

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO, EN LA ANTIGUA CIVILIZACIÓN CHINA

Angélica María Martínez, Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay
angelicmar5@yahoo.es, mariojose@hotmail.com

Venezuela

Resumen. Este artículo tiene como propósito fundamental mostrar el análisis realizado, en torno a las configuraciones epistémicas y el desarrollo histórico de la ecuación de segundo grado dada por la civilización china durante los siglos II a.C. al XIII d.C. El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática destaca la importancia de analizar la faceta epistemológica, porque permite vislumbrar bajo marcos institucionales específicos las configuraciones epistémicas, que en otras palabras constituyen el uso y relación de situaciones-problema, técnicas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que dieron origen a dicha ecuación. Metodológicamente se realizó un estudio documental, teniendo en cuenta distintos periodos de China, para llegar a conclusiones de tipo didáctico; entre ellas, el uso de diversos métodos como: fan fa o elemento celeste, bajo argumentos aritméticos y geométricos, que pueden constituir una alternativa educativa al momento de resolver ecuaciones de segundo grado.

Palabras clave: ecuación de segundo grado, configuración epistémica, civilización china

Abstract. This article is intended to show the analysis done about the epistemic configurations and historical development of the second degree equation given by the Chinese civilization during the II century B.C. and the XIII century A.C. The onto-semiotic approach of Mathematical Cognition and Instruction emphasizes the importance of analyzing the epistemological facet is highlighted, because it allows a glimpse of the epistemic configurations arising from the institutional guidelines, which in other words constitute the use and relationship of problem-situations, techniques, languages, concepts, proposals, arguments and procedures, which led to the origin of this equation. Methodologically, a documental study was performed, taking into account different time periods of China, to reach conclusions of didactic type; among them, the use of various methods such: fan fa or celestial element, under arithmetic and geometric arguments, that can be an educational alternative when solving second degree equations.

Key words: second degree equation, epistemic configuration, historical development

Introducción

El presente estudio histórico-epistemológico se centró en la evolución de algunos de los problemas, ideas y conceptos fundamentales del álgebra, con énfasis en la conceptualización de la ecuación de segundo grado porque en gran medida este análisis permite redescubrir a través de la historia, dificultades y errores en el desarrollo de los conceptos matemáticos ligados a este tipo de ecuación, aspecto importante en la enseñanza de la matemática porque a su vez conlleva a relacionar métodos, técnicas, lenguaje, etc., que harán más accesible al educando el conocimiento de este objeto matemático, más aún cuando hace parte del currículo contemplado en educación media y el cual seguirá abordando en años consecutivos.

Por lo anterior, este artículo se orienta a identificar los elementos primarios y las configuraciones epistémicas asociadas a la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china; acorde con el modelo teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del

Conocimiento e Instrucción Matemática, éstas son definidas por Godino, Batanero y Font (2009) y Arrieche (2010), como las redes y relaciones establecidas entre los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas institucionales para concretar el significado de un objeto o noción matemática estudiada, y a partir de ellas se pueden tomar decisiones de tipo instructivo o curricular eficaces para la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo. Para esto se ha realizado un estudio documental, a través de la revisión y lectura de diversas fuentes como: tesis doctorales, de maestría, libros, revistas y textos relacionados con el tema, para precisar y ahondar sobre su origen, desarrollo y papel en la matemática china; además, tal como plantean Finol de Navarro y Nava de Villalobos (1993): “La Documentación es el soporte de la Historia..., constituye además una fase de la investigación histórica, específicamente el estudio de las fuentes, la recolección y evaluación de la información” (p. 60).

Acorde a lo anterior, se mostrará a continuación y en forma sucinta, tres apartados: Desarrollo histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china, elementos primarios y configuraciones epistémicas, para concluir con reflexiones finales a nivel didáctico.

