

ENSEÑANZA Y COMPRENSIÓN DE LA RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Fausto Mendoza Díaz, Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera

Cecyt No. 4 IPN

México

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav

mendizf@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx, hchavez_santiago@cinvestav.mx

Resumen. Ya que la línea recta y los conceptos que implica, tales como la pendiente, son fundamentales para la educación matemática superior, se realizó una evaluación diagnóstica a un grupo al inicio del curso de Geometría Analítica de bachillerato tecnológico, estructurada según los conocimientos elementales previos requeridos para esa asignatura. El resultado fue la calificación máxima 3.75, en escala de 0 a 10. Por tanto, se indagó, mediante el uso de medios alternativos en la enseñanza (entre ellos un programa de cómputo) y entrevistas estructuradas en cámara Gesell, la comprensión resultante de los estudiantes de lugar geométrico y de la recta.

Palabras clave: bachillerato, comprensión, lugar geométrico, medios

Abstract. Since the straight line and the concepts it involves, such as the slope, are fundamental for higher mathematics education, a diagnostic evaluation was applied to a group at the beginning of the course of Analytic Geometry at a technological high school, regarding the previous basic knowledge required to study that subject. The result was 3.75 at the top rating, on a scale of 0 to 10. Therefore, by using alternative means of teaching (including a computer program) and structured interviews in a one-way screen room, we inquired about the results of students' understanding of the locus of the straight line.

Key words: high school, understanding, locus, media

Introducción

En los términos de un acuerdo académico interinstitucional suscrito en la Cd. de México entre el DME de Cinvestav y el CECyT No 4 del IPN, se desarrollan acciones de investigación y de indagación de la enseñanza de las matemáticas, de sus condiciones y de sus resultados, en la comprensión de los estudiantes de temas selectos de matemáticas en el bachillerato tecnológico. Aquí informamos del desarrollo de indagaciones de la enseñanza a un grupo de 3er semestre en un curso de Geometría Analítica, en particular respecto al tema del lugar geométrico de la recta en el plano.

Objetivo general y antecedentes

El Seminario de Vinculación se ha propuesto: Estudiar las causas posibles de los problemas, derivados de los procesos de enseñanza y de aprendizaje desarrollados en el aula, identificados por los profesores titulares de las *unidades de aprendizaje* de matemáticas, para construir propuestas alternativas a los problemas en cuestión.

En los planes y programas de estudio de enseñanza secundaria para matemáticas (SEP, 2011, p. 90) los contenidos de cada grado están organizados en cinco bloques. Para el segundo grado,

el bloque 3, en su punto 3.7 refiere: “Anticipar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante” (SEP, 2011, p. 90). El punto 3.8 refiere: “Analizar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando cambia el valor de m , mientras el valor de b permanece constante” (SEP, 2011, p. 90). Para el tercer grado, el bloque I relativo a gráficas establece en el punto 1.6: “Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa” (SEP, 2011, p. 118); en el bloque 3 el punto 3.5 refiere: “Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos (SEP, 2011, p. 126), mientras que el punto 3.6 refiere: “Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones (SEP, 2011, p. 127).

Marco de referencia

Acuña (2006) realiza importantes aportaciones mediante sus observaciones relativas al tratamiento que el estudiante de bachillerato da a las gráficas, como dibujo y no como figura, en tareas de construcción e interpretación. La autora muestra que “los ejes cartesianos, como marco de referencia de la gráfica son, en ocasiones, interpretados sólo como dibujo, situación que entorpece la interpretación o construcción de la gráfica” (p. 216). Además, el estudiante considera signos gráficos que le son significativos, en lugar de tomar los ejes cartesianos como referencias.

