LOS MODOS DE PENSAR EL ÁLGEBRA LINEAL Y EJEMPLOS AD HOC EN PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Se presenta un análisis de distintos hechos didácticos específicos en el álgebra lineal, a través de dos ejemplos. El primero se aborda, bajo el enfoque de la teoría de los modos de pensar el álgebra lineal de Anna Sierpinska (sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural) para indagar cómo estudiantes universitarios se enfrentan a los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El segundo ejemplo se sitúa en las construcciones mentales que permiten, en estudiantes universitarios, la construcción del teorema cambio base para vectores bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) como marco teórico y metodológico (Proyecto DI-PUCV N°037.398/2012).

Palabras clave: modos de pensamiento, teoría APOE

Abstract. An analysis of different didactics facts in linear algebra is presented via two examples. The first is addressed, by the Anna Sierpinska theory in linear algebra of modes of thinking (synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural), to investigate how college students are faced with the concepts of linear dependence and independence vectors, resolution of linear systems equations in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, and the connections that establish these college students between those concepts. The second example deals with the mental constructs that allow in university students, the construction of base change theorem under a cognitive approach, the APOS theory (actions, processes, objects and schemes) as a theoretical and methodological framework (Project DI-PUCV N°037.398/2012).

Key words: modes of thinking, APOS theory.

Introducción

El objetivo de este reporte es presentar tópicos que se enseñan en el nivel superior, uno, los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en R^2 y R^3; y el otro, el teorema cambio de base para vectores, y, a través de ellos, exhibir cómo éstos son abordados en la didáctica de la matemática desde dos perspectivas diferentes (marcos teóricos específicos) pero con un mismo objetivo, el de investigar aquellos elementos que pueden estar influyendo en la comprensión y construcción cognitiva, de la enseñanza aprendizaje de estos tópicos.

La enseñanza del álgebra lineal

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra lineal es, comparativamente, menor que en otras áreas de la Matemática, y es inevitable coincidir con Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics, y Oktaç (1997): hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de esa materia o bien propuestas para su enseñanza, pero son muy escasos los dedicados a esa enseñanza explícitamente vinculados con la investigación.

Los estudios del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) acerca del álgebra lineal son una excepción.

Maracci (2008) indica que no ha habido muchas investigaciones en que las dificultades hayan sido objeto de un proyecto de investigación. Incluso, Dorier y Sierpinska (2001) expresa que es ésta un área relativamente nueva en la Didáctica de Matemáticas avanzadas. Los estudios de Dubinsky (1997), Harel (1989) y Sierpinska, Dreyufus y Hillel (1999) confirman que, a veces, esta materia produce una detención en el aprendizaje. La dificultad parece estar en la naturaleza abstracta de los objetos involucrados, Harel (1990) advierte que la representación visual de carácter geométrico de los conceptos que el instructor tiende a utilizar no ayuda como este supone.

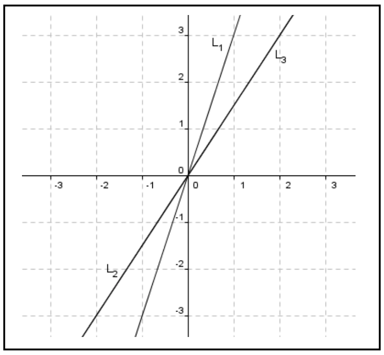
Primer ejemplo

Este ejemplo se basa en el trabajo de graduación de Bozt (2011) cuyo principal objetivo es indagar cómo a partir de lo teórico o desde lo práctico estudiantes universitarios se enfrentan a los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y de solución de un sistema de ecuaciones lineales en R^2 y R^3, así como las conexiones que establecen esos estudiantes de educación superior entre dichos conceptos. La indagación sobre dicha conexión se realiza desde la teoría de los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000), porque propone elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes conectan los conceptos del álgebra lineal, propuestos en este estudio. Sierpinska distingue tres modos de pensamiento: uno que tiene que ver con el pensamiento práctico –sintético-geométrico (SG)– y otros dos que tienen que ver con el pensamiento teórico –analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE).

La población objetivo corresponde a estudiantes de educación superior, ya que es en este nivel donde se realiza el curso de Álgebra Lineal. La muestra tomada consta de siete estudiantes de educación superior pertenecientes a una Universidad de formación profesional chilena. Dentro de estos siete estudiantes, tres cursan el quinto semestre de Licenciatura en Matemática (Estudiantes E1, E2 y E3) y cuatro cursan quinto semestre de Pedagogía en Matemática (Estudiantes E4, E5, E6 y E7). Todos los estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario de 8 preguntas, aprobaron el curso de Álgebra Lineal y se caracterizan por ser estudiantes con buenos resultados académicos.