Desarrollo histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china

La civilización china es muy antigua; sin embargo, existen divergencias al tratar de ubicar cronológicamente sus inicios en el desarrollo matemático. Boyer (1999), señala que esta polémica se evidencia con su obra más antigua llamada Chou Pei Suan Ching, algunos historiadores la datan del 1200 a.C. y otros del 300 a.C. En ella, se habla del estudio de las órbitas circulares en el cielo y otros aspectos astronómicos, quizá por esto también se le conoce como el tratado de las Horas Solares. Fue escrito en forma de diálogo, donde un ministro le explica al príncipe como se relacionan el cuadrado y el círculo con la tierra y el cielo respectivamente, entre muchos otros temas. En general, se sabe que este tratado realiza trabajos geométricos basado en las necesidades de agrimensura de la época y vistos desde el aspecto aritmético o algebraico, por esto aparecen algunas indicaciones relacionadas con el teorema de Pitágoras, así como el uso de fracciones.

Otro tratado de gran importancia es el conocido Chui-chang suan-shu, que data más o menos del 250 a.C. (Boyer, 1999), también conocido como el libro de los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático, el cual incluye 246 problemas sobre ingeniería, agrimensura, cálculo, propiedades de triángulos, resolución de ecuaciones, etc. La escritura de estos problemas

concretos era más bien explicativa, no se daban demostraciones, pero sí se indicaban los pasos en forma ordenada para resolverlos.

La matemática en este tratado de los Nueve Capítulos pasó por múltiples modificaciones desde el siglo I a.C. hasta el siglo VII d.C. (Ribnikov, 1987), convirtiéndose en un clásico y por así decirlo en una enciclopedia matemática de contenido variado; más adelante, durante los siglos VII al X d.C., sería obligatoria su lectura para todo aquel que prestara servicio al Estado.

El nombre de esta magna obra se debe a su presentación, realizada en pergaminos dispuestos en 9 libros. El libro 1 se denomina: Medición de Campos, en este, se toma el sistema de numeración decimal jeroglífico, se trabaja con las operaciones básicas, se calculan áreas.

El libro 2, llamado: Relación entre las diferentes formas de cereales, refleja el cobro de impuestos sobre el grano, el cual era medido en unidades de volumen. Debido a esto, los problemas tienen que ver con regla de tres y división proporcional.

El tercer libro, conocido como: División escalonada, continúa los trabajos de división proporcional de valores inversos y con regla de tres simple y compuesta. El cuarto libro, llamado Shao-Huan, expone trabajos para obtener raíz cuadrada y cúbica, tiene problemas donde se pide encontrar el lado de un rectángulo dados su área y el otro lado, o en otros para encontrar elementos del círculo y la esfera.

El libro 5, Estimación de los trabajos, recopila problemas relacionados con cálculos para la construcción de paredes fortificadas, murallas, diques, entre otros. En el libro 6, conocido como: Distribución proporcional, aparecen problemas similares a los del libro 3, donde se busca repartir equitativamente los impuestos; sin embargo, se añade el trabajo con progresiones aritméticas y problemas sobre el trabajo colectivo.

El séptimo libro, llamado: Exceso-defecto, presenta problemas donde intervienen ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones lineales, siendo detallada su solución para casos particulares. Mientras que el octavo libro, profundiza este trabajo, perfeccionando y generalizando la solución de sistemas de ecuaciones lineales más complejas a través de una regla llamada fan-chen. También aparecen números negativos y la regla del cheg-fu, algo así como la regla del más-menos, representando un gran adelanto en consideración a otras obras como las de Chuquet y Leibnitz donde se mencionan estos temas unos cuantos siglos más adelante.

El noveno y último libro, abarca problemas donde se requiere determinar distancias y alturas, destacándose el uso del teorema de Pitágoras y las propiedades de triángulos semejantes, la formulación de reglas de tipo algebraico y la solución a ecuaciones cuadráticas.