El tema de nuestro interés se imparte en “La unidad de aprendizaje Geometría Analítica [que] pertenece al área de formación Científica, Humanística y Tecnológica básica de Bachillerato Tecnológico del Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional” (DEMS, 2009, p. 2). El programa de estudios indica los propósitos que rigen a la enseñanza y la modalidad de ésta:

Las *competencias disciplinares* (general y particulares) implican, como principales objetos de conocimiento: lugares geométricos, línea recta, cónicas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas. Cada *competencia* se desagrega en resultados de aprendizaje (RAP) que se tratan mediante actividades sustantivas, con el propósito de indicar una generalidad para desarrollar las secuencias didácticas que atenderán cada RAP (DEMS, 2009, p. 2).

Para constatar el logro de los objetivos, el ejercicio docente se guía por los resultados de:

La *evaluación formativa*, cuya finalidad principal es conseguir el perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en un momento en el que todavía puede producirse. Por tanto, deberá aplicarse durante el desarrollo del propio proceso didáctico.

La *evaluación sumativa*, que coincide con lo que tradicionalmente se ha entendido por evaluación. Es la más utilizada en las instituciones docentes y la que se conoce con mayor precisión. Su característica fundamental es que se utiliza *al final de cada periodo de aprendizaje*. La finalidad de este tipo de evaluación es determinar el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje por parte del alumno. Determina su posición relativa situándolo en una escala de calificaciones conocida.

Condiciones para el desarrollo del programa. Para la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica se señalan 90 horas por semestre. El programa de estudio asigna 45 horas (50% del programa) para el estudio del tema de la recta. Toda la unidad I señala como competencia particular a lograr que el estudiante resuelva “problemas de lugares geométricos, en particular de la línea recta, empleando las propiedades del plano cartesiano, en situaciones académicas y sociales” (DEMS, 2009, pp. 7-9). Esta unidad incluye tres RAP, a saber: RAP 1: “describe lugares geométricos, mediante la localización de puntos en el plano cartesiano”, RAP 2: “manipula los elementos de la ecuación de la línea recta en sus diferentes expresiones”, RAP 3: “emplea las condiciones de la línea recta en la solución de problemas, mediante el uso de ecuaciones, en situaciones académicas y sociales” (DEMS 2009, pp. 7-9).

Preguntas de indagación

Para esta unidad se seleccionó el tema de la recta, el cual se ubica en la 1ª unidad, porque se consideró que su tratamiento favorecería la comprensión del estudiante, quien está al menos relativamente familiarizado con ese tema por su introducción en la educación secundaria; otra razón es que el tema incorpora varios conceptos fundamentales de la matemática en general, como pendiente, longitud, etc. Las preguntas que se planteó la docencia respecto al tema de la recta seleccionado de esta unidad de aprendizaje fueron:

- ❖ ¿Cuáles son las condiciones iniciales del conocimiento de los estudiantes respecto al requerido por del plan de estudios respectivo (véase DEMS, 2009, p. 5) para acceder a la enseñanza del tema de la recta en el aula?
- ❖ ¿Cuál es el resultado de la implementación de una estrategia de enseñanza de la recta, en la que se utilice un programa de cómputo y un libro de texto, en la comprensión de los estudiantes del contenido enseñado?

Métodos e instrumentos

Con carácter cualitativo, se implementaron acciones en el aula del curso de Geometría Analítica para enfocar el desarrollo de su enseñanza y sus resultados en la comprensión de los estudiantes. La Tabla 1 presenta, en orden cronológico por su aplicación, la caracterización de los instrumentos aplicados para recopilar datos para la indagación: tres cuestionarios (CE, CF, CS), una estrategia de enseñanza (AM) y una entrevista individual (G-EG).

Resultados y análisis

CE. En el cuestionario CE de diagnóstico aplicado el primer día de clases, el reactivo 1 proporcionó el plano de coordenadas rectangulares con las unidades indicadas en cada eje y planteó: ¿Puedes representar en la gráfica la siguiente ecuación? $y = 2x + 4$. Ningún alumno respondió correctamente este reactivo y solamente 6 alumnos de 44 (14%) pudieron discernir que la gráfica correspondía a una recta, pero no la trazaron correctamente. 10 alumnos (23 %) sólo trazaron un punto que no pertenece a la recta (Figura 1) y 14 alumnos (32%) no contestaron.

