

## EL PRINCIPIO HEURÍSTICO DE LA VISUALIZACIÓN Y SU CARÁCTER RECTOR PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Oswaldo Jesús Rojas Velázquez, Miguel Cruz Ramírez, Miguel Escalona Reyes, Mario Estrada Doallo, José Luís Sánchez Santiesteban  
Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero” Cuba  
scmc@ucp.ho.rimed.cu

**Resumen.** La naturaleza de la geometría del espacio, las dificultades y carencias en su aprendizaje, revelan la existencia de un principio que enriquece la Didáctica de la Matemática, que está presente en todas las ramas de la Matemática y ayuda a la resolución de problemas. En la investigación se ofrecen los presupuestos epistémicos que sustentan el principio heurístico de la visualización, sus potencialidades axiológicas y su papel rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Se exponen los factores que justifican y viabilizan la presencia del principio, sus acciones y reglas. Su concreción favorece un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.

**Palabras clave:** principio heurístico, visualización, geometría del espacio

**Abstract.** The space geometry nature, as well as difficulties and shortages in its learning, show up the existence of a principle that enriches the Mathematic Didactics that is intrinsic in all of this science's branches, and constitutes an aid for solving problems. Throughout this research, epistemological foundations are presented in order to support the heuristic principle of visualization. Special attention is paid to this principle's axiological potentialities, likewise, to its rector role in the teaching – learning of space geometry. It is exposed the factors that justify and make feasible this principle, its actions and rules. Carry to the practice this proposal promotes a teaching-learning process of development.

**Key words:** heuristic principle, visualization, space geometry

### Introducción

Es frecuente el empleo del término “principio” como regla que guía la conducta, fundamento de un sistema, entre otras acepciones. Los principios constituyen formas de sistematizar la teoría, permiten comprender la esencia de un proceso y tienen un carácter relativo al reflejar la realidad desde condiciones socio-históricas concretas del fenómeno o proceso objeto de estudio.

Mario Bunge, citado por Valiente (2009), aduce que los principios son categorías generales unificadoras dentro de la teoría científica:

La ciencia es explicativa: intenta explicar los hechos en términos de leyes, y las leyes en términos de principios. [...] la ciencia deduce proposiciones relativas a hechos singulares a partir de leyes generales, y deduce las leyes a partir de enunciados nomológicos aún más generales (principios). (p. 3)

En el ámbito educativo, autores como Danilov (1978), Savin (1972), Klingberg (1972) y Labarrere y Valdivia (1988), identifican los principios didácticos como principios de

enseñanza, pues de una forma u otra todos coinciden en plantear que los principios son guías, posiciones rectoras, postulados generales, normas para la enseñanza. También se plantea que estos “[...] se presentan como lineamientos prácticos que le permiten transformar la realidad, es decir, los principios de enseñanza son el punto de partida del profesor y tiene una función transformadora” (Labarrere y Valdivia, 1988, p. 53). En esta definición la “*función transformadora*” de la cual se habla es un ejemplo de búsqueda de un desarrollo en el alumno, pero en la misma se hace énfasis en la actividad de enseñar y relega a un segundo plano la actividad de aprender por parte del alumno, también adolece de un enfoque integral para el desarrollo de la personalidad y limita el aprendizaje al contexto del aula.

En correspondencia con las definiciones anteriores, en esta investigación se asume que los principios didácticos:

[...] son aquellas regularidades esenciales que rigen el enseñar y el aprender, que permiten al educador dirigir científicamente el desarrollo integral de la personalidad de las alumnas y alumnos, considerando sus estilos de aprendizaje, en medios propicios para la comunicación y la socialización, en los que el marco del salón de clases se extienda en un continuo a la familia, la comunidad y la sociedad en general. (Zilberstein y Silvestre, 2004, p. 107)

Por otra parte, la propia naturaleza de la geometría del espacio, así como las dificultades y carencias en su aprendizaje, revelan la existencia de un principio que enriquece la Didáctica de la Matemática, que a la vez está presente en todas las ramas de la Matemática y ayuda a la resolución de problemas. En el diagnóstico se pudo constatar la existencia de evidencias empíricas de la manifestación de la visualización como principio heurístico. Por tales motivos este trabajo tiene como objetivo ofrecer los fundamentos psicológicos y epistémicos que sustentan al principio heurístico de la visualización y su papel rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio.

