INTERPOLACIÓN NEWTONIANA, LAGRANGIANA E INTERPOLACIÓN CON POLINOMIOS CÚBICOS: APROPIACIÓN DEL CONOCIMIENTO MEDIANTE UN ACERCAMIENTO INTUITIVO

Rogelio Ramos Carranza, Frida María León Rodríguez, Armando Aguilar Márquez
Universidad Nacional Autónoma de México México
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx

Resumen. Existen diversos métodos para realizar una interpolación numérica o bien la aproximación a una función mediante polinomios, algunos de los cuales son tratados como ajuste de curvas; entre ellos se puede mencionar a los polinomios de interpolación de Newton, polinomios de interpolación de Lagrange, y la interpolación "spline" o interpolación segmentaría de distintos tipos, entre otros métodos para el ajuste de curvas o modelado numérico. En esta indagatoria se propone probar que el estudiante puede lograr la construcción de sus propias estructuras para conseguir la aprehensión del conocimiento de los modelos tratados, usando los mediadores de la Zona de Desarrollo Próximo, tal como lo propone Lev S. Vygotsky (1979). Buscando propiciar el desarrollo de las habilidades psicológicas al proponer un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante pueda resolver problemas usando los modelos de Newton, de Lagrange e interpolación "spline" suponiendo que, para lograrlo solo necesita cierta estructura.

Palabras clave: interpolación numérica, aprehensión del conocimiento

Abstract. There are various methods for numerical interpolation or approximation to a function by polynomials, some of which are treated as curve fitting, among them one can mention the Newton polynomial interpolation, Lagrange interpolation polynomials, and interpolation 'spline' or segmental interpolation of various kinds, among other methods for curve fitting or numerical modelling. This investigation aims to prove that a student can achieve to build their own structures to make the apprehension of the knowledge of the models treated, using the mediators of the Zone of Proximal Development, as proposed by Lev S. Vygotsky (1979). Seeking to encourage the development of psychological skills, by proposing a set of activities to enable the student to solve problems using the models of Newton, Lagrange and "spline" interpolation, assuming that, to achieve just need some structure.

Key words: numerical interpolation, apprehension of knowledge

Introducción

Denominamos interpolación con espaciamientos constantes o variables, a una curva definida mediante polinomios de distintos grados a partir de un conjunto de datos.

Como resultado de la aplicación de los modelos numéricos de Newton, Lagrange y spline al conjunto dado de puntos; se obtienen los polinomios de grado uno o lineal, cuadráticos o en general de grado n; correspondientes al mencionado conjunto; generando así una cantidad mayor de puntos que la proporcionada originalmente; y además los puntos generados pueden estar entre o fuera de los conocidos. Esto significa que el modelado numérico usando los tres métodos tratados, realiza la interpolación apoyándose en conceptos matemáticos distintos, los que imponen ciertas condiciones a cada uno de ellos; es decir, en el caso del modelo de Newton los espaciamientos entre los puntos respecto de la variable independiente deberán de ser constantes y el desarrollo se basa en el concepto de diferencias finitas, mientras que en el caso de los modelos de Lagrange y "spline", dichos espaciamientos pueden ser constantes o variables y el proceso dependerá del número de puntos del que se componga al conjunto dado.

Descripción de los Modelos matemáticos de interpolación

El desarrollo del modelo de interpolación de Newton (Ramos, 2011) considera dos aspectos fundamentales; el primero se refiere a que la distancia entre las absisas es una constante; es decir las distancias entre las ***x*** son iguales a una constante, y esta es una condición que impone este método, y es una limitante para los casos tratados por dicho procedimiento. El otro aspecto fundamental se refiere al concepto de diferencias finitas, las cuales pueden ser definidas de tres maneras, las diferencias finitas hacia delante, hacia atrás e intermedias o centrales; las que se utilizan en el proceso que aquí se trata son las diferencias finitas hacia delante.

