

## DISTRIBUCIONES CENTRADAS Y UNIFORMES: UNA INTRODUCCIÓN EN LA EDUCACIÓN ESPECIAL

José Marcos López-Mojica, Ana María Ojeda Salazar

CAM 18

DME; Cinvestav-IPN

[jmlopez@cinvestav.mx](mailto:jmlopez@cinvestav.mx), [amojeda@cinvestav.mx](mailto:amojeda@cinvestav.mx)

México

**Resumen.** Para dar respuesta a las preguntas de cuáles esquemas compensatorios favorecen el pensamiento probabilístico de niños de educación especial y cómo caracterizar su desempeño, consideramos los ejes epistemológico, cognitivo y social. De las tres fases de la investigación, en parte de la segunda enfocamos la introducción de la distribución de probabilidad para un grupo de sexto grado (13-15 años), con la instrumentación de guiones de enseñanza y de bitácora; los datos se registraron con videograbación y con escritura en papel. Para profundizar en la comprensión de los niños de las ideas fundamentales implicadas, en parte de la tercera fase se aplicaron dos entrevistas a niños con retraso mental. Los resultados conciernen a la diversidad de afecciones, tanto en sus grados como en sus características, a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos y a los esquemas compensatorios identificados que favorecen el pensamiento probabilístico.

**Palabras clave:** estocásticos, diversidad, desempeños, educación especial

**Abstract.** To answer the questions 'what compensation schemes favor the probabilistic thinking of special education children and how to characterize their performance', we considered the epistemological, cognitive and social points of view. Among the three phases of the research, in part of the second one a group of sixth grade (13-15 years) was introduced to the probability distribution; the instruments used were teaching scripts and script log, the data were recorded videotape and writing on paper. To deepen in children's understanding of stochastic fundamental ideas, in part of the third phase two children with mental retardation were interviewed. The results relate to the diversity of conditions, both to their level of affection and to their traits, to the understanding of fundamental ideas of stochastic and to the compensatory schemes identified that favor the probabilistic thinking.

**Key words:** stochastic, diversity, performance, special education

### Introducción

Con esta investigación se pretende identificar en la educación especial básica las maneras en que los niños con discapacidad compensan las ausencias o disfunciones y promover su aplicación para el desarrollo de su pensamiento probabilístico. La pregunta en foco es cuáles esquemas compensatorios favorecen el pensamiento probabilístico de los niños.

La investigación, cualitativa y *en curso*, se organiza en tres fases. El objetivo de la primera es caracterizar el tratamiento de la probabilidad en la propuesta institucional de la educación especial. La segunda fase se interesa en el diseño y aplicación de actividades de enseñanza sobre la probabilidad. El objetivo de la tercera fase es identificar la comprensión de los niños de ideas fundamentales de probabilidad después de su enseñanza. Para este informe enfocamos, en la fase II, la noción de distribución de probabilidades y, en parte de la fase III, la comprensión de los niños de ideas fundamentales revelada en entrevistas semiestructuradas.

### Perspectiva teórica: tres ejes rectores

En el orden *epistemológico*, Heitele (1975) ha propuesto diez ideas fundamentales de estocásticos como guía para un currículum en espiral, las que define como aquellas que proporcionan al individuo modelos explicativos tan eficientes como sea posible. Para ello consideró, entre otros aspectos, las etapas de la constitución de la idea de azar en el niño que plantearon Piaget e Inhelder (1951), quienes incluyeron en sus pesquisas situaciones regidas por distribuciones centradas y por uniformes.

En el orden *cognitivo*, Vygotski (1997) consideró a los esquemas compensatorios como los que asumen la función de los que por ciertas circunstancias no fueron desarrollados o son deficientes y señaló que el desempeño de los niños se ajusta a su contexto social, acondicionado para un ser humano normal; en ese sentido, la insuficiencia se considera ante el tipo de tarea y en un ambiente dado. Por ejemplo, las memorias a corto y a largo plazo y la noción de cantidad, son deficientes en síndrome Down (Bower & Hayes, 1994) y pueden ser compensadas con actividades donde se le otorgue mayor carga a lo visual y a la repetición de las instrucciones con su correspondiente acción. La referencia a las funciones del cerebro (Luria, 2005) permite interpretar la ficha médica de cada caso; como ejemplo, la ficha médica de un participante en la investigación de este informe reporta un daño a nivel de la corteza prefrontal, área donde se localiza la memoria de trabajo.

Fischbein (1975) argumenta que para la formación de intuiciones probabilísticas, se debe considerar como una necesidad la importancia de lo incierto relacionado con la acción, que produce frecuencias relativas, se estableciera un comportamiento de la situación aleatoria refiriéndose a “más probable”, “menos probable” o “igualmente probable”. Por intuición se entiende un conocimiento que se deriva de la experiencia, no susceptible al análisis, de recuperación inmediata, sintético y que se extrapola (Fischbein, 1975).

En el orden *social*, Steinbring (2005) propone la constitución del concepto matemático según el triángulo epistemológico, que resulta de un balance de las relaciones entre sus vértices [objeto, signo y concepto], de modo que se pueda deducir el significado del conocimiento matemático, de esta manera el conocimiento matemático es perfectible.

Lo anterior proporciona un referente para examinar las interacciones en el aula de educación especial básica promovidas durante la enseñanza de estocásticos.

