el valor de la derivada con la imagen de la función en dicho punto. Uno expresó: "*La cantidad de personas enfermas a los 30 días es 90"*.

En relación al significado del signo de la derivada, seis alumnos (37,5%) se acercaron a la respuesta. Uno escribió: *"El signo muestra que la cantidad de personas enfermas está aumentando ya que es positivo"*.

Ocho alumnos (50%) dieron respuestas incorrectas.

Tres de ellos confundieron la interpretación del signo de la derivada con el crecimiento de la velocidad, o sea de la función derivada. Una de las respuestas fue: *"La derivada es positiva porque la velocidad con que se están enfermando las personas está creciendo"*.

Destacamos que, a pesar de las dificultades observadas, la mayoría intentó referirse al enunciado del problema, utilizando términos variacionales que describen el fenómeno. Todos los alumnos explicaron verbalmente, utilizando algunos la misma simbología presentada en el enunciado de la pregunta.

Pregunta 3 – TEMA II

Para combatir el smog, una compañía liberará en la atmósfera desde las 0 horas y durante un período de 12 horas diarias, cierta cantidad de toneladas de una sustancia química dada por la función $s(x) = 0{,}2x^2 + 2x$.

a) ¿Cuántas toneladas de la sustancia química habrá en la atmósfera desde que se empieza a liberar hasta dos horas después?

b) Determine $\dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \dfrac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$ si $x_0 = 0$ y $\Delta x = 2$. ¿Cuál es el significado de esta cantidad en términos del problema?

c) Calcule $\dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \dfrac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$. ¿Cuál es el significado de lo obtenido en términos del problema? ¿Cómo lo interpreta geométricamente?

d) Calcule $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$. ¿Cuál es el significado de lo obtenido en términos del problema? ¿Cómo lo interpreta geométricamente?

e) ¿Qué concepto aplicó en el inciso anterior? ¿Cómo lo escribe simbólicamente?

Esta actividad se relaciona con la cuantificación de los cambios. Las diferencias permiten cuantificar los cambios de las variables, la razón de cambio promedio proporciona una aproximación a la rapidez de la variación, mientras que la razón de cambio instantánea permite la cuantificación exacta de la rapidez con que cambia una variable con respecto a la otra en cualquier instante y está asociada a la derivada de la función en un punto.

En general, los alumnos hicieron un tratamiento aceptable en el registro algebraico. Las mayores dificultades se detectaron en la interpretación de los resultados. En particular en el inciso d), todos hicieron el planteo del límite, mientras que sólo la mitad llegó al resultado correcto. Con respecto al significado, esperábamos que expresen de alguna manera que lo obtenido representa cuánto está cambiando la cantidad de sustancia con respecto al tiempo en $x = x_0$. Sólo dos alumnos (20%) interpretaron aceptablemente, aunque uno solo se refirió al fenómeno planteado. Tres alumnos (30%) relacionaron el límite con la cantidad de sustancia en un instante. Presentamos la respuesta de un alumno (Figura 1).

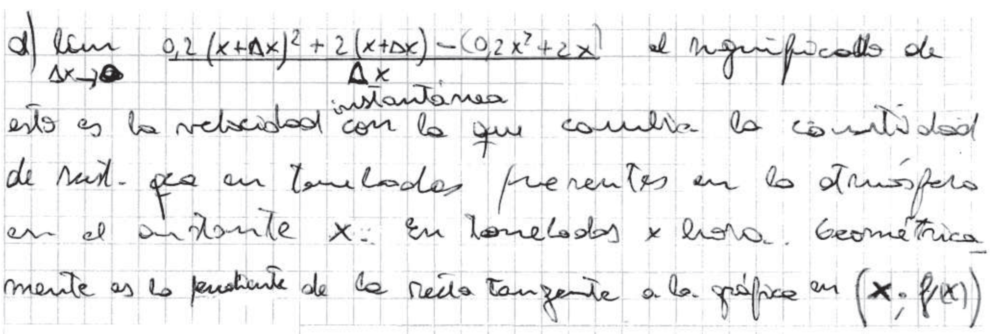
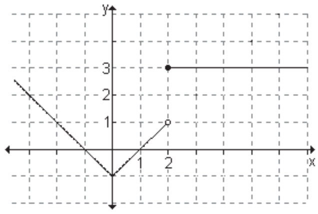

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0{,}2(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - (0{,}2x^2+2x)}{\Delta x}$ el significado de esto es la velocidad instantánea con la que cambia la cantidad de sust. q.a en toneladas presentes en la atmósfera en el instante x. En toneladas x hora. Geométricamente es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en (x; f(x))

Figura 1

La derivada y su interpretación geométrica

> Pregunta 2- TEMA I
> Dada la función y = f(x) definida gráficamente, determine la derivada en x = −2 y x = 4. Explique cómo obtiene.



En esta pregunta esperábamos que los alumnos usen el mismo registro gráfico para explicar, recurriendo al comportamiento variacional de la función dada.