Perero (1994), señala que los chinos trabajaban las propiedades de los triángulos rectángulos y conocían el teorema de Pitágoras, llamándolo Gou-Gu. Como ejemplo, del libro de los Nueve Capítulos, presenta el problema seis del último libro, el cual dice:

Un acuario tiene una base cuadrada de lado 10 “chi”. Una caña nace en el centro del acuario y crece perpendicularmente a la base hasta salirse 1 “chi” sobre la superficie del agua. Si se inclina la caña hacia un lado, su tope tocará el borde del acuario exactamente al nivel del agua. ¿Cuál es la profundidad del agua y cuál es la longitud de la caña?. (Perero, 1994, p. 133)

Para solucionarlo, se parte del gráfico referencial número 1, donde x representa la profundidad del acuario, mientras “ h ” será la hipotenusa o en otras palabras es la longitud de la caña y equivale por lo tanto a $x + 1$; entonces, si la caña está en el centro del acuario uno de los catetos mide 5 y por Pitágoras se tendrá: $h^2 = x^2 + 5^2$, siendo a su vez equivalente a $(x + 1)^2 = x^2 + 5^2$, de donde $x = 12$, así la profundidad del acuario es de 12 chi y la longitud de la caña de 13 chi.

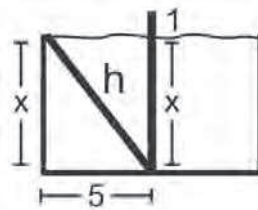


Gráfico 1. Problema Chino del acuario y la caña

Para ejemplificar ecuaciones cuadráticas, Ribnikov (1987), detalla el problema 11 del capítulo 9 donde se trata de conseguir las dimensiones de una puerta, conociendo el valor de su diagonal y la diferencia entre su longitud y su ancho. A través de nuestra simbología actual, si a la diagonal se le llama “ c ” y a la diferencia entre longitud y ancho se le llama “ k ” (obsérvese el gráfico 2), implicaría en nuestro lenguaje actual la formulación de las ecuaciones $x^2 + y^2 = c^2$, $y - x = k$, de las cuales emerge a su vez la ecuación $2x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$.

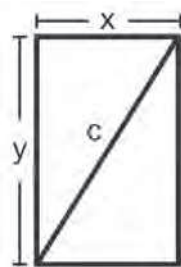


Gráfico 2. Problema chino sobre las dimensiones de una puerta

El ruso E. I. Berezkina, traductor del tratado de los Nueve Capítulos en el año 1965, escribe la forma como los chinos encontraron la solución al anterior problema, desde la simbología actual.

Partiendo de $x_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\frac{k^2}{2}}{2}} \pm \frac{k}{2}$, "sea $x_{1,2} = z \pm \frac{k}{2}$, entonces $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2 = 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c^2$, de donde $z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\frac{k^2}{2}}{2}}$ " (Ribnikov, 1987, p. 37)

Junto con esta obra, vale rescatar algunos aportes de matemáticos chinos, entre ellos Ch'in Chiu-Shao (1201-1261 d.C., también conocido por otros autores como Chin Kin Shao), de quien se dice fue el autor del título de la tradicional obra los Nueve Capítulos. Este matemático obtuvo un método llamado método del elemento celeste (así se denominaba a la incógnita) para resolver ecuaciones y es parecido al conocido método Horner-Ruffini (descubierto a mediados del siglo XIX d.C.), usado hoy en día para resolver ecuaciones de tercer grado en adelante y para la división entre polinomios (Ribnikov, 1987).

Sobre este método Boyer (1999) muestra con un ejemplo como Ch'in Chiu-Shao se aproxima a la raíz de la ecuación $x^2 - 71.824 = 0$, empezando con el valor de 200 realiza un cambio de incógnita al tomar $x = y + p$, con $p = 200$, por lo cual la ecuación inicial queda como $(y + 200)^2 - 71.824 = 0$, igual a $y^2 + 400y + 40.000 - 71.824 = 0$, y por tanto equivalente a $y^2 + 400y - 31.824 = 0$. Para esta segunda ecuación, Chiu-Shao determina la raíz con un valor aproximado de 60; de nuevo realizando otra sustitución de $y = z + 60$, queda $(z + 60)^2 + 400(z + 60) - 31.824 = 0$, donde por procedimientos simples da la tercera ecuación: $z^2 + 520z - 4.224 = 0$, con la cual se obtiene una raíz exacta por medio del método Horner-Ruffini, siendo z igual a 8, y así en la ecuación original se tendrá por sustitución de los valores encontrados, que x es igual a 268.

Otro notable matemático fue Chu Shih-Chieh, de quien se sabe tuvo mayor influencia en las matemáticas durante los años 1280 al 1303 d.C., fue un sabio errante que enseñaba matemática y logró escribir dos tratados, siendo el más importante el conocido como Espejo Precioso de los Cuatro Elementos, escrito en el 1303 d.C.