En general, las k-ésimas diferencias hacia delante se definen como:

$$(1)\ldots \quad \Delta^k y_i = \Delta^{(k-1)} y_{i+1} - \Delta^{(k-1)} y_i; \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Donde: Δ es el operador diferencia

Tomando en cuenta la definición para las diferencias finitas se podrán realizar las siguientes sustituciones:

Para valores de $i = 0$, y $k=1$, que al sustituir en la ecuación (1), se obtiene:

$$(2)\ldots \quad y_1 = (1+\Delta) y_0$$

Otra sustitución, para valores de $i = 1$ y $k=1$, en la ecuación (1), se obtiene:

$$(3)\ldots \quad y_2 = (1+\Delta)^2 y_0$$

Realizando otra sustitución para valor de $i = 2$ y $k=1$, en la ecuación (1), se obtiene:

$$(4)\ldots \quad y_3 = (1+\Delta)^3 y_0$$

Así que, si se sigue un proceso, para distintos valores del subíndice "i", aplicado a la ecuación (1), y por inducción natural se puede establecer o aceptar que el valor de y_4, quedaría determinado por la ecuación:

$$(5)\ldots \quad y_4 = (1+\Delta)^4 y_0$$

Análogamente para y_5, y_6, y_7, … y en general para y_k:

$$(6)\ldots \quad y_k = (1+\Delta)^k y_0 \ ; \ k=1,2,3,\ldots$$

O bien al desarrollar el binomio, para un valor cualquiera de k:

$$(7)\ldots \quad y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{k}\Delta^k y_0$$

El desarrollo mostrado no es más que el desarrollo del binomio de Newton, expresado por la sumatoria:

$$(1+\Delta)^k y_0 = \left[\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}(1)^{k-j}\Delta^j\right] y_0$$

El cual se obtiene a partir del desarrollo del binomio de Newton, para el caso que aquí se trata; aplicado a y_0.

Ahora bien, si se considera que ***j*** es un valor cualquiera, menor que ***k***, y además se asume que las ***j***-ésimas diferencias son constantes, entonces se tendrá que las diferencias de orden superior a ***j*** serán cero, por lo que, a partir de la ecuación (9), se obtiene un polinomio en k, de grado j, el cual queda expresado a continuación:

$$(8)\ldots \quad y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$$

Al sustituir ***k*** en el segundo miembro de la ecuación 8 se obtiene un polinomio, de grado ***j***, expresado en términos de $\boldsymbol{x_k}$ o en general de ***x***, para cualquier valor de ***k***, es decir:

$$(14)\ldots \quad y_k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots + b_j x^j$$

Ecuación que representa el polinomio de interpolación de Newton o *modelo* numérico *de Newton* para interpolación; Es importante señalar ahora, que, de igual manera podrá ser utilizado para realizar las operaciones de integración y derivación o diferenciación inclusive.

En el modelo de interpolación de Lagrange, los espaciamientos no son necesariamente constantes, por lo que se le considera un método de interpolación con espaciamientos variables. Partiremos de la expresión general para un polinomio de grado n, de variable real x, dada por:

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ a_{n-1} x + a_n \quad \ldots(1)$$

Por el cual, se puede hacer pasar todos los puntos que definen a la función tabulada, (definida en forma tabular o como un conjunto de puntos) es decir:

$$\begin{aligned} p(x) = b_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ +b_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ +b_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ +b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ \vdots \\ \vdots \\ +b_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad \ldots(2)$$

Al evaluar la ecuación (2) en el punto $x = x_0$ obtenemos:

$$p(x_0) = y_0 = b_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_{31})(x_0-x_4)\ldots(x_0-x_n)$$

lo que implica que:

$$b_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)\ldots\ldots(x_0-x_n)}$$

Al evaluar la ecuación (2) en el punto $x = x_1$, obtenemos:

$$p(x_1) = y_1 = b_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)$$

lo que implica que:

$$b_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots\ldots(x_1-x_n)}$$

Al evaluar la ecuación (2) en el punto $x = x_2$, obtenemos:

$$p(x_2) = y_2 = b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)$$

lo que implica que:

$$b_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots\ldots(x_2-x_n)}$$

Así al evaluar sucesivamente la ecuación (2) en $x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n$; obtendremos los coeficientes $b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots, b_n$, respectivamente. Por lo tanto podemos expresar la ecuación (2) como:

$$p(x)=\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)\ldots\ldots(x_0-x_n)}\right]y_0+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots\ldots(x_1-x_n)}\right]y_1+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots\ldots(x_2-x_n)}\right]y_2+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots\ldots(x_3-x_n)}\right]y_3+\ldots+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})}\right]y_n \quad \ldots (3)$$

y esta ecuación (3) se puede sintetizar escribiendo:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[\coprod_{j=0}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]y_i$$