Sólo dos alumnos parecen haber trabajado de esa manera, relacionando la derivada con la pendiente de la gráfica en el punto. Ambos realizaron igualmente los cálculos de las pendientes. Esto no era necesario, ya que el segundo tramo es una función constante y para el primero está marcado el cuadriculado que permite fácilmente determinarla. Además cometieron errores. Mostramos un trabajo (Figura 2).

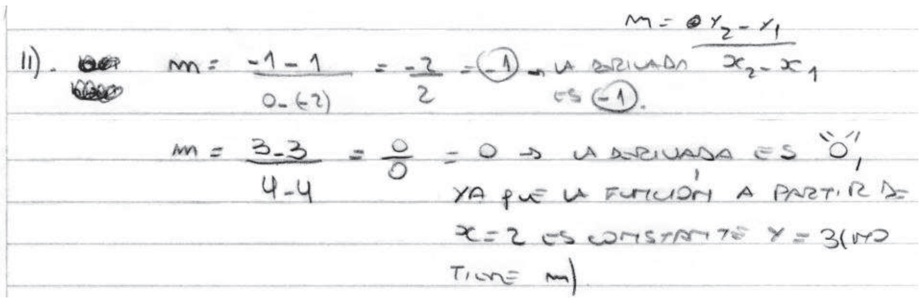


Figura 2

La mayoría (11 alumnos, o sea el 68, 75%) convirtió al registro algebraico para trabajar. Determinaron la ley de la función y calcularon la derivada en los valores pedidos.

No consideramos que no conocieran (por lo menos todos los alumnos) la relación con el comportamiento variacional de esta función, sino que les resulta más sencillo trabajar analíticamente o bien se sienten más cómodos o seguros justificando en este contexto.

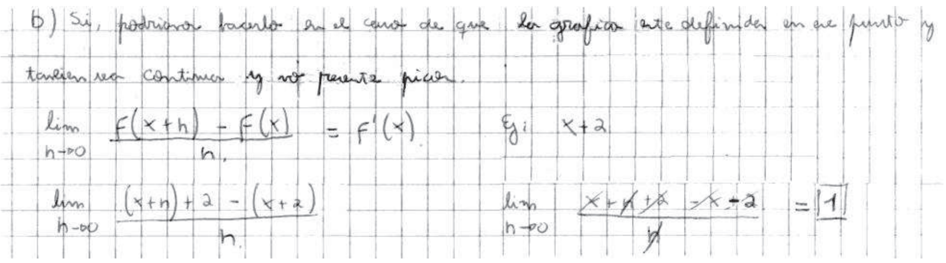
> Pregunta 5 – TEMA I
> Disponemos de la representación gráfica de una función f y nos piden que calculemos la derivada de f en un punto, ¿podríamos hacerlo? En caso afirmativo, explique cómo lo haría y muestre con un ejemplo.

La pregunta indaga acerca de la interpretación geométrica de la derivada en un punto como la pendiente de la tangente a la gráfica en dicho punto. Esperábamos que los alumnos realicen el tratamiento verbal de la situación o conviertan al registro gráfico.

Tres alumnos trabajaron de esa manera y mostraron mucha claridad en sus explicaciones y ejemplos. Aprovecharon el cuadriculado de la hoja para determinar fácilmente la pendiente o graficaron una recta de pendiente cero y asociaron estos valores a la derivada. Esto nos muestra cómo relacionan la pendiente de la recta tangente con la dirección de la curva en un determinado punto y con la manera en que va cambiando la misma, aspecto fundamental desde el punto de vista variacional.

Las respuestas de otros dos alumnos fueron incorrectas, aunque mostraron tener conocimiento de la relación de la derivada con la recta tangente en un caso y con una pendiente en el otro e intentaron responder en el registro gráfico.

Casi el 50 % convirtió al registro analítico. Mostramos el trabajo de un alumno (Figura 3).


b) Sí, podríamos hacerlo en el caso de que la gráfica este definida en ese punto y tambien sea continua y no presente picos.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ Ej: $x+2$

$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)+2-(x+2)}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{h}+\cancel{2}-\cancel{x}-\cancel{2}}{\cancel{h}} = \boxed{1}$

Figura 3

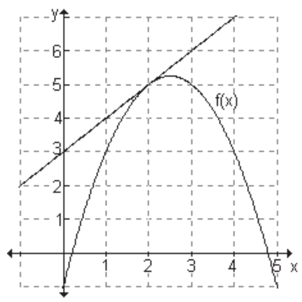
Pregunta 1 – TEMA II

¿Cuál es el valor de f ' (2)? Explique.

i) f ' (2) = 5 ii) f ' (2) = 3

iii) f ' (2) = –1 iv) f ' (2) = 1

v) f ' (2) = 3/5 vi) Otro: ....



En esta actividad, de opción múltiple, se presenta la representación gráfica de una función y la recta tangente en determinado valor del dominio. Se solicita el valor de la derivada en dicho punto. La respuesta implica dos actividades fundamentales. La primera y más importante, la correlación entre la derivada y la pendiente de la recta tangente. La otra, la obtención de la pendiente a partir del gráfico dado.