A continuación se presentan algunas de las evidencias recopiladas de la pregunta 3 del cuestionario.

Pregunta 3: A continuación se presenta la solución gráfica de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (figura 1):



a) ¿Tiene solución el sistema? ¿Cuántas? *Justifique su respuesta.*

b) En R^2, con las operaciones suma y ponderación usuales, ¿los vectores generadores de cada una de las rectas del sistema (vistas como subespacios de R^2) forman un conjunto linealmente independiente? *Justifique su respuesta.*

Figura 1: *Sistema de 3x2.*

Análisis de las respuestas de los estudiantes parte a)

Para responder a esta pregunta, los estudiantes abordaron diferentes estrategias. Cuatro de los estudiantes (los estudiantes E1, E3, E5 y E6) respondieron que la solución del sistema es única porque gráficamente se puede ver que las rectas se intersectan en el (0,0) (figuras 2 y 3). En este caso, los estudiantes sitúan su pensamiento en el modo SG, que era lo que se esperaba que hicieran.

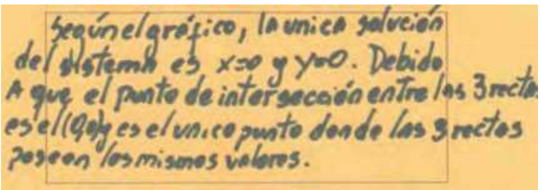


Figura 2: Respuesta pregunta 3.a, E1

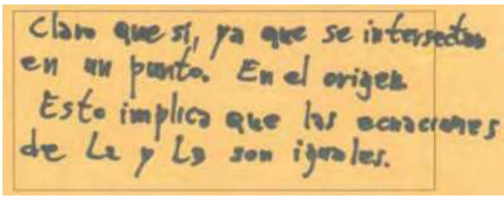


Figura 3: Respuesta pregunta 3.a, E6

En cambio, los estudiantes E2 y E4 obtuvieron las ecuaciones de cada una de las rectas del sistema y en ellas observaron que el único par ordenado que satisfacía todas a la vez es el (0,0). Por tanto, su argumento es en base a las ecuaciones obtenidas, que tal como anticipamos en el análisis a priori que realizamos, muestra a los estudiantes situados en el modo AA (parte del desarrollo de las respuestas de estos estudiantes se puede ver en las figuras 4 y 5).

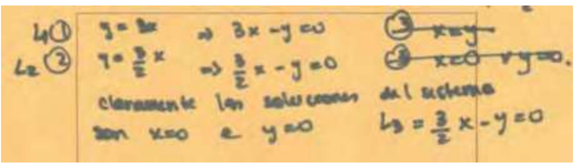


Figura 4: Respuesta pregunta 3.a, E4

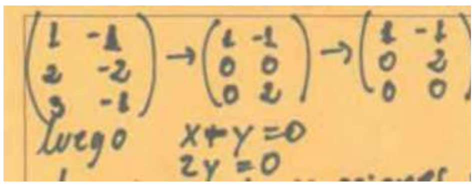


Figura 5: Respuesta pregunta 3.a, E2

Análisis de las respuestas de los estudiantes parte b)

Cuatro de los estudiantes sitúan su respuesta en el modo de pensamiento SG. Los estudiantes 1, 5 y 7 argumentan de acuerdo a lo concluido en la primera parte de la pregunta, al señalar que las rectas L_2 y L_3 poseen el mismo vector generador y por lo tanto el conjunto formado por los tres vectores no es linealmente independiente (figura 6).

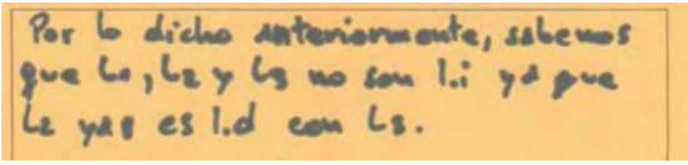

Por lo dicho anteriormente, sabemos que L_1, L_2 y L_3 no son l.i ya que L_2 ya es l.d con L_3.

Figura 6: Respuesta pregunta 3.b estudiante 5.

A pesar de que estos estudiantes no hacen alguna especie de marca en la gráfica, sí queda claro que es ésta la que les permite concluir que las rectas L_2 y L_3 son generadas por el mismo vector, es decir, recurren a un modelo geométrico de la dependencia lineal de vectores. Por lo tanto, considerando también sus respuestas a la primera parte de esta pregunta, se concluye que estos estudiantes se sitúan en el modo SG para responderla.

