

EXPLORACIÓN DE LO BILINEAL DESDE LA PRÁCTICA SOCIAL DE MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE RESORTES

Silvana Gómez, Jaime Arrieta, Leonora Díaz
Universidad de los Lagos
silvana.gomez@usach.cl

Chile

Resumen. En el marco de una investigación en desarrollo sobre la construcción de lo bilineal al ejercer prácticas de modelación y simulación, se reporta la aplicación de una secuencia basada en prácticas sociales de modelación. A partir de un fenómeno simulado virtualmente, los estudiantes registran datos que sistematizan en una tabla con la que predicen y determinan un modelo algebraico. En la experiencia fueron considerados cinco estudiantes de cuarto año de ingeniería y a dos estudiantes de, cuarto año medio.

Palabras clave: prácticas sociales, modelación, modelos

Abstract. Upon an investigation about the development in bilinear construction, after exercising modeling and simulation practices, the application of a sequence based on social behavior of modelation is reported. From a visually simulated phenomenon, students register the data into a standardized board which helps them to predict and develop an algebraic procedure. The subjects for the experiment were five students from the fourth year of engineering and two seniors from high school.

Key words: social practices, modelling, models

Introducción

La experiencia que se reporta es la actividad exploratoria de una investigación en curso que estudia la construcción de lo bilineal en el ejercicio de prácticas sociales de modelación y simulación, tuvo como antecedentes, los trabajos de Arrieta (2003) y Méndez (2006) que se desarrollaron en la línea de investigación de las prácticas sociales, en la emergencia del conocimiento matemático. Estos autores intentan explicar cómo, en el ejercicio de las prácticas sociales, los actores construyen sus conocimientos como herramientas. Se Adaptó el diseño de Méndez (2006) quién investigó la construcción de lo multilineal al ejercer la práctica de modelación de un sistema de resortes, reportó que lo multilineal se construye cuando se articulan dos o más modelos lineales. Es decir es visto y trabajado como dos modelos disjuntos al ejercer esta práctica.

Problemática

Los objetos matemáticos son entes fundamentales en actividades matemáticas cuya intención es el desarrollo de las matemáticas, pero son herramientas cuando la intención de las actividades es el uso de la matemática con diferentes fines, por ejemplo cuando se tiene que identificar una realidad con una estructura matemática de un fenómeno en estudio, requiriendo para ello conocer la estructura matemática del fenómeno, el comportamiento de las variables que intervienen en el fenómeno (Arrieta, 2003). El modelo de enseñanza

tradicional en matemáticas suele entrenar en el empleo de algoritmos para la resolución de ejercicios, en la ejercitación mecánica a través de guías, centrando las actividades en los objetos matemáticos para el desarrollo de las matemáticas, dejando de lado el pensamiento matemático, el estatus de herramienta que tienen los objetos matemáticos, las prácticas del uso de las matemáticas, el proceso de constitución de relaciones entre variables que permiten estudiar un fenómeno, la construcción de modelos y la predicción, los que casi no se aprecian en los diseños, actividades que los profesores emplean en el aula, esto lleva a que solo un escaso porcentaje de alumnos sean capaces de trabajar de manera eficiente con modelos explícitos de situaciones complejas concretas, puedan seleccionar e integrar diferentes representaciones, relacionándolas directamente con situaciones del mundo real, posean la habilidad de razonar flexiblemente y de lograr cierta profundización de los contextos, elaborando y comunicando sus explicaciones y razonamientos, sobre la base de sus propias interpretaciones, argumentos y acciones.