### Método

Complementada con la bitácora, la *experienciación* del investigador se desarrolló, en el sentido de Maturana (2003), durante su enseñanza de estocásticos, impartida a un grupo de sexto

grado de educación especial básica ante su docente titular. Por enseñanza se entiende en la investigación al proceso intencional para la adquisición del conocimiento por el otro. La instrumentación consistió en guiones de clase que articularon el uso de material concreto para ejemplificar las distribuciones. Para obtener datos sobre la comprensión de los niños de ideas fundamentales de estocásticos, se realizaron entrevistas semiestructuradas. En esta investigación, se entiende por entrevista la interacción que se produce entre dos individuos cuando uno le plantea preguntas al otro para alcanzar un objetivo —aquí, el de obtener datos de la comprensión del segundo respecto a una situación o a conceptos implicados en ella— por lo que es relevante el tipo de comunicación posible con cada caso debido al síndrome o afección. Las técnicas para registrar datos fueron el video, la escritura y dibujos en hojas de control con croquis del material utilizado.

La *célula de análisis de la enseñanza* (Ojeda, 2006) se aplicó a los datos recopilados para identificar: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos referidos a estocásticos y la situación de referencia.

#### Participantes

El *aula alterna* (Ojeda, 2006) es una alternativa al aula tradicional. En ella confluyen la enseñanza y la investigación, de manera que la docente se inicia en la indagación de su propia enseñanza, de las relaciones entre el contenido matemático y las producciones de los niños. Desarrollaron la actividad propuesta por el investigador en el aula alterna nueve niños (13-15 años) con diversos niveles y afecciones (véase Tabla 1). La actividad se aplicó en una sesión de 40 minutos en los tiempos institucionales establecidos.

	Síndrome Down			Retraso Mental					Epilepsia
	GM	MM	MA	AL	AR	IS	K	LU	IL
<b>Nivel de afección</b>	Medio	Medio	Medio	Superficial	Medio	Medio	Medio	Superficial	Medio
<b>Oralización</b>	Palabras aisladas	Palabras aisladas	Sonidos guturales	Conversa	Sonidos guturales	Palabras aisladas	Sonidos guturales	Conversa	Palabras y gutural

Tabla 1. Características individuales en el aula alterna del sexto año

#### La situación de referencia

El fin de la actividad fue introducir la idea de azar con distribuciones uniformes, centradas y sesgada, además de otros conceptos matemáticos como conteo y proporción. Para ello, en bandejas rectangulares con embudos en la parte superior y casillas igualmente distribuidas en la inferior (véase la Figura 1), frente al grupo se liberaron por los embudos canicas del mismo tamaño y color, que se distribuyeron al azar en las casillas. Se utilizaron tres conjuntos de 20 canicas para las bandejas I, II y V; cuatro conjuntos de 20 canicas para la bandeja III y diez

conjuntos de 20 canicas para la bandeja IV. El *fenómeno aleatorio* en foco en cada caso es el acomodo azaroso de las canicas en las casillas después de su vaciado por los embudos. El *espacio muestra* son las posibles casillas en las que pueden caer las canicas. La *medida de probabilidad* se considera, cualitativamente, con la relación de la posibilidad de que una canica caiga en una del total de casillas posibles. El número de canicas por cada casilla es una variable aleatoria; la *frecuencia relativa* de una casilla es el número de canicas ocupantes de esa casilla respecto al total de canicas liberadas por el embudo. Se apela a la *ley de los grandes números* con la distribución de un número grande de canicas después de su vaciado.

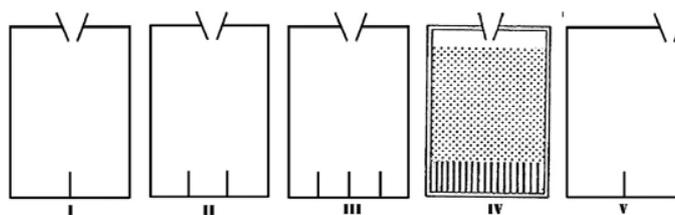


Figura 1. Esquemas de las bandejas (Piaget e Inhelder, 1951, p. 28)

Gradualmente por el número de casillas en las bandejas, se pasó de una distribución uniforme (bandeja I), a distribuciones centradas (bandejas II, III y IV) y a una sesgada (bandeja V).

La Tabla 2 caracteriza la enseñanza desarrollada según los criterios perfilados en la célula de análisis (Ojeda, 2006). Se presentaron a los niños las bandejas y se les pidió predecir, mediante dibujos, las posiciones finales de las canicas al cabo de su vaciado.

Situación	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
Distribución aleatoria de canicas en casillas.	Espacio muestra, medida de probabilidad, variable aleatoria, ley de los grandes números.	Números naturales, proporción.	Figuras, lengua natural escrita.	Quedan, acomodan distribuyen, curva, caen, chocan, más fácil que.

Tabla 2. Caracterización de la actividad sobre distribuciones uniformes y centradas

#### *Distribuciones centradas y uniformes en la enseñanza*

La enseñanza consistió en presentar a los niños, una por una, las bandejas y las canicas que se liberarían por los embudos. Para cada bandeja, se proporcionó a los niños el esquema respectivo, en el que dibujarían su anticipación de las posiciones finales de las canicas; luego se procedería a realizar el vaciado efectivo para que compararan la distribución obtenida con su anticipación dibujada en el esquema. El investigador inició con el vaciado de las canicas en la bandeja I; a partir de la bandeja II, fueron los niños quienes vaciaron las canicas.