Segundo Ejemplo

En la investigación propuesta, Proyecto DI-PUCV 037.398/2012: *"Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del Teorema cambio de base para vectores, (TCBV)"* se realiza una indagación desde un enfoque cognitivo, utilizando como marco teórico –la teoría APOE– (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996), para investigar cómo los estudiantes universitarios (re)construyen el TCBV.

El proceso de investigación en la teoría APOE conlleva el tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto, llamado *descomposición genética* (Dubinsky, 1991) que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala et al., 1996). En la descomposición genética que se diseñó, esto es, investigar, mediante la metodología utilizada en la teoría APOE, propuesta por Ed Dubinsky y el grupo RUMEC, se explicitan las construcciones mentales y mecanismos que los estudiantes ponen en práctica en la (re)construcción que hacen del TCBV. Las tres componentes propuestas, están basadas en la metodología que viene utilizando el grupo RUMEC en sus investigaciones: *análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos*, determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de la descomposición genética se diseñaron cuestionarios que fueron aplicados a estudiantes universitarios de una universidad chilena, que hayan cursado álgebra lineal, para que den información respecto a las construcciones y mecanismos mentales que realizan para llegar a (re)construir el TCBV; dicho teorema establece que dadas dos bases $B=\{v_1, v_2, \ldots v_n\}, B'=\{w_1, w_2, \ldots w_n\}$ de un espacio vectorial finito dimensional, *V*, existe una matriz $A \in M_n$, la cual llamaremos matriz cambio de base, que cumple con, $A[v]_B=[v]_{B'}$, para cualquier *v* en *V* (Aburto, Johnson, y Jimenéz, 1996).

El estudio propone, de acuerdo a la metodología propuesta por la teoría APOE, una descomposición genética (DG), del teorema, de modo de clarificar el análisis de los aspectos cognitivos implícitos y el estudio del propio TCBV por parte de los alumnos.

La investigación propone comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios. Particularmente, interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales que un estudiante realiza para aprehender el TCBV; para ello, se utiliza la teoría cognitiva APOE (acción-proceso-objeto-esquema), la cual posee su ciclo de investigación, el cual proporcionara evidencias empíricas de aquellos mecanismos y construcciones.

Descomposición genética hipotética del TCBV

Para que un estudiante llegue a construir el TCBV como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial *V* de una dimensión finita, digamos *n*, para luego, desencapsular de ese objeto, por una lado bases ordenadas $B'=\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y $B=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ como procesos y la pertenencia de un vector al espacio vectorial *V*, también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación es entre los procesos de las bases ordenadas β' y β de *V,* y la segunda coordinación es entre los procesos base ordenada de *V*, con la pertenencia de un vector *v* a *V,* los cuales se coordinan a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar *v* como combinación lineal de los vectores de la base ordenada β de *V*, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector *v* en la base β, es decir, $[v]_\beta$.

Ahora el proceso que es resultado de la coordinaciones de las bases ordenadas β' y β de *V*, se generalizan, a una sucesión finita, en el objeto que fue producto de la encapsulación de expresar *v* como combinación lineal de β; cuya resultante es el proceso (I), que llamamos matriz de coordenadas, *A*, y expresamos así: $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ [u_1]_{\beta'} & [u_2]_{\beta'} & \cdots & [u_n]_{\beta'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$.

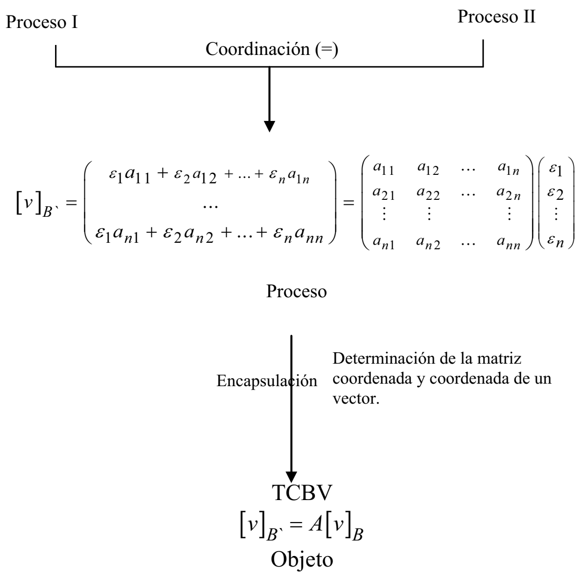


Figura 7: Coordinación del Proceso I y II en la Descomposición Genética del TCBV.

Así también, podemos generalizar en un proceso (II) la combinación lineal finita de *v* en β, expresando los vectores de β como combinación lineal de los vectores de β'.