La cual representa el *modelo de Lagrange* y en la que $\coprod_{j=0}^{n}$ es la función producto PI que realiza los productos recorriendo *j desde 0 hasta n , siempre que j sea diferente de i.*

Se denomina spline (Madhumangal, 2007) o ajuste cúbico a una función definida en el intervalo $[x_0, x_1]$. Si existen polinomios cúbicos $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, tales que:

$$(1)\ldots \quad y(x)=p_i(x) \quad sobre \ [x_i, x_{i+1}], \quad i=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$(2)\ldots \quad p'_{i-1}(x_i)=p'_i(x_i)\ , \quad i=1,2,\ldots,n-1 \ (igual \quad derivada\ )$$

$$(3)\ldots \quad p''_{i-1}(x_i)=p''_i(x_i)\ , \quad i=1,2,\ldots,n-1 \ (igual \quad curvatura\ )$$

$$(4)\ldots \quad p_i(x_i)=y_i\ , \quad p_i(x_{i+1})=y_{i+1}\ ; \ i=0,1,2,\ldots,n-1$$

Podría notarse que en los puntos extremos x_0 , x_n , la continuidad sobre la pendiente y la curvatura no son asignadas. Las condiciones son asignadas en esos puntos, en general dependiendo de las aplicaciones.

Sea $[x_i, x_{i+1}]$, el intervalo que denota al i-ésimo intervalo.

Sea $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ y sea $M_i = y''(x_i)$, $i = 0,1,2,\ldots,n$

Sea el ajuste cúbico para el i-ésimo intervalo:

$$(5)\ldots y(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \ \ en\ [x_i, x_{i+1}]$$

Mediante un proceso algebraico se determinan los coeficientes $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$, **y** $\boldsymbol{d_i}$, lo cual representa el problema central de este modelo; obteniéndose para cada uno de ellos, las relaciones:

$$(6)\ldots \quad y_i = d_i$$

$$(7)\ \ldots\ b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$(8)\ \ldots\ a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}$$

$$(9)\ldots\ c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2h_{i+1}M_i + h_{i+1}M_{i+1}}{6}$$

De manera que, los coeficientes, $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$, **y** $\boldsymbol{d_i}$ en la ecuación (5) son determinados en términos de las (n+1) derivadas desconocidas: $\boldsymbol{M_0}$, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$, … $\boldsymbol{M_n}$, Las cuales se calculan mediante la relación:

$$(10)\ \ldots\ 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})M_i + h_{i+1}M_{i+1}$$

Esta relación es cierta para $i = 1,2,3,\ldots,(n-1)$. Entonces se dispone de (n-1) ecuaciones para resolver las (n+1) cantidades desconocidas: M_0, M_1, M_2, … M_n.

Las ecuaciones 6, 7, 8, 9 y 10 son las expresiones representativas del modelo de interpolación "spline" natural.

Diseño de las actividades y de las pruebas

Las actividades consisten en la presentación del tema por los estudiantes, en esta se les pide que hagan uso de: un discurso matemático, esquemas, tablas, gráficas, software y el uso de un lenguaje simbólico, además se propició en el estudiante la búsqueda y organización de la información para prepararlo en el uso personal de material informativo, como condición del autoaprendizaje; con objeto de conjuntar la comprensión de la teoría con la aplicación práctica se le pidió que propusiera un problema o caso de estudio en el contexto de la ingeniería respecto del objeto en cuestión; para lo que se sugiere que el estudiante use recordatorios (notas), claves o formulas, ayuda con los detalles o pasos que conforman el algoritmo e iniciar la presentación con un problema en el contexto de la ingeniería. Se diseño un sistema de evaluación, en el que se incluye un examen único para los dos conjuntos de estudiantes, el experimental y el de control, el cual se aplica en igualdad de condiciones, a la misma hora y con la misma duración y consistiendo de un solo problema en el que se utilice el método de Newton (o Lagrange o spline, según sea el caso) para su solución.