Como señalamos en la actividad anterior, para que el concepto de pendiente contribuya a la formación del pensamiento variacional, debe procurarse la comprensión de su estrecha relación con la razón de cambio. La conceptualización de la pendiente a partir de la razón de cambio entre los incrementos de magnitudes posibilitará, posteriormente, la comprensión del proceso aproximativo que subyace a la construcción de la derivada.

Está planteada en el registro gráfico y esperábamos que los alumnos puedan responderla realizando el tratamiento en este mismo registro. Cinco alumnos (50%) respondieron y explicaron correctamente. Sólo tres explicaron verbalmente a partir de lo que observaron en la gráfica. Los otros dos apoyaron su justificación determinando la ecuación de la recta (convirtieron al registro analítico). Mostramos una de las respuestas (Figura 4).

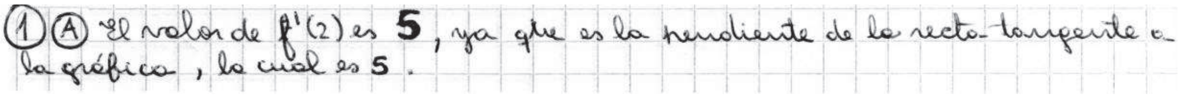


Figura 4

Cuatro alumnos seleccionaron la primera opción. Dos de ellos mostraron conocer la interpretación geométrica de la derivada, pero no la pudieron utilizar en el registro planteado. Los otros dos tuvieron más dificultades, relacionaron con la recta tangente pero no específicamente con la pendiente. Un alumno no respondió.

Análisis global de los resultados y reflexiones

Haciendo una revisión general de las actividades de los dos temas, notamos resultados dispares en las distintas actividades.

Las preguntas 3 del tema I y 3d) del tema II están planteadas en un contexto físico, esperando que los alumnos relacionen la derivada con la velocidad instantánea. En la primera de las actividades, el 50% dio una respuesta aceptable, mientras que en la otra, sólo el 20% interpretó como una razón de cambio instantánea y la mitad de ellos relacionó con el problema. Les costó reconocer y analizar el significado de la expresión analítica.

Las preguntas 2, 5 del tema I y 1 del tema II están diseñadas para explorar la correspondencia que los alumnos pudieran establecer entre la derivada y algún aspecto relacionado con la interpretación geométrica.

En la pregunta 2 del tema I, los alumnos podían dar la respuesta directamente en el registro gráfico, observando el comportamiento variacional de la función. En ambos tramos de la función el crecimiento es constante, por lo que la razón de cambio es la misma en cualquier intervalo y en cualquier punto.

Sólo dos alumnos (12,5%) intentaron trabajar con la pendiente, aunque tuvieron dificultades. Casi el 70% convirtió al registro analítico, determinando la ley de la función y obteniendo la derivada por definición o reglas prácticas. El 43,75% lo hizo correctamente.

En la pregunta 5 del mismo tema se explora la determinación de la derivada en el registro gráfico. Esto exige relacionarla con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Sólo el 18,75% explicó correctamente trabajando en este registro. Varios alumnos expresaron que obtendrían la ley de la función graficada y a partir de ahí con definición o reglas calcularían la derivada.

En la pregunta 1 del tema II, el 50% de los alumnos relacionó la expresión obtenida con la pendiente de la tangente. Notamos que sólo el 30% explicó verbalmente según lo observado en el gráfico. Los demás buscaron la ecuación de la recta o determinar su pendiente.

Consideramos que estos resultados confirman lo reportado por otras investigaciones (Cantoral y otros, 2003). Los alumnos están más acostumbrados a utilizar procedimientos analíticos y algorítmicos, dejando de lado los argumentos visuales, que además, son de mayor dificultad cognitiva. Creen que estos aspectos son los esenciales y de esa manera trabajan también en las evaluaciones.

A pesar de las dificultades, los resultados obtenidos nos manifiestan que los alumnos han logrado avances importantes, en el sentido de llegar a construir una noción de derivada con significado. Mostraron una evolución positiva en la comprensión de las nociones y de las interpretaciones de las mismas en diferentes registros. En distintos momentos utilizaron estrategias de trabajo que implican el uso del pensamiento y lenguaje variacional.

Los avances se observaron de manera significativa en el desarrollo de los temas posteriores. Pudimos observar claramente cómo los alumnos lograron asociar la derivada con la variación, dejando de lado un tratamiento abstracto y estático, avanzando mucho más allá de la asociación de la derivada con un límite.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación.En R.M. Fárfan, J. Lezama y E. Oaxaca (Eds.), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 7-28.

Cantoral, R.; Farfán, R; Cordero F.; Alanís, J.; Rodríguez R. y Garza A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 169-204). México: Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, historicity, classroom, and culture* (pp. 39-62). Rotterdam: Sense Publishers.