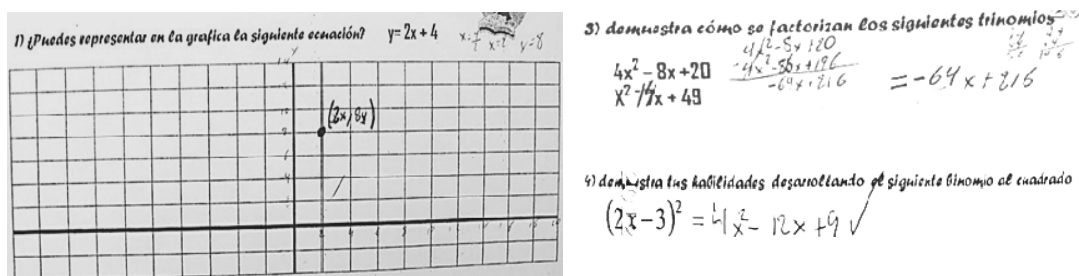


Figura 1. Expresión gráfica y simbólica en las respuestas a los reactivos 1, 3 y 4.

De los reactivos 2, 3 y 4 (véase la Figura 1) para aplicación del álgebra, sólo en el 4, que corresponde al desarrollo de un binomio al cuadrado, se obtuvo el mayor número de respuestas correctas (5 alumnos de 44, o 12%); las respuestas incorrectas fueron muy diversas y la más recurrente, de 4 alumnos de 44 (9%), fue la suma del cuadrado del primero y segundo términos.

Tabla 1. Organización y caracterización de los instrumentos diseñados para la indagación.

Instrumentos y técnicas	Objetivo	Contenido	Criterios de revisión	Condiciones
CE 4 reactivos Impreso en papel para contestación individual con lápiz.	Identificar conocimiento adquirido previo al de la recta y nociones de lugar geométrico. Definir estrategias	De secundaria: 4 reactivos: R-1: Plano cartesiano, R-2: Álgebra en G. A., R-3 y R-4: Álgebra para su aplicación en G.A., expresiones verbales,	2.5 p/reactivo R-1 Dada ecuación, determinar gráfica. R-2, 3,4: proceso de solución y	Aplicación en aula, al inicio del curso. Uso de calculadora y regla. 44

	de enseñanza.	simbólicas.	respuesta de ecuaciones, factorización, y productos notables.	estudiantes. Duración: 50 min.
AM Uso GeoGebra. Hojas control impresas para contestación individual con lápiz. Videograba- ción	Crítica, análisis y conclusiones de conceptos de G. A., con medio digital para una presentación dinámica.	Distancia entre dos puntos, pendiente de una recta y valores notables.	Esta sesión dio origen al cuestionario CF	Exposición magistral en aula Proyección del uso del GeoGebra por el docente 23 estudiantes Duración: 40 min.
CF 2 reactivos del texto (Cruz, 2003, p. 126) Impreso para contestación individual.	Identificar avance en conocimiento adquirido para refinar enseñanza cuando el aprendizaje aún puede producirse (DEMS 2009)	Interpretar y aplicar pendiente de una recta. Pertinencia de puntos a una recta y formas de la ecuación de una recta. Gráfica auxiliar.	Peso: 5 p/reactivo. Tipos de respuesta: SS (sin sentido), SR (sin respuesta).	Actividad para su desarrollo extra clase. 23 estudiantes
CS 7 reactivos. Impreso en papel para contestación individual con lápiz.	Determinar el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje por parte del alumnado.	R-1 y R-2: Perímetro y área de Un triángulo en el plano cartesiano, puntos, representación gráfica para explorar respuestas. Distancia entre puntos. R-3, R-4: Elementos de la recta, características, formas algebraicas y operatividad. R-5 y R-6: Pendiente. Interpretar lugar geométrico. R-7: División de segmento de recta en una razón dada.	Elegir 6 de los 7 reactivos. Nota máxima 6 Ponderación: 1 punto, o proporcionalmente por procedimiento de resolución. R-1, R-2 y R-7 no se consideran para análisis en este estudio.	Aplicación en aula Uso de calculadora y regla. 27 alumnos Contestación en 50 min.
G-EG 2 reactivos Videograba- ción y escritura en papel con lápiz	El alumno conteste preguntas desprendidas del análisis de las contestaciones a los cuestionarios aplicados a fin de obtener elementos para una valoración cualitativa de la enseñanza.	Lugares geométricos de ecuaciones de primer grado y segundo grado, tabulaciones y gráficas respectivas en plano cartesiano, identificación y cálculo de pendientes	Reactivos (Figura 7) originados del R1 del CE, requieren trazar el lugar geométrico de ecuaciones de primer grado. El análisis sólo consideró la interpretación a las preguntas y sus respuestas.	Aplicación en cámara Gesell. Un caso seleccionado por respuestas a CE y disposición al interrogatorio Duración: 60 min.