## **Desarrollo**

Lo visual suele relacionarse con las imágenes, con las figuras, con los gráficos, con lo geométrico y aparece como una vía más de percibir la realidad del objeto del conocimiento, unido a la comunicación verbal, a lo abstracto y a lo analítico. La enseñanza de la geometría del espacio se favorece con el desarrollo de la visualización, en dos direcciones. Por un lado la construcción mental de objetos y procesos que un individuo asocia con objetos o sucesos percibidos por él como externos y, por otro, la construcción en algún medio externo de

objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos y procesos en su mente. En la geometría del espacio se necesita que el alumno visualice constantemente, mediante una interacción sujeto-objeto, donde se activen, estimulen y desarrollen los procesos lógicos del pensamiento para obtener el nuevo conocimiento geométrico espacial, de forma tal que le permita al alumno reflexionar, profundizar, definir, valorar, argumentar y plantear conjeturas.

La visualización facilita resolver problemas geométricos y situaciones de aprendizaje que requieren de la abstracción, que exijan que el alumno busque y explore las relaciones, propiedades y formas de representación de las figuras geométricas espaciales, sin la presencia de la figura geométrica o el objeto material para hacer referencia directa. De esta forma las exigencias intelectuales conducen a que el alumno opere con el conocimiento, hacia niveles cada vez más complejos para estimular así su desarrollo.

Por otra parte, la utilización de la computadora, a través de las software de geometría dinámica (SGD), es un aspecto fundamental para la visualización pues incide en la generalización, abstracción, detección de propiedades invariantes y en la posibilidad de conjeturar y experimentar el cumplimiento de propiedades geométricas espaciales que inicialmente no eran conocidas por el sujeto. Con el apoyo de la visualización, los conceptos y propiedades se revelan en su origen y desarrollo, propiciando la interacción del alumno con el conocimiento, ya sea mediante la vía metodológica inductiva o la deductiva para su formación. El desarrollo de la visualización facilita a los alumnos una vía para pensar, buscar y “hacer” geometría, con el fin de favorecer su aprendizaje y el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

Por otro lado la heurística tiene un importante papel en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en particular de los principios heurísticos, pues constituyen sugerencias para encontrar (directamente) la idea de solución principal de resolución, lo cual posibilita determinar los medios y las vías de solución. Los principios heurísticos generales y especiales son propicios para la búsqueda del nuevo conocimiento geométrico, así como en la resolución de problemas y situaciones de aprendizaje. Su papel desarrollador en la enseñanza de la geometría espacial es esencial y se manifiesta en diversos ámbitos. A continuación se ejemplifican algunos factores que justifican y viabilizan la presencia del principio heurístico de visualización:

- ❖ La geometría del espacio opera mediante representaciones mentales, representaciones externas y la imaginación.

- ❖ La necesidad de vincular objetos externos percibidos con su imagen mental y con su representación en un medio plano, donde se propicie el trabajo para la manipulación y se estimulen y desarrollen las formas de trabajo y de pensamiento de la Matemática.
- ❖ El complejo proceso de tránsito del pensamiento geométrico concreto al abstracto y viceversa.
- ❖ La búsqueda de nuevas vías que permitan estimular y desarrollar los procesos lógicos del pensamiento, mediante el procesamiento de imágenes que potencien el pensamiento concreto de objetos espaciales, lo cual es poco frecuente.
- ❖ El desarrollo tecnológico y su aplicación al contexto escolar, lo cual brinda nuevas posibilidades para el trabajo con imágenes y representaciones en el aula y fuera de esta.

También la Didáctica de la Matemática, en la práctica escolar, ha demostrado que existen evidencias que conducen al principio heurístico de visualización, pues este:

- ❖ Se refleja en las diferentes líneas directrices, tales como geometría, trabajo con variables, resolución de problemas, entre otras.
- ❖ Se revela en las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática, como el tratamiento a problemas geométricos, a conceptos y sus definiciones y a teoremas y sus demostraciones.
- ❖ Se pone de manifiesto en técnicas y procedimientos de solución de problemas, pues para autores como Cantoral y Montiel (2001) y López (2005) es una habilidad, para muchos entrenadores de olimpiadas es una técnica en la solución de problemas y, por otra parte, para Rojas (2009) constituye un elemento heurístico.