Antecedentes

La modelación de fenómenos es una práctica poco usual en el aula. Históricamente se observa que esta práctica, se ejerce en los laboratorios experimentales en diferentes áreas de la ciencia, pero pocas veces en el salón de clase. La Historia de la ciencia muestra la íntima relación entre la física y la matemática y cómo en nuestros días esta relación, en el ambiente escolar, se ha ido perdiendo. Bassanezi y Biembengut (1997) denominan al proceso dinámico que ayuda a entender ciertos problemas de física, química y biología modelización, reportando que han existido intentos por hacer uso de la modelización matemática como un método de enseñanza-aprendizaje, en perfeccionamiento de profesores y en cursos regulares, los que mostraron que el proceso de modelización puede ser más eficiente que el método tradicional teoría-aplicación. Para ellos la mayoría de los autores se refieren a la modelización matemática como el proceso que utiliza conceptos y técnicas esencialmente matemáticas para el análisis de situaciones reales. Afirman que la palabra modelación es una “contracción” de los términos modelización y educación es decir la suma de modelización más educación. La modelización matemática también se considera como una herramienta útil que ayuda a la adquisición de competencias, en España desde el ICMI XIV se ha establecido como una herramienta útil para aproximar las matemáticas al ciudadano. Biembengut y Hein por doce años han investigado lo que llaman modelaje matemático, la construcción de un modelo matemático siguiendo ciertos pasos, para ellos un modelo matemático es el conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen de alguna manera un fenómeno el que se puede formular a través de varias alternativas, expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, tablas, etc. En el ámbito internacional el área de investigación denominada

Modelling and Applications in Mathematics Education (Blum, Galbraith, Henn y Niss, (2007); Barbosa (2006) se ha consolidado, estos autores consideran a la modelación como un proceso que génesis en la conceptualización de una situación o problema de la realidad, teniendo como punto de partida a un conjunto de situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela. En Blum et al. (2007) se presentan algunas evidencias del grado de desarrollo e institucionalización de la investigación en *modelación y las aplicaciones en Educación Matemática* a nivel internacional; se destaca, por ejemplo, la conformación de temas de estudio relativos a la modelación y las aplicaciones, entre ellos: epistemología, la modelación como competencias y su relación con otras competencias, prácticas de enseñanza y aprendizaje de la modelación y las aplicaciones, los aportes de la tecnología a la modelación y las aplicaciones, y la implementación de la modelación como proceso y recurso en el aula de matemáticas, existen reportes que destacan su importancia en el diseño de situaciones y actividades para la construcción de algunos conceptos matemáticos en el aula de clase (Bassanezi, (2002); Villa, (2007); Biembengut y Hein, (2004); Borromeo (2006). Entre los argumentos que sustentan la importancia de la modelación en las aulas escolares colombianas el MEN (1998) plantea que:

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa.(p. 101).

De esta manera, el MEN (2006) asume un modelo como un concepto clave dentro del proceso de modelación y lo define en los siguientes términos:

Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (p.52).

Desde la perspectiva socioepistemológica, Francisco Cordero considera a la modelación como una actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos, ejemplo de esto es el uso de la modelación gráfica para resignificar la parábola. Arrieta (2003) concibe la modelación como actividad humana con la intención de comprender y transformar la naturaleza, una forma particular de participar en el mundo, una forma de interacción con los

otros, cómo actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en el aula, usando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza confrontando y argumentando diferentes versiones, desde este enfoque lo lineal, lo cuadrático, lo inversamente proporcional, lo bilineal por ejemplo son herramientas utilizadas en las prácticas sociales de modelación ejercidas en contextos sociales, teniendo su significado en cada escenario donde se ejercen las prácticas, así la linealidad al ejercer la práctica llamada “*la figuración del devenir de las cualidades*” significa líneas rectas, es decir ponen en el centro a los modelos gráficos (líneas rectas) y a partir de ellos construyen diferentes argumentos, significados y herramientas de lo que es la linealidad. En la práctica llamada “*la numerización de los fenómenos*”, las tablas con razón de cambio constante se ponen como centro para así partir de ellas construir los significados. A la estructuración discursiva de las prácticas sociales en el aula, Arrieta llama modelación como proceso de matematización en el aula.