Boyer (1999) indica que este libro trata sobre sistemas de ecuaciones, trabaja con ecuaciones de grado 14 y recopila el amplio desarrollo del álgebra China. También destaca el uso del método de Horner, el cual era llamado por Chu Shih-Chieh como fan fa.

Para ilustrar un ejemplo del uso de este método, Boyer (1999) explica en simbología actual como llega a la solución de la ecuación $x^2 - 252x - 5.292 = 0$:

...se obtiene en primer lugar por tanteo la aproximación $x = 19$, lo cual significa que la ecuación tiene una raíz entre $x = 19$ y $x = 20$, y a continuación utiliza el fan fa, en este caso la transformación $y = x - 19$, para obtener la ecuación $y^2 + 290y - 143 = 0$ con una raíz entre $y = 0$ e $y = 1$. El valor aproximado de la raíz buscada de última es $y = \frac{143}{1+290}$, y por lo tanto el correspondiente valor de x es $19\frac{143}{291}$ (Boyer, 1999, p. 267)

En relación al EOS, el interés de realizar este análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, radica en el hecho de permitir recabar información sobre los sistemas de prácticas utilizadas para solucionar situaciones-problemas en relación a marcos institucionales específicos, como es el caso de la civilización china; interés que no sólo abarca los problemas, sino también las otras entidades primarias como: las técnicas, los lenguajes, las notaciones, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Godino, 2003), y sobre todo la forma como estas entidades se relacionan originando las configuraciones epistémicas en cada momento y circunstancia (Godino y Font, 2007). A continuación se detallarán los elementos primarios y las configuraciones epistémicas generadoras del objeto matemático en estudio.

Elementos primarios y configuraciones epistémicas

El trabajo algebraico alcanzado por la civilización china es notorio, se manejó un lenguaje retórico y finalizando el siglo XII comenzaron a presentar un lenguaje sincopado. Las situaciones problema se ven afectadas por los asuntos socio-económicos del momento, como: las necesidades de construcción, de transacciones comerciales, la irrigación, el transporte, la construcción de obras, entre otros, situaciones que conllevaban a problemas tanto de tipo aritmético como algebraico. Se tenía conocimiento de conceptos básicos, como áreas, longitud, operaciones básicas, coeficientes de un binomio (hoy en día determinados a través del llamado: "Triángulo de Pascal"), círculo, radio, circunferencia, progresiones y llegaron a tener conocimiento de números negativos. Entre las proposiciones sabían de proporción, de regla de tres, del teorema de Pitágoras (conocido por los chinos como gou-gu) y llegaron a plantear métodos para operar con números negativos. En cuanto a procedimientos, fijaron reglas a situaciones particulares con ecuaciones de segundo grado empleando el método del elemento celeste, el de fan fa, la aproximación de raíces y para ciertos casos las soluciones propuestas eran una serie de pasos sin demostración formal, ajustadas precisamente a casos

particulares; y a fin de argumentar sobre los procesos realizados se apoyaban en lo aritmético, lo geométrico y deductivo informal.

En el siguiente cuadro A, se muestra una síntesis de este análisis, clasificando brevemente los elementos primarios señalados:

Cuadro A: Red de Entidades Primarias vs. Período histórico

Entidades Primarias Período histórico	Lenguaje	Situa-prob.	Conceptos	Proposici.	Procedi.	Argument.
China (s IIaC al XIII dC)	Retórico y Sincopado	Agrimensura, ingeniería, impuestos, cálculo, etc.	Area, círculo, triángulo rect. números, regla de tres	Trabajan ecuac. de la forma $x^2 + bx + c = 0$ con proporciones, regla de tres, Teorema del Gou-gu	Método del elemento celeste, fan fa, Aproximación de raíces	Se transmite la técnica, razonamiento deductivo aritmético

Para el análisis de configuraciones epistémicas, se parte de los problemas específicamente tratados por los chinos, considerándose los elementos primarios y la manera cómo se entretujan para ayudar a resolver el problema. Vale aclarar que para cada problema propuesto se requiere analizar su configuración epistémica, pero por la brevedad en la presentación de este artículo, se analizan solamente dos ejemplos.