Ambos procesos, el proceso (I) y el proceso (II) se coordinan a través de la igualdad de matrices (figura 7), el cual se encapsula en el TCBV como objeto, esto es: $[v]_{\beta'} = A[v]_{\beta}$.

Como se puede ver, los elementos que entran en juego en la descomposición genética descrita son complejos y el aprendizaje del TCBV como objeto, en realidad depende de las relaciones que un aprendiz pueda establecer.

En búsqueda de evidencias empíricas para documentar la DG hipotética

Diseñamos un cuestionario de 10 preguntas, con la intensión de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, en 8 estudiantes universitarios. Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario, para darla a conocer en este reporte.

Pregunta 9 del cuestionario

Sean *B* y *B'* dos bases del $U \leq M_{2x3}(\square)$. Dados $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de coordenadas de *B* a *B'* y las coordenadas del $[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine las coordenadas de $[v]_{B'}$. *Justifique.*

El propósito de la pregunta 9, es mostrar evidencias de la construcción del TCBV como Objeto.

Estudiante 6**,** E6, realiza un tipo de escritura parecida a la del TCBV, la que es incorrecta, pero duda y la cambia por la versión correcta. En la figura 8, E6 muestra lo que escribe. Hemos de considerar que el E6 puede hacer la corrección, pues durante el desarrollo del cuestionario ha dado muestras de una construcción del TCBV, como objeto (figura 9).

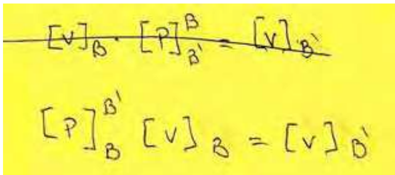


Figura 8: Respuesta que realiza el E6

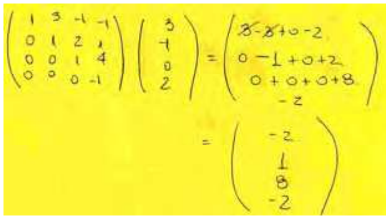


Figura 9: Respuesta que realiza el E6

Análisis de las producciones de los ejemplos

En relación al primer ejemplo, el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales en su mayoría de los informantes es reducido a un par o trío ordenado, dependiendo de si el problema corresponde a R^2 o R^3. Aproximadamente la mitad de los estudiantes participantes de la investigación no tiene un concepto geométrico del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales y aquellos que sí lo tienen lo asocian a la intersección común de rectas o planos. Esto tuvo consecuencias en cuanto a la conexión entre los conceptos dependencia e independencia lineal y el de solución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que algunos estudiantes concluyen la independencia lineal de un conjunto de vectores, argumentando que uno es un ponderado del otro sólo a través de la gráfica, pero para encontrar la solución del sistema recurren a las ecuaciones de las rectas y prefieren determinarla resolviendo algebraicamente.

En el segundo ejemplo, a la luz de las evidencias se puede decir que, la construcción del TCBV como proceso no es alcanzada por la totalidad de los estudiantes, sólo tres de éstos lograron coordinar los procesos descritos en la DG para construir el TCBV como objeto. La DG cumplió con su rol, al describir las construcciones mentales necesarias para la construcción del TCBV; no obstante se considera que parte de su refinamiento provendrá del proceso de entrevistas en profundidad, pues es en estos estudiantes donde es posible profundizar la evolución cognitiva necesaria para la construcción como objeto del TCBV.

A modo de conclusión

Los dos ejemplos aquí presentados nos ofrecen problemas, resultados, enfoques teóricos y metodologías que son de mucha utilidad, para diseñar y llevar adelante propuestas de enseñanza aprendizaje, para determinados conceptos matemáticos. A la luz de los dos marcos teóricos descritos en los ejemplos –Modos de Pensamiento y APOE– las investigaciones descritas, procuran buscar explicaciones a diferentes hechos didácticos que se relacionan, por un lado con el proceso de articular distintas formas de comprender los conceptos del álgebra lineal (ejemplo 1), y por otro, construirlos (ejemplo 2), basadas en evidencias, y no en la sola opinión o la buena voluntad.

Referencias bibliográficas

Aburto, L., Johnson, R. y Jimenéz, D. (1996). *Algebra Lineal.* Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. y Oktaç, A. (1997). Development of students. understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3), 241-309.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) Research in collegiate mathematics education (2), 1-32.

Bozt, J. (2011). *Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en* $\boldsymbol{R}^2$ *y* $\boldsymbol{R}^3$ *desde el punto de vista de los modos de pensamiento*. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Dorier, J. y L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first linear algebra on the college level. In D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra,* 107-126.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology 21*(3), 387-392.

Harel, G. (1989). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11*(1-2), 139-148.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education* 40, 265- 276.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques 19*(1), 7-40.