Perspectiva teórica

La perspectiva teórica con que se aborda la investigación es la socioepistemología que considera la naturaleza social del conocimiento como eje central y al sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden a ejercer prácticas (Arrieta, 2003). Se concibe al conocimiento científico como una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos (Méndez y Arrieta 2005) se sostiene que es en el ejercicio de las prácticas donde los conocimientos adquieren el estatus de herramientas, los conocimientos son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir se interactúa con ellos pero a nivel de herramientas. El considerar el carácter discursivo en la construcción social del conocimiento significa incluir las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de una experiencia, el estudio de las interacciones de los alumnos que se dan en el proceso de aprendizaje o al momento de ejercer las prácticas sociales, las herramientas utilizadas y sus construcciones da la oportunidad de caracterizar prácticas de construcción del conocimiento matemático cuando se trata con los fenómenos (Arrieta, 2003). Es por eso que en esta línea se investiga qué prácticas se ejercen en un contexto discursivo propuesto, las herramientas que utilizan y qué condiciones de significación se crean colectivamente. Se afirma que es en el ejercicio de ciertas prácticas sociales usando herramientas, donde aparecen, se estructuran y se movilizan, como argumento, ciertas nociones matemáticas.

La modelación cómo práctica social

Desde la perspectiva socioepistemológica, las prácticas sociales son la base de los diseños donde la actividad humana se reconoce como una organización social donde se construye el

conocimiento (Cordero, 2001). Desde esta perspectiva al hablar de prácticas de modelación se refiere a las que se desarrollan en interacción con diversos fenómenos, conjeturando y realizando predicciones a cerca de ellos, utilizando modelos. Al ejercer una práctica de modelación, se articula dos entidades, para actuar sobre una de ellas llamada lo modelado, a partir de otra llamada modelo. Al decir de Arrieta (2003), una entidad se convierte en modelo, cuando el actor la usa para intervenir en otra entidad. Su razón de ser es la de herramienta. Las entidades matemáticas en esta práctica son herramientas. Así, la modelación como práctica social, en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, se considera fuente que desarrolla procesos de matematización. Dentro de este proceso se han identificado actividades claves para el desarrollo de la práctica de modelación, como lo son: Crear herramientas específicas (las gráficas, las tablas numéricas) y formas particulares para describir los hechos, construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica, desarrollar formas de predicción, argumentar y validar versiones, de otros o de ellos mismos, utilizando múltiples herramientas (Arrieta, 2003).

Propósitos de la actividad exploratoria Interesa investigar la práctica social de modelación de un sistema de resortes como un proceso de matematización en el aula, donde se considera a ésta última como un contexto social en la que el conocimiento matemático es negociado y construido (Bauersfeld (1998); Cobb (1986), citado por Arrieta 2003, p 72). Se espera que al realizar el estudiante la modelación de un sistema de resortes, la derivada parcial aparezca como herramienta con la cual se interactúa para ayudarse al momento de construir una fórmula la que se transformará en modelo algebraico.

Metodología Se considera la práctica social de modelación de un sistema de resortes como base epistemológica en el diseño de la secuencia de aprendizaje, las que se centran en las prácticas que ejercen los estudiantes utilizando herramientas en un contexto social, o sea en grupos de trabajo. La metodología empleada es la ingeniería didáctica, considerando el análisis a priori, la experimentación y análisis a posteriori.

Análisis a priori

Fase I la experimentación A partir de una situación real, los estudiantes tienen que encontrar cuáles son las variables involucradas para empezar a buscar datos y construir las tablas, exploran el simulador, montan el arreglo experimental para estudiar la elasticidad de un sistema compuesto por dos resortes en serie. Al darse cuenta que las variables son el peso de cada objeto y la elongación total del sistema de resortes, comienzan a construir una tabla de tres columnas. Un punto importante a considerar es que tienen que acordar un punto de referencia.

En la Fase II. Acto de modelar-predicción Se le presenta la siguiente situación: Si colocamos 30 gramos en el porta pesas 1 y 30 gramos en el porta pesas 2 ¿en qué posición estará el indicador?. En esta situación los estudiantes deben buscar algún conocimiento que le permita predecir, la regla de tres, el promedio. Pudiera suceder que ocupe razón de cambio. Al construir herramientas de modelación, están modelando.