Por otra parte, este principio se sustenta en:

- ❖ Fundamentos psicológicos: estos están dados por el papel que tienen la percepción, la representación, la imaginación, las operaciones lógicas del pensamiento, los procesos mentales (procesamiento visual e interpretación de información figurativa); o sea, el rol de las funciones psíquicas superiores dadas por su naturaleza social y cultural, así como en la ley genética del desarrollo y la zona de desarrollo próximo (ZDP).
- ❖ Presupuestos epistémicos: evidenciados en las raíces gnoseológicas de la Matemática como una ciencia dinámica y cambiante, a partir de la resolución de nuevos problemas. Todo esto se refleja con suficiente elocuencia en la historia de la Matemática y de su enseñanza, donde la geometría ha constituido objeto de enseñanza desde la antigüedad.

- ❖ Potencialidades axiológicas: dadas por el beneficio que la visualización le puede aportar a los estudiantes, lo cual hace que el aprendizaje constituya una necesidad y motive un aprendizaje de mayor exigencia. Además, se dirige al desarrollo de un proceso crítico y transformador, favoreciendo cualidades importantes como la independencia del alumno y su laboriosidad.
- ❖ Fundamentos didácticos: el principio se integra con todos los componentes de la didáctica. Mediante el empleo de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), en particular de la computadora, se favorece y se desarrolla permitiendo una comprensión más completa del contenido geométrico. Además, se correlaciona y perfecciona al integrarse con los restantes principios heurísticos generales. Este principio constituye un recurso heurístico que permite fijar, comprender y reafirmar el contenido, pero también propicia encontrar y buscar el nuevo contenido geométrico, lo cual lo hace una potente herramienta heurística para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio.

Por lo antes planteado, se considera de un elevado valor y un nivel de generalidad que se ajustan a las posturas didácticas antes asumidas, un principio heurístico que se declara en la investigación: la visualización. Este principio consiste “en la búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos matemáticos y sus interrelaciones, donde el pensamiento geométrico se activa mediante el trabajo con la ZDP. En el proceso de búsqueda se reconfigura el significado y el sentido de estos objetos y sus interrelaciones, mientras el estudiante, ayudado por el maestro o por sí mismo, explora diversas vías y activa diferentes conceptos”.

La base epistémica fundamental está dada en la conexión existente entre todas las ramas de la Matemática, que la fundamentan como una ciencia única. Por tanto, el principio de la visualización está presente en toda la enseñanza de la Matemática, pues al enfocar geoméricamente los nuevos conocimientos se logra una fijación más profunda de ellos. Este principio no coincide con la conocida regla heurística de “construir una figura de análisis”. Esta regla es solo una forma concreta de realización del principio y tiene un papel esencial en la geometría plana y del espacio. El principio de visualización es más universal y también está presente en la enseñanza de contenidos algebraicos y analíticos. Por ejemplo, el estudio de las funciones y sus propiedades no pueden ser posibles al margen de la representación gráfica. Incluso en la Educación Superior, la comprensión del concepto de continuidad uniforme se logra desplazando cierto rectángulo por el gráfico de la función. Allí los alumnos reconocen el

extraordinario valor de la geometría, para esclarecer mejor la compleja definición que el Análisis Matemático tiene para este concepto (lenguaje  $\varepsilon$ - $\delta$ , según Cauchy).

Este principio no solo tiene lugar durante la formación de conceptos, sino también en el campo de la resolución de problemas. Existe un ejemplo muy conocido, del ámbito de la resolución de ecuaciones con radicales, donde el principio juega un papel importante.

La formación de conceptos y la resolución de problemas son situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática. El principio de visualización está presente en todas las situaciones típicas, pues la interconexión que dimana de todas las ramas del saber matemático también está presente en la enseñanza de esta ciencia. De aquí se desprende el carácter general del principio.

En el sentido lógico formal todo principio “debe ser un juicio necesario, estable y esencial” (Danilov, 1978, p. 121). La necesidad de la visualización ha quedado fundamentada sobre la base de las carencias que manifiestan los alumnos en el aprendizaje de la Matemática y, particularmente, en la resolución de problemas de la geometría del espacio.