Metodología

Los objetos matemáticos descritos, han sido tratados para su aprendizaje, por estudiantes de ingeniería, utilizando el modelo de aprendizaje sociocultural de Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) para el que se sostiene, que ambos procesos, desarrollo y aprendizaje, interactúan entre sí considerando el aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje la que Vigotsky destaca y lo lleva a formular su famosa teoría de la "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP), que se puede definir como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Así mismo, subraya que el motor del aprendizaje es siempre la actividad del sujeto, la cual está condicionada por dos tipos de mediadores: "herramientas" y "símbolos", ya sea autónomamente en la "zona de desarrollo real", o ayudado por la mediación en la "zona de desarrollo potencial. Y la adquisición de aprendizajes se explica como formas de socialización. El autor concibe al hombre como una construcción más social que biológica, en donde las funciones superiores son fruto del desarrollo cultural e implican el uso de mediadores.

Las "herramientas" (herramientas técnicas) son las expectativas y conocimientos previos del alumno que transforman los estímulos informativos que le llegan del contexto. Los "símbolos" (herramientas psicológicas) son el conjunto de signos que utiliza el mismo sujeto para hacer propios dichos estímulos. Las herramientas no modifican los estímulos en sí mismos, pero sí modifican las estructuras de conocimiento cuando aquellos estímulos se interiorizan y se convierten en propios. Las "herramientas" están orientadas externamente y su función es, a su vez, orientar la actividad del sujeto hacia los objetos; al contrario los "símbolos" están orientados internamente y son un medio de la actividad interna que apunta al dominio de uno mismo. Todo este proceso recibe el nombre de "ley de la doble formación" puesto que el conocimiento se adquiere procesándolo, primero, desde el exterior, con las "herramientas" y reestructurándolo luego en el interior, a través de los "símbolos".

Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores ("herramientas" y "símbolos") generan en el alumno la citada "zona de desarrollo potencial", que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

En el aprendizaje escolar, la actividad del alumno está mediada por la actividad del profesor, que es quien debe ayudarle a activar los conocimientos previos (a través de las "herramientas") y a estructurar los conocimientos previos (a través de los "símbolos") proponiéndole experiencias de aprendizaje ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, sino en el límite de las posibilidades del sujeto. Es decir, en su "área o zona de desarrollo potencial" con el fin de ir ampliándola y desarrollándola. De esta forma, los procesos de aprendizaje y de enseñanza se solapan, convirtiéndose la propia actividad del alumno y la del profesor en mediadores de todo proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito escolar.

Realización del Experimento

En nuestro experimento buscamos propiciar el desarrollo de las habilidades psicológicas proponiendo un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante pueda resolver problemas usando los modelos numéricos aquí tratados, suponiendo que, para lograrlo sólo necesita cierta estructura, claves, recordatorios, ayuda con los detalles o pasos, aliento para seguir esforzándose; los cuales conjuntamente con la búsqueda de información para realizar una presentación, la interacción de la teoría con la aplicación práctica, el sistema de evaluación de conocimientos para considerar junto con el aprendizaje el logro de habilidades y hábitos positivos que propicien una educación continua y las implicaciones o resultados esperados (pensamiento crítico, autosuficiencia en el aprendizaje, hábitos y actitudes que configuren un tipo humano capaz de convertirse en agente consciente del desarrollo, creatividad, disciplina y organización en el trabajo, sentido de responsabilidad personal y social); son los elementos que constituyen los apoyos que se denominan en la teoría el andamiaje didáctico. En esta etapa de la indagatoria, el estudiante ha logrado resolver con relativa facilidad los problemas que se le proponen, en la medida en que los apoyos se aumentan en forma gradual, a fin de observar cuánta ayuda necesita y cómo responde.

