LA GESTIÓN METACOGNITIVA EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y SU RELACIÓN CON LA COMPETENCIA DEL RESOLUTOR

Álvaro Encinas, Ramiro Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
aencinasb@uabc.edu.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se presenta un estudio sobre la actividad de gestión metacognitiva desarrollada por estudiantes de ingeniería con el fin de resolver problemas de optimización. El análisis de las prácticas de los estudiantes se hace con base en las nociones de objetos y procesos matemáticos del Enfoque Ontológico-Semiótico (EOS) de J. D. Godino así como algunas nociones referentes a los procesos metacognitivos y competencia para resolver problemas. Problemas de Optimización de textos escolares se aplicaron a estudiantes de Cálculo en la Universidad Autónoma de Baja California, México. Se les solicitó que escribieran sus respuestas y, simultáneamente, externaran en voz alta sus pensamientos, lo que estaban pensando, esto se grabó y transcribió. El análisis se efectuó sobre esas respuestas y transcripciones, evidenciando diversos obstáculos en el proceso y estilos distintos de gestión metacognitiva.

Palabras clave: gestión metacognitiva, resolución de problemas, competencia

Abstract. We present a study on metacognitive management activities developed by students engineering to solve optimization problems. The analysis of the practices of students is based on the notions of mathematical objects and processes from Ontological-Semiotic Aproach (EOS) of J.D. Godino and some notions concerning metacognitive processes and competence to solve problems. Optimization problems textbooks were applied to Calculus students at the Autonomous University of Baja California, Mexico. They were asked to write their answers and simultaneously, express their thoughts aloud what they were thinking, this was recorded and transcribed. The analysis was performed on these answers and transcripts, showing various obstacles in the process and different styles of management metacognitive.

Key words: metacognitive management, problem solving, competence

Introducción

A lo largo de su formación, los estudiantes de ingeniería estudian los procesos de optimización en diferentes contextos y con distintas técnicas. Sin embargo, cuando tratan de resolver problemas de optimización en sus cursos de Cálculo, muestran un bajo desempeño. Éste se pone de manifiesto en tres aspectos básicos del proceso de resolución de problemas: 1) en los significados que asignan a los objetos matemáticos que utilizan, 2) en el plan que desarrollan al tratar de resolver los problemas y 3) en el nivel de conciencia que muestran de las ineficiencias de su propio plan de resolución.

Existen diversos estudios sobre la resolución de problemas de optimización, entre otros, (Contrerasy Luque, 2004; Malaspina, 2007) los cuales la abordan desde diferentes marcos teóricos. Gusmao, Font y Carajaville (2009) introducen en su análisis de resolución de problemas, además de los significados de los objetos matemáticos, algunos elementos metacognitivos.

En este trabajo se presenta un estudio sobre las prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes de ingeniería al tratar de resolver problemas de optimización. Se identifican objetos y procesos matemáticos así como elementos de gestión metacognitiva que aparecen en el proceso de resolución de los problemas. El propósito de esta investigación es mejorar la comprensión de los procesos a través de los cuales los estudiantes intentan resolver problemas matemáticos. Se parte de la premisa de que, en la medida en que se entiendan estos procesos, se podrán proponer cambios en los procesos de instrucción que aumenten la eficacia con que los estudiantes resuelven dichos problemas.

Referentes teóricos

El estudio de las respuestas de estudiantes ante problemas de optimización se realizó con varias herramientas proporcionadas principalmente por el Enfoque Ontológico Semiótico (EOS) (Godino, 2003; Font y Rubio, 2008; Font, Planas y Godino, 2010), y por otros referentes teóricos (González, 1999), (Gusmao, Font y Cajaraville, 2009, (Flavell y Wellman, 1977) y (Schoenfeld, 1992).En este trabajo, se utiliza una metodología de análisis de las prácticas de resolución de problemas que parte de la identificación de los objetos y de los procesos matemáticos que intervienen y los procesos metacognitivos del resolutor, para tratar de explicar el papel que juegan éstos en el nivel de competencia que tiene dicho resolutor. En esta investigación, esta metodología se aplica al caso de la resolución de problemas de optimización.

A continuación se presentan los elementos teóricos involucrados en el análisis.