Nomenclatura: G. A.: Geometría Analítica; R-#: reactivo #;

CE: cuestionario de diagnóstico; AM: Uso de medios en la enseñanza en aula;

CF: Cuestionario de valuación formativa; CS: Cuestionario de evaluación sumativa;

G-EG: Guión de entrevista individual en cámara Gesell.

La Figura 2 resume las puntuaciones obtenidas con la aplicación del cuestionario CE.

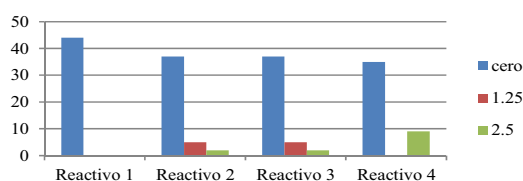


Figura 2. Resultados de la aplicación del cuestionario CE.

Estrategia AM y cuestionario CF. Bajo la consideración de los resultados de la aplicación del cuestionario CE se diseñó una estrategia de enseñanza que consistió en lo siguiente: se impartió una sesión de clase grupal, en la que se utilizó el programa de cómputo *GeoGebra* (Hohenwarter, M., *GeoGebra*.www.geogebra.org.) para realizar una recapitulación de los temas de lugar geométrico y recta. Al finalizar la enseñanza, se proporcionó una hoja de trabajo CF con dos reactivos tomados del texto (Cruz, 2003, p. 126), para su resolución extracласe. El reactivo 1 solicitó: “Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-2/3$ y que pasa por el punto $(5, 7)$ ”; 17 alumnos de 23 (74%) no utilizaron el valor proporcionado de la pendiente ni su aplicación a la ecuación de la recta, de los seis estudiantes restantes sólo tres calcularon el resultado correcto y los otros tres cometieron errores en el proceso algebraico. El reactivo 2, que planteó: “hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(1, 2)$ y $P_2(-3, 5)$ ”, sólo un alumno (4%) lo contestó correctamente, seis alumnos (26%) más calcularon el valor de la pendiente, cinco estudiantes (22%) calcularon la distancia entre los dos puntos y consideraron ésta como el resultado final. El resto de los estudiantes omitió su respuesta (SR en la Figura 3) o presentaron trazos arbitrarios y sin sentido (SS en la Figura 3) relativos a una recta. Se manifestó el desconocimiento casi total de las propiedades de pertenencia de puntos a una recta y se agudizó aún más la confusión de la información que poseen los estudiantes de los fundamentos de matemáticas, puesto que no los condujo al resultado correcto. No obstante, los estudiantes sí utilizaron el plano coordenado anexo al reactivo, y la mayoría trazó el segmento de recta de manera correcta, aunque no se le requirió. En resumen, sólo un alumno de 23 (4%) contestó correctamente. El estado general del grupo después de este ejercicio fue: cuatro estudiantes (17%) obtuvieron una calificación aprobatoria, tres de ellos con 8, el restante

con 10 y consiguieron una mejoría relativa respecto a sus resultados en el cuestionario CE de diagnóstico, pero el 83% del grupo todavía exhibió un desempeño muy deficiente. Los resultados de la aplicación de CF se resumen en la Figura 3.