Por su parte el maestro observa, escucha y toma notas cuidadosamente acerca de la forma en que el estudiante emplea la ayuda y el nivel de apoyo que necesita. Esta información ha servido para planear agrupamientos instruccionales, tutoría entre compañeros (actividad que en la teoría "vigotskyana", se denomina, la enseñanza recíproca), tareas de aprendizaje, trabajos para casa, uso de herramientas de programación de computadoras, uso de software de apoyo, etc. En este sentido el profesor ha guiado y facilitado con explicaciones, demostraciones y el trabajo con otros estudiantes, lo que hace posible el aprendizaje cooperativo. Así es como se ha experimentado para la aprehensión de los objetos matemáticos propuestos en esta indagatoria, de tal manera que teóricamente hemos supuesto que las herramientas psicológicas (Baquero, 1997), son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores y, el puente entre las habilidades interpsicológicas (sociales) y las intrapsicológicas (personales).

Una vez hecha la presentación por parte de los estudiantes, en la siguiente fase del experimento se realiza el desarrollo matemático por parte del profesor, aclarando las inquietudes y dudas de los estudiantes y haciendo énfasis principalmente en las recomendaciones que se consideran pertinentes y de acuerdo con lo observado, lo escuchado y las notas que se tomaron cuidadosamente durante la presentación de los estudiantes; se ilustra con un caso resuelto en clase y se propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula y desarrollarse, tanto en el escritorio, así como, valiéndose de los instrumentos electrónicos de cómputo. Finalmente se lleva a cabo una serie de ejercicios en el aula, tipo taller y organizada por estudiantes y profesor resolviendo varios problemas relacionados con el contexto de la ingeniería y discutiendo los resultados obtenidos. Por último se realiza un examen del objeto matemático tratado, en forma individual.

En la investigación se aplicó esta metodología a un grupo experimental, mientras que otro grupo recibió la instrucción en la forma tradicional; en la que el profesor es el expositor, realiza ejemplos pregunta acerca de dudas, las aclara, propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula de clase, incluyendo prueba de escritorio y programa por computadora y aplica el examen en forma individual. En ambos casos; es decir, en el grupo experimental como en el grupo de control se utilizó el mismo tiempo para la enseñanza de los objetos de estudio (6.0 hrs.) y se aplicó el mismo tipo de examen; y cuyos resultados se analizan mediante la prueba t independiente de comparación simple.

Resultados y conclusiones

Lo que aprendemos depende de las herramientas psicológicas que tenemos, y a su vez, las herramientas psicológicas dependen de la cultura en que vivimos, consiguientemente, nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas; que es el hecho central de la teoría "Vygotskyana", en la que se postula que el ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas, de que dispone, y el conocimiento se adquiere, se construye, a través de la interacción con los demás mediada por la cultura, desarrollada histórica y socialmente. Por lo que hemos propuesto el probar experimentalmente que el estudiante puede lograr la construcción de sus propias estructuras para alcanzar el aprendizaje de los objetos matemáticos tratados (y de cualesquiera otros objetos matemáticos); coincidiendo con Vygotsky en el sentido de que la cultura nos dice qué pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento, por esta razón, la teoría sostiene que el aprendizaje es mediado y que además la interacción social es el origen y el motor del aprendizaje. Concluyendo que la investigación ha comenzado a producir resultados satisfactorios, en contraste con aquellos grupos en los que se ha seguido con la enseñanza tradicional (grupo de control). Así mismo, resulta importante señalar, que se ha observado la dificultad de resolver problemas por parte de los estudiantes (grupo experimental), cuando se les retiran los apoyos estratégicos para sostener o soportar el aprendizaje; sin embargo, el grupo experimental da mejores resultados en el aprovechamiento escolar, que el grupo con enseñanza tradicional.

Referencias bibliográficas

Baquero, R. (1997). *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique S.A.

Madhumangal, P. (2007). *Numerical Analysis for scientists and enginners. Theory and C programs*. Londres: Alpha Science.

Ramos, R. y Aguilar, A. (2011). *Métodos Numéricos I*. México: FESC-UNAM

Vygotsky, L. (1979). *Desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo-Crítica.