La estabilidad se pone de relieve en la medida que el nuevo principio no entra en contradicción con los ya preestablecidos, sino que se integra a ellos de forma dialéctica. Una muestra de estabilidad está dada en la enseñanza de la geometría del espacio. La resolución de un problema de cálculo de cuerpos exige de la construcción de una figura de análisis (regla heurística), pero los límites antológicos del plano dificultan la imaginación espacial; lo mismo ocurre incluso con la presentación estática de un medio de enseñanza tridimensional. El principio de visualización logrará mayor efectividad si la imagen plana entra en movimiento con el auxilio de algún software, o cuando el medio de enseñanza la hace girar en diferentes ángulos. En fin, el principio de visualización se relaciona directamente con el principio heurístico especial de movilidad.

La esencialidad de este principio se evidencia en su carácter permanente e invariable, respecto a los fenómenos donde tiene lugar. Su exclusión deja un vacío en el orden teórico, pues no sería posible fundamentar una amplia diversidad de hechos similares a los explicados anteriormente (el concepto de continuidad uniforme y el sistema de ecuaciones antes ejemplificados). La unidad y contradicción dialéctica de las categorías esencia y fenómeno se ponen de manifiesto en las diferentes situaciones típicas, pues estas son dinámicas y variables mientras que el principio de visualización es más profundo y les es inherente a todas.

Un hecho particular, que requiere de explicación, consiste en la posibilidad de realización del principio de visualización en el aprendizaje de sujetos ciegos. Para ellos la visualización también

es posible. De acuerdo al sistema de comprensión dinámica las vías y zonas cerebrales que dejan de funcionar son sustituidas por otras vías y zonas que asumen la función perdida (Asratian, 1962). En este caso, para los ciegos se compensa el defecto por vía táctil y desarrollan así la imaginación basada en esta mediación táctil. Aunque el análisis de estos casos rebasa los límites del objeto en esta investigación, se considera oportuno llamar su atención, a fin de sugerir problemas abiertos para otras investigaciones.

El principio heurístico de visualización en algunos momentos y bajo ciertas condiciones se convierte en un principio integrador. En efecto, la resolución de problemas y ejercicios geométricos, por su propia naturaleza, exige la construcción de figuras (tridimensionales en el caso de la geometría del espacio). Este condicionante orienta todo el razonamiento alrededor de la figura de análisis, de modo que los restantes principios se rigen por la visualización. No significa esto que en tales condiciones se le reste importancia a los otros principios, por el contrario, ellos se reflejan mediatizados por la visualización. Por ejemplo, el principio de la movilidad se manifiesta en la imaginación espacial.

Para aprovechar al máximo las potencialidades del principio de visualización, el profesor debe realizar las siguientes acciones:

- ❖ **Análisis:** se realiza un estudio de la información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, o la lectura, comprensión e interpretación de las representaciones visuales usadas en geometría; para extraer la información que se necesita en la solución del ejercicio y/o problema. Es decir, se efectúa el análisis sobre las operaciones de las imágenes mentales o visuales, las cuales se realizan mediante el procesamiento visual e interpretación de información figurativa.
- ❖ **Relación:** Es el proceso de búsqueda y comparación al nivel mental que realiza el alumno sobre los conceptos, relaciones esenciales (propiedades y teoremas) y elementos, como resultado de la abstracción inmediata de la palabra o de la imagen sensorial de las figuras geométricas; con el objetivo de ajustar la vía de solución a la situación o problemática dada, de tal forma que le permita resolver la situación.
- ❖ **Representación mental:** se comienza a imaginar internamente cada una de las partes y las relaciones entre estas, determinando la representación mental de la figura geométrica en su conjunto.
- ❖ **Representación externa:** se realiza con lápiz y papel, tiza y pizarra, materiales, con el uso de los SGD, programas informáticos o con ayuda de la tecnología.

- ❖ Vista geométrica: consiste en la representación de los elementos, propiedades y relaciones de las figuras geométricas del espacio en el plano.