El conjunto de actividades realizadas por un *sujeto* para resolver un problema constituye un *sistema de prácticas.* De los sistemas de prácticas que un sujeto (persona) utiliza para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas emergen los *objetos matemáticos* (personales). Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados que ese sujeto tiene de tales objetos. La diversidad de objetos matemáticos puede relacionarse con alguno o algunos de los siguientes seis tipos de objetos primarios (Godino, 2003):

- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- Situaciones problemáticas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.
- Conceptos- definición: introducidos mediante definiciones o descripciones
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos

- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

La actividad matemática tiene su origen o razón de ser en las *situaciones problemáticas*. Los restantes objetos matemáticos se representan a través del lenguaje; los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los *conceptos* entre sí. A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales y teorías, entre otras.

Interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Font y Rubio, 2008).

La resolución de problemas puede ser considerada como un "megaproceso" matemático ya que implica configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios tales como el establecimiento de conexiones entre los objetos y la generalización de técnicas, reglas y justificaciones.

La realización efectiva de los procesos de resolución de problemas requiere, además, la ejecución de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos metacognitivos (Flavell y Wellman, 1977), (González, 1999), (Gusmao, Font y Cajaraville, 2009) y (Schoenfeld, 1992).

La gestión del proceso de resolución de problemas a cargo de un resolutor es un aspecto muy importante del mismo proceso. La comprensión del enunciado, la selección de estrategias para abordar el problema, el monitoreo del progreso de la resolución y su evaluación se consideran parte de la actividad metacognitiva.

La noción de competencia se considera, en este trabajo, íntimamente asociada a las acciones del sujeto resolutor que le permiten tener éxito en el proceso de resolución de problemas y se reconoce que dicha competencia requiere de la integración de conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para la ejecución de las tareas surgidas en el proceso de resolución de los problemas (Argudín, 2007) y (Villa y Poblete, 2008).

Metodología de la Investigación

El procedimiento utilizado para la toma de datos consistió, primero, en seleccionar seis problemas propuestos en el libro de texto de Louis Leithold (1998) utilizado en la Facultad de Ingeniería Campus Mexicali (FIM) de la Universidad Autónoma de Baja California, México. Dichos problemas se seleccionaron utilizando dos criterios: que correspondieran a diferentes contextos y que se modelaran con diferentes tipos de funciones elementales.

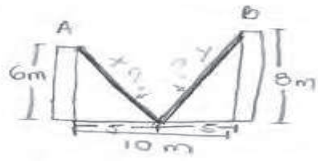
Luego se seleccionaron diez de los estudiantes considerados, por sus profesores, exitosos en el tema de optimización del curso de Cálculo que aceptaron participar en la investigación al invitarlos. A estos estudiantes se les indicó que, al resolver el problema, escribieran su respuesta en una hoja proporcionada para ello y, además, se les pidió que externaran en voz alta sus pensamientos durante la resolución del problema y se les informó que su voz se grabaría.

El análisis de los datos recabados se efectuó en dos etapas. En la primera, se analizó lo escrito por los estudiantes al tratar de resolver el problema y se identificaron los objetos y procesos que intervinieron en su práctica de acuerdo al EOS. En la segunda etapa, se analizaron las transcripciones de las grabaciones recabadas cuidando de registrar los tiempos de avance del proceso. Este análisis se hizo con el fin de identificar los diversos procesos de la gestión metacognitiva y elementos de la competencia.

Resultados y su análisis

Para ilustrar el tipo de análisis realizado se presenta el caso de la alumna N, a la que se le aplicó el siguiente problema: "Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste". Como puede verse, se trata de un problema clásico de un curso de Cálculo Diferencial, formulado en un contexto geométrico que se modela con una función radical.

A continuación se presenta una parte de la respuesta escrita por la alumna N seguida de una pequeña parte de la transcripción de lo exteriorizado verbalmente al estar tratando de resolver el problema; inmediatamente después se presentan los resultados y comentarios del análisis que el investigador hizo de lo escrito y hablado por la alumna:



Poste "A" → 6m
Poste "B" → 8m
d $P_A P_B$ → 10m

hip = $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = C^2 = a^2 + b^2$

* Para Longitud del cable desde el Poste "A" hasta el centro de los dos Postes:

hip = $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = L = \frac{6m}{5m} = 1.2m$

* Para longitud del cable desde el Poste "B" hasta el centro de los dos postes:

hip = $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = L = \frac{8m}{5m} = 1.6m$

→ Entonces:

$C^2 = a^2 + b^2$ → sustituyendo:

$C^2 = (1.2)^2 + (1.6)^2$

$C^2 = 1.44 + 2.56$

$C^2 = 4$

$C = \sqrt{4}$

$C = \pm 2 \therefore C_1 = 2$ y $\cancel{C_2 = -2}$

Posible solución

ó

$L_T = L_1 + L_2$

$L_T = 1.2m + 1.6m$

$L_T = 2.8m$

Posible solución

Respuesta escrita:

Transcripción de lo expresado oralmente por la alumna N, a partir del instante 01:20 minutos del inicio del proceso de resolución del problema:

"*01:20 …¡ah! lo voy a leer otra vez para entenderlo mejor… dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente, se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de diez metros, calcule la longitud mínima… de un cable… mínima de un cable que puede ir desde la punta de unos de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes; o sea las bases y luego hasta la punta del otro,… bien, a la punta del otro,… ok… o sea* desde la punta del poste A *hasta en medio de los dos* postes *Lo primero que voy a hacer va a ser un dibujo que me muestre los dos postes,…ok… aquí está un poste y a una distancia de diez metros en el suelo está el otro poste,…ok… uno mide ocho y uno mide seis metros. ok…pues si se forman triángulos está diciendo que es entre los dos postes entonces la mitad van a ser* 5…*la fórmula para… cómo es… bueno me voy a fijar en los apuntes del cuaderno, creo que es la fórmula de la hipotenusa…ok…*"

a) Los objetos matemáticos más relevantes identificados:

❖ Lenguaje

- Verbal: términos precisos: longitud, distancia, opuesto, adyacente, hipotenusa. Otros términos: Poste, cable, "centro de los dos postes", "en medio de los dos postes".
- Gráfico: dibuja un poste A de altura 6 m y de la punta sale un cable hacia el centro de las bases de los dos postes y de allí hacia la punta del poste B de 8 m.
- Simbólico: A,B, $d\overline{P_A P_B}$, $c^2 = a^2 + b^2$, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

❖ Conceptos explícitos: longitud, triángulo rectángulo, suma, raíz cuadrada, hipotenusa, opuesto, adyacente.

❖ Procedimientos explícitos: calcular raíz cuadrada (con calculadora), estimar longitudes, sumar, multiplicar, dividir, elevar al cuadrado.

❖ Proposiciones: teorema de Pitágoras, la longitud es aditiva.

❖ Argumentos: asegura que sí existe una longitud mínima del cable y la encuentra, la longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto a la mitad de las bases.

b) Algunos de los procesos identificados y algunos comentarios sobre los mismos:

❖ El problema se presenta a la alumna a través de un texto que debe interpretar (proceso de comunicación). La alumna muestra una competencia interpretativa pobre al interpretar que *estar entre* significa *estar en el punto medio*, lo cual puede verse en el proceso de representación gráfica que hace del enunciado y en lo que expresa oralmente. Este error en la interpretación del enunciado del problema tuvo repercusiones graves en la interpretación global del mismo pues no logró darse cuenta que se trata de un problema de optimización, lo que a su vez originó que la estrategia diseñada para la resolución del mismo no fuera la adecuada.

❖ El proceso de modelación matemática del problema resultó incorrecto, no sólo por la interpretación errónea del texto, sino también por significaciones incorrectas de los objetos matemáticos intervinientes (obsérvense las fórmulas que utiliza para calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo).

❖ En lo que respecta al proceso comunicativo, también mostró ser poco competente para elaborar un texto para comunicar y justificar los procedimientos utilizados en la resolución del problema, así como el resultado.

Después de 32:42 minutos de iniciado el proceso de resolución del problema por parte de la alumna, el investigador se hizo presente y entabló un diálogo con ella, sobre la interpretación que hizo de la expresión "*estar entre*" logrando que tomara conciencia de lo que realmente planteaba el problema e intentara resolverlo bajo esta nueva interpretación.

c) El análisis de la transcripción de lo expresado oralmente por la alumna permitió identificar varios procesos metacognitivos y los recursos utilizados para llevarlos a cabo. Algunos de estos procesos son los siguientes:

- ❖ El primer proceso metacognitivo detectado es el desarrollado para tratar de entender el problema y los recursos utilizados para ello, son: *leer varias veces el enunciado del problema, hacer un dibujo de los postes y el cable*.
- ❖ Cuando concluye que ya ha comprendido el problema, se pone de manifiesto un segundo proceso metacognitivo cuyo propósito es la elaboración de un plan o estrategia de resolución, en este caso, el primer recurso utilizado por la alumna, fue *tratar de recordar la fórmula* necesaria y, al no conseguirlo, echó mano de otro recurso, *la consulta de un libro de texto y de sus notas de clase*.
- ❖ Un tercer proceso metacognitivo es el de supervisión evidenciado con expresiones tales como "*se me hace muy poca distancia*", "*voy a leer a ver qué tan mal ando fijándome en el libro*". En la acción regulativa, la resolutora identifica donde se ha equivocado (según ella) y corrige en dos ocasiones el rumbo del proceso al seleccionar nuevas estrategias (fórmulas) para resolver el problema. Finalmente, evalúa las soluciones obtenidas decidiendo por una respuesta que no está ligada a la resolución correcta de un problema de optimización.

Comentarios generales

El análisis del desempeño de los estudiantes participantes en la investigación permite afirmar que existe una estrecha relación entre las significaciones que se tienen de los objetos y procesos matemáticos intervinientes, el nivel de desarrollo de las habilidades intelectuales que se ponen en juego al desarrollar tanto los procesos matemáticos como los metacognitivos, así como las actitudes que se muestran al estar tratando de resolver el problema y el nivel de competencia del resolutor.

Se ha encontrado que estudiantes de ingeniería de la FIM, considerados exitosos por sus profesores de Cálculo, muestran bajo nivel de competencia cuando pretenden resolver un problema de optimización de manera independiente, sin el apoyo del profesor. Este bajo nivel se observa en prácticamente cada una de las etapas del proceso, así como en el desarrollo de cada uno de los subprocesos como son: modelar, planear, supervisar, regular y verificar. La excepción se observa en la etapa del procedimiento algebraico el cual es ejecutado de mejor manera.

El diálogo que el investigador entabló con cada estudiante, después de que éste manifestaba haber terminado de resolver el problema, permitió observar que es factible desencadenar en

él, un proceso de valoración de la manera en que procedió, a la vez que evocar, rápidamente, conocimientos y estrategias más eficaces para avanzar en la resolución del problema. Se detectó que una buena gestión metacognitiva requiere, entre otras características, que el resolutor no pierda de vista lo que conoce, lo que desconoce y el punto donde se encuentra; también se pudo establecer la importancia de las actitudes como elemento de la competencia, entre las que destacan la disposición a enfrentar el reto que representa el problema y la tenacidad para tratar de resolverlo.

Consideraciones finales

El análisis de los procesos desarrollados por los estudiantes al tratar de resolver los problemas planteados, ha permitido valorar la importancia de los procesos metacognitivos de gestión, planeación, supervisión y regulación, entre otros, pues pudo observarse que los estudiantes con mayor desarrollo de su gestión metacognitiva tienen un mejor desempeño y por tanto, mayor competencia en el proceso de resolución del problema. Esta observación lleva a considerar la conveniencia de promover que se atienda de mejor manera, en los cursos de Matemáticas, la formación metacognitiva de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Argudín, Y. (2007). *Educación basada en competencias* .México: Trillas.

Contreras, A. y Luque, L., (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática* 16(1), 59-87.

Flavell, J. y Wellman, H. (1977). Metamemory. En Kail y Hagran (Eds.). *Perspectives on the development of memory and cognition*(pp. 3-33),Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje* 33(1), 89-105.

Font, V. y Rubio, N. (2008). Ontho-semiotic tools for the analysis of our practice. En B. Czarnocha (Ed.). *Handbook of mathematics teaching Research: Teaching Experiment*, (pp. 165-180), Krakow: University of Rzeszow.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2007 de http://www.ugr.es/local/jgodino.

Gusmao,T., Font, V. y Cajaraville, J.(2009). Análises cognitivo e metacognitivo de prácticas de resolução de problemas. *Educação Matematica Pesquisa*, 11 (1), 8-43.

González, F. (1999). Los procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes. *Épsilon. Revista de la SAEMThales*, 43-44, 199-208.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* México, D.F: Oxford University Press.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (3), 365- 399.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370), New York: MacMillan.. Recuperado en agosto 2010 de: http://gse.berkeley.edu.faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html.

Villa, A. y Poblete, M. (2008). *Aprendizaje basado en competencias*. Universidad del Deusto. Bilbao: Ediciones mensajero.