Figura 3. Resultados del cuestionario CF: Dos reactivos, 23 estudiantes.

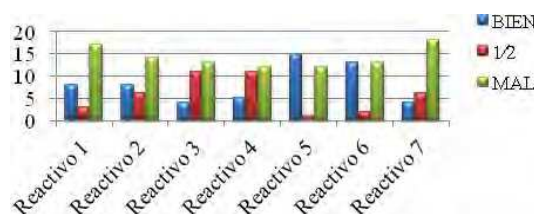


Figura 4. Resultados del cuestionario CS.

Cuestionario CS. La Figura 5 resume los tipos de desempeño en este instrumento. De un total de 27 alumnos, 12 obtuvieron resultados de 3 puntos o más, que se considera aprobatorio. Los reactivos 1, 2, y 7 correspondían a temas de la unidad de aprendizaje no relativos a este estudio, el reactivo 3 sólo obtuvo cuatro respuestas correctas, el 4 sólo cinco respuestas correctas. Para ambos reactivos 5 y 6, que implican obtener la pendiente y determinar el lugar geométrico, ningún alumno consiguió determinarlo correctamente, 15 alumnos de 28 (54%) obtuvieron el valor correcto de la pendiente.

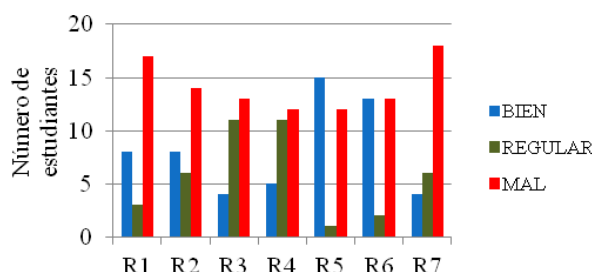


Figura 5. Resultados del cuestionario CS de evaluación sumativa.

Guión de entrevista G-EG. El diseño de la entrevista se basó en preguntas desprendidas del análisis de las contestaciones dadas al instrumento CE por la entrevistada y consistió, por tanto, en la presentación del problema para su solución ante preguntas orales. Las cuestiones fundamentales tratadas fueron la de lugar geométrico y la interpretación de la pendiente (véase la Tabla 1). La estudiante entrevistada (véase la Figura 6) enfrentó dificultades para determinar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación algebraica y no consiguió operar correctamente los conceptos de intersección con los ejes, simetría, ni extensión de una curva. En lo relativo a la pendiente, manifestó nociones y relacionó la inclinación de una recta con la

pendiente, pero mostró confusiones al pretender hacerla equivalente a la longitud del segmento en análisis; logró discernir finalmente que ciertos valores de la pendiente pueden ser positivos o negativos y que se relacionan con el grado de inclinación de la recta. La entrevistada cometió errores en la ubicación de los puntos en el plano y en los cálculos; inicialmente su trazo de la recta en el plano se restringió al de los segmentos determinados por los puntos resultantes de la tabulación, lo cual coincide con el señalamiento de Acuña: *...la prolongación infinita de una recta que, de modo forzoso, se representa como sólo un segmento* (2006, p. 219). Sin embargo, reconoció el tipo de pendiente por su signo en la ecuación dada. A la ecuación de segundo grado la asoció con un triángulo.

Prof.: Entonces, si tú representarás esta ecuación necesitarías dos puntos y ya puedes hacer su representación, si tienes la ecuación, con dos puntos ya puedes representarla. Tú ya sabes qué tipo de figura geométrica te daría esta ecuación (se le indica una ecuación de primer grado) ésta es una recta, ¿y ésta otra? (se le muestra a la alumna una expresión de segundo grado).

Alum: Un triángulo.