En los problemas del acuario y la puerta, se pudieron determinar elementos primarios como el uso de términos no ostensivos, entre ellos: área, largo, ancho, dimensiones; también se observa como objeto ostensivo la elaboración de gráficos por medio de los cuales emergen conceptos como dimensiones de un triángulo y de un rectángulo ayudando a sustentar proposiciones como el gou-gu que permite conseguir la longitud de lo que actualmente denominamos hipotenusa. En procedimientos, se destaca la sustitución de valores y el método del elemento celeste. Se puede notar que la forma de justificar la solución es a través de argumentos basados en deducciones informales, en el razonamiento de tipo geométrico y equivalencia de valores. Los aspectos simbólicos son poco tratados por esta civilización, pero bajo la lupa de nuestra escritura, o dicho de otra forma, contextualizándolo a nuestra época, requiere el uso de la “ x ”, de fórmulas específicas como la de Pitágoras y de otras más específicas para el caso del problema con la puerta.

A modo de resumen visual y para concluir con este apartado, las configuraciones dadas a los problemas propuestos se esbozan en los siguientes cuadros B y C respectivamente:

Cuadro B: Configuración epistémica dada al problema del acuario y la caña

LENGUAJES:	SITUACIONES/PROBLEMA:
<p>Ordinario: (Términos/Expresiones) Largo, ancho, dimensión, diferencia, entre otros</p> <p>Gráfico: (Íconos, dibujos) Dibujo de un rectángulo y una de sus diagonales</p> <p>Simbólico: (Notaciones) Números, operaciones aritméticas, uso la incógnita X</p> <p>(fórmulas) $x^2 + y^2 = c^2$ $y - x = k$ $2x^2 - 2kx + k^2 - c^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2 = 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c^2$ $z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$</p>	<p>Problema: Conseguir las dimensiones de una puerta, conociendo el valor de su diagonal y la diferencia entre su longitud y su ancho</p> <p style="text-align: center;"> </p>
	<p>CONCEPTOS/DEFINICIONES:</p> <p>Previos: Rectángulo, longitud, ancho, dimensiones, diferencia, perpendicularidad</p> <p>Emergentes: Relación entre el ancho y la longitud como la diferencia dada, así: $y - x = k$</p>
	<p>PROPIEDADES/PROPOSICIONES:</p> <p>Previos: Aditividad y multiplicidad de la medida Propiedad asociativa y conmutativa de la adición Propiedad de raíz cuadrada y potencias Teorema de Pitágoras (llamado Gou-Gu)</p> <p>Emergentes: Determinan el valor de la diagonal como una relación pitagórica: $x^2 + y^2 = c^2$ Surge la ecuación: $2x^2 - 2kx + k^2 - c^2 = 0$</p>
	<p>PROCEDIMIENTOS:</p> <p>Razonamiento geométrico Sustitución de valores Método del elemento celeste (hoy en día método de Horner-Ruffini) Multiplicación elemental, extracción de raíz Cálculo de la hipotenusa</p> <p style="text-align: center;"> </p>
	<p>ARGUMENTOS:</p> <p>Deductivo informal Razonamiento geométrico. Aplicación del teorema de Pitágoras o Gou-gu Equivalencia de valores</p>