Es importante destacar que, en correspondencia con lo que se quiere lograr, la manipulación se presenta en las cuatro primeras acciones, pues ella se usa para ajustar la visualización a lo que se busca o se exige en el problema o situación de aprendizaje. La visión espacial, junto con la representación inicial, tienen un papel importante en la interiorización y comprensión de las dos primeras acciones: análisis y relación. Por tal motivo, en aras de lograr mejores niveles de aprendizaje en la geometría del espacio, es necesario el principio heurístico de la visualización como un constante apoyo intra y extraescolar, a fin de que los alumnos sean provistos de métodos que les permitan obtener sus propios descubrimientos visuales sobre geometría del espacio. En la concreción de este principio se sugiere la implementación de reglas heurísticas que le son inherentes y propias:

- ❖ Objetivación de figuras geométricas: se pone de manifiesto en la representación del objeto concreto, en la representación simplificada, en la construcción de figuras de análisis y en construcciones auxiliares.
- ❖ Manipulación geométrica.
- ❖ Descomposición.
- ❖ Representación analítica: se refiere a buscar relaciones, a determinar los objetos y operaciones que se pueden establecer.

El principio heurístico de la visualización, mediante las acciones y reglas que son propias de él deviene en la práctica como método.

Este principio heurístico plantea al profesor las siguientes exigencias:

- ❖ Comprender la necesidad de las imágenes y la representación espacial, para la visualización en el proceso de aprendizaje de la geometría del espacio.
- ❖ Determinar la forma de emplear la visualización en la clase, como medio para la formación de abstracciones y generalizaciones, para obtener nuevos conocimientos geométricos, para la sistematización, etcétera.
- ❖ Concebir los medios visuales, en particular las TIC, que pueden utilizarse en el proceso de visualización para reproducir y representar las imágenes y figuras geométricas.
- ❖ Utilizar la visualización en problemas geométricos relacionados con objetos reales del medio, contextualizados a la vida cotidiana y a la actividad cognoscitiva del alumno.



- ❖ Crear las condiciones para que los alumnos utilicen la visualización, así como la forma de representar figuras y cuerpos en el plano.

Por la propia naturaleza de la geometría del espacio, el principio heurístico de la visualización, tiene un carácter rector para su enseñanza-aprendizaje, su uso en las clases es de gran utilidad, pues permite la búsqueda de nuevos conocimientos geométricos espaciales, así como la sistematización y generalización de otros.

### Conclusiones

Los resultados investigativos sobre el principio heurístico de la visualización en la geometría del espacio, permite destacar algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo que se persigue. Ellos son:

Se exponen los fundamentos psicológicos y didácticos, así como los presupuestos epistémicos que sustentan al principio heurístico de la visualización y sus potencialidades axiológicas. También se proponen acciones, exigencias y reglas que son propias de este principio, entre las cuales tenemos la objetivación de figuras geométricas, la representación analítica, la descomposición y la manipulación geométrica. El principio heurístico de la visualización, mediante las acciones y reglas que son propias de él deviene en la práctica como método.

El principio heurístico de la visualización, es importante para lograr la efectividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el preuniversitario, pues se erige como principio rector en la enseñanza-aprendizaje de esta rama de la Matemática.

### Referencias bibliográficas

- Asratian, E. A. (1962). *Problemas de neurofisiología*. Buenos Aires: Quezal.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Educación.
- Danilov, M. A. (1978). *Didáctica de la Escuela Media*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Klingberg, L. (1972). *Introducción a la Didáctica General*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Labarrere, G. y Valdivia, G. (1988). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.
- López, L. (2005). *Metodología para el perfeccionamiento del proceso enseñanza aprendizaje del cálculo vectorial, fundamentada en el desarrollo de la visualización matemática tridimensional*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Camagüey “Ignacio Agramante y Loynaz”. Camaguey, Cuba.
- Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del*

*espacio con un enfoque desarrollador.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero”. Holguín, Cuba.

Savin, N.V. (1972). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

Valiente, P. (2009). La evaluación de la gestión directiva y los principios de la Dirección Educativa. En O. Coloma (Ed). *Memoria de pedagogía 2009 (I)*, (pp. 29-43). Holguín: Educación Cubana.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2004). *Didáctica desarrolladora desde el enfoque Histórico Cultural*. México: CEIDE