Prof.: ¿Por qué un triángulo? ¿En qué te fundamentas para decir que es un triángulo?

Alum: No, es una recta.

Prof.: Una recta. Entonces, ¿en qué te fundamentas para decir que es una recta?

Alum.: Porque me basé en el valor de 'x' y 'y' para trazar la ecuación.

Prof.: Vamos a hacer una sesión de Analítica. Con esta hoja que tenemos aquí vamos a encontrar algunas expresiones. Si ves, ahí tenemos una expresión algebraica, que es ésta. ¿Me puedes decir otro nombre con que se le llama a esta expresión algebraica?

Alum.: Una ecuación.



Figura 6. Forma tabular y gráfica de $y = x + 5$ y $y = \square x + 5$ en la entrevista.

Prof.: ¿Puedes hacer el trazo de la figura, con esa expresión algebraica?

Alum: Necesito suponer un valor "x" y luego sustituirlo y darle un valor a "y"

Prof.: ¿Puedes hacerlo y representarlo gráficamente?

Alum: (Realiza operaciones; véase en la Figura 7, izq.).

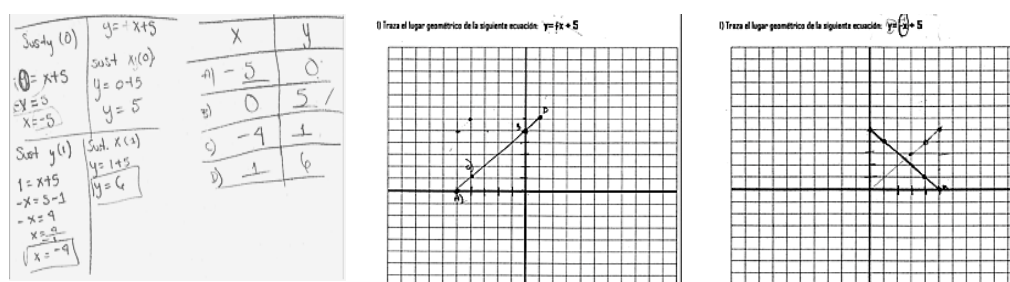


Figura 7. Registro de las respuestas de la alumna en hojas de control.

Conclusiones y observaciones

Los resultados del cuestionario CE revelaron que la educación secundaria no contribuyó a la comprensión de los alumnos de la recta como lugar geométrico. Aunque fue novedoso el uso del GeoGebra en la enseñanza, los resultados obtenidos señalan que este recurso no contribuyó de inmediato a la comprensión del tema de la recta. No obstante, durante la enseñanza de temas posteriores los estudiantes lo utilizaron de manera más eficiente en la búsqueda de respuestas a preguntas que se les planteaban y en la realización de ejercicios. Por su parte, el uso del libro de texto (Cruz, 2003) no resultó en lo esperado por el docente, según su experiencia anterior en la enseñanza del mismo tema a otros grupos de estudiantes. Los textos clásicos de Geometría Analítica (Lehmann, 2004, por ejemplo) delegan el tratamiento gráfico al lector. Los resultados obtenidos concuerdan con lo señalado por Acuña (2006), como el hecho de que el estudiante "... confunde la representación (el segmento) con lo representado (la recta), en especial porque las rectas como objetos matemáticos infinitos no pueden ser dibujadas. La idea de una recta que se detiene si el trazo del lápiz cesa tiene carácter empírico" (Acuña, 2006, p. 229).

Referencias bibliográficas

- Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, pp. 215-236. México: Santillana-Cinvestav.
- Cruz, T. (2003). *Geometría Analítica*. México: EDIMAF.
- DEMS. (2009). Dirección de Educación Media Superior. *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría Analítica*. México, D. F.: IPN.
- Lehmann, Ch. H. (2004). *Geometría Analítica*. México: LIMUSA.
- Hohenwarter, M. (2009). *GeoGebra3.2*. Recuperado el 15 de abril de 2011 de <http://www.geogebra.org>

SEP (2011). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2011*. México: Autor