Cuadro C: Configuración epistémica dada al problema de dimensiones de una puerta

LENGUAJES:	SITUACIONES/PROBLEMA:
<p>Ordinario: (Términos/Expresiones) Área, largo, ancho</p> <p>Gráfico: (Íconos, dibujos) Dibujo de un rectángulo Triángulo Rectángulo</p> <p>Simbólico: (Notaciones) Números, operaciones aritméticas, uso la incógnita X</p> <p>(fórmulas) $(x+1)^2 = x^2 + 5^2$</p>	<p>Problema: Conseguir profundidad de un acuario y lo largo de una caña</p> <p style="text-align: center;"> </p>
	<p>CONCEPTOS/DEFINICIONES:</p> <p>Previos: Rectángulo, área, longitud, ancho, unidad de medida longitudinal, perpendicularidad</p> <p>Emergentes: Dimensiones de un triángulo</p>
	<p>PROPIEDADES/PROPOSICIONES:</p> <p>Previos: Aditividad y multiplicidad de la medida Propiedad asociativa y conmutativa de la adición Propiedad de raíz cuadrada y potencias Teorema de Pitágoras (llamado Gou-Gu)</p> <p>Emergentes: Encuentran que la hipotenusa es igual a $x + 1$</p>
	<p>PROCEDIMIENTOS:</p> <p>Aumenta una unidad la caña Razonamiento geométrico Sustitución de valores Multiplicación elemental, extracción de raíz Cálculo de la hipotenusa y profundidad</p> <p style="text-align: center;"> </p>
	<p>ARGUMENTOS:</p> <p>Deductivo informal Razonamiento geométrico. Aplicación del teorema de Pitágoras o Gou-gu</p>

Reflexiones finales a nivel didáctico

Tal como refiere el enfoque ontosemiótico, gracias a este análisis histórico-epistémico se puede tener una visión más global del lenguaje, de los problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que han propiciado el surgimiento de la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china, pudiéndose precisar a través de estos elementos primarios aspectos relevantes de su origen e importancia en el contexto matemático. En tanto a nivel didáctico, se constatan diversas maneras de resolver este tipo de ecuación durante el período histórico descrito, siendo fuente interesante para realizar diversas actividades con los estudiantes, ya sea para discutir sobre los procedimientos o para replantear problemas similares.

Por lo general el uso de la resolvente suele ser la única manera como los estudiantes solucionan ecuaciones cuadráticas, haciendo su estudio y aprendizaje muy mecanizado (Martínez, 2008). No es de extrañar que para la mayoría de los educandos aprenderse algo de memoria es más aburrido, muchos desconocen el origen de las fórmulas empleadas y en otros casos su aplicación para contextos cotidianos. Por esto, es necesario rescatar según los ejemplos observados, diversas técnicas para deducir las raíces de la ecuación de segundo grado en el momento de su enseñanza-aprendizaje; entre ellas el método del fan fa, del elemento celeste o de aproximación, considerando problemas con casos simples hasta llegar a los más complejos pero que reviertan interés para el alumno, y conlleven aplicaciones hacia la geometría, comercio, ciencia, industria, y otros campos.

También puede incluirse la formulación de problemas similares a los propuestos por los chinos con la ecuación de segundo grado, a fin de entablar (acorde con el EOS) comparaciones entre las configuraciones epistémicas con las configuraciones cognitivas dadas por los estudiantes al resolverlos, esto permitirá dilucidar otras formas de abordar pedagógicamente el objeto matemático en estudio.

Otro aspecto a considerar, es dedicar un espacio para platicar sobre la biografía de personajes chinos dedicados a la matemática, como Chu Shih-Chieh, mencionando sus aportes en la consolidación de la ecuación de segundo grado; aspecto que confluye en el aprendizaje cultural del estudiante, además humaniza, sensibiliza y hace ver menos rígida la enseñanza de la matemática.

Finalmente, estas conclusiones son apenas un pequeño aporte, sólo al momento de tratarlo en clase, surgirán otras estrategias y otros mecanismos según las características propias del medio físico, emocional, social, presentes en el aula. Lo importante es reencontrar a través de este

recorrido histórico, la importancia de enseñar la ecuación de segundo grado y las muchas formas para tratar este objeto matemático y convertirlo en un tema más accesible para nuestros estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Arrieche, M. (2010). *Significados institucionales y personales del objeto matemático función en la Formación de Profesores de Educación Integral*. Trabajo presentado para optar a la categoría de profesor titular, Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay, Venezuela.
- Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universitaria.
- Finol de Navarro, T. y Nava de Villalobos, H. (1993). *Procesos y Productos de la Investigación Documental*. Maracaibo: EDILUZ.
- Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Recuperado el 10 de enero de 2010 de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado el 10 de abril de 2007 de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 8 de junio de 2009 de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- Martínez, A. (2008). *Significados personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática*. Tesis maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay, Venezuela.
- Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemática*. México: Iberoamericana.
- Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.