En la Fase III Construcción del modelo algebraico y gráfico Se le presenta la siguiente situación: Si colocamos p_1 gramos en el portapesas 1 y p_2 gramos en el portapesas 2 ¿en qué posición estará el indicador?. Aquí se trata de que los estudiantes construyan un modelo algebraico del fenómeno. Construyen la fórmula calculando las razones de cambio, es decir lo que se estira el sistema al colocar un gramo en la pesa p_1 , $\frac{\Delta x}{\Delta p_1}$ y lo que se estira el sistema al colocar un gramo en el porta pesas 2, $\frac{\Delta x}{\Delta p_2}$. Para encontrar la posición del indicador debe multiplicar los gramos colocados en el porta pesas 1 por $\frac{\Delta x}{\Delta p_1}$, luego sumar el producto de los gramos en el portapesas 2 por $\frac{\Delta x}{\Delta p_2}$ para luego sumar, esto lo llevará a escribir el modelo algebraico $\frac{\Delta x}{\Delta p_1} p_1 + \frac{\Delta x}{\Delta p_2} p_2 +$ la posición inicial = $x(p_1, p_2)$. En esta situación los estudiantes habrán encontrado una relación entre las variables que se transforma en modelo algebraico, este hecho se logra partiendo de la tabla que se transformas en modelo numérico. Se observa la relación entre los dos modelos. Posteriormente se plantea la siguiente pregunta ¿Cuál es la gráfica de los datos? Cuyo objetivo es llevar al estudiante a relacionar las variables a través de una gráfica, la que posteriormente será el modelo gráfico, lo ideal es que logre la articulación de modelos.

Resultados de puesta en escena Se muestran algunas argumentaciones extraídas de los episodios de las puestas en escena. Al aplicar el primer diseño, el de Méndez, a los estudiantes de Ingeniería, se observa que los alumnos interactúan con el fenómeno, construyen la tabla, analizan los datos tabulados con el fin de encontrar una expresión matemática que les permita predecir, Informan que la relación es línea, apoyándose en la ley de Hooke, al encontrar una ley física que aplicar, no se preocupan de predecir usando bisección o punto medio. En la fase dos acto de modelar, no obstante que dos estudiantes calcularon “deltas” de elongación en cada resorte, lo hicieron a partir de la ley de Hooke, uno de los estudiantes recurrió a la interpolación de valores conocidos para llegar al valor por conocer, usaron como herramienta la ley de Hooke lo que los llevó a considerar a los dos resortes como uno en línea. Este antecedente llevó a reformular la situación para pasarla a estudiantes de cuarto año de enseñanza media, los resultados fueron diferentes.

Argumentos textuales que muestran como los alumnos construyen lo bilineal a partir de dos modelos lineales disjuntos, poniendo como centro los modelos gráficos (líneas rectas)

EST.1 Si mejor lo tabulamos de otra forma, hagamos dos tablas distintas una para el recipiente uno y otra para el recipiente dos

EST.2 Yo cacho que deberíamos buscar una relación, como que si baja 15 cm en 20 grs. cuanto cm va bajando por cada gramo, porque por lo menos lo que baja en el peso l siempre va a ser constante

EST.1 Lo que yo digo es que grafiquemos las dos situaciones paralelamente después obtenemos lo que baja en 17 si estuviere solo y después el 2 y ahí sacamos la relación que hay entre las dos si es que es un promedio

EST.2 Pero se supone que es el mismo aparato que debía seguir la misma regla.la medición en cm está diferente, ya sabemos que una recta no es.

EST.1 Te das cuenta tiene una relación que tiene una diferencia constante entonces podríamos decir que es lineal.

Los estudiantes buscan el modo de encontrar el modelo algebraico e intentan graficar en tres dimensiones, dibujan el eje X, eje Y, eje Z. La derivada parcial como herramienta aparece en forma implícita. La imposibilidad de graficar puede deberse a que el estudiante tiene que pasar de graficar en el plano al espacio, pues la gráfica es un plano

Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Barbosa, J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 293-301.
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.
- Bassanezi, R. C. y Biembengut (1997). Modelación Matemática: Una antigua forma de investigación, nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las Matemáticas*, (32), 13-25.
- Biembengut, M, y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (002), 105-125.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 86-95.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.W., y Niss, M. (Eds.).(2007). *Modelling and applications in mathematics education.The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

- Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos, *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa, Número especial*, 83-103.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 4, 103-128.
- Ferri, R.b. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86-95.
- Méndez M. y Arrieta, J (2005). Las prácticas sociales de modelación multilínea de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 575-582. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilínea; modelando un sistema de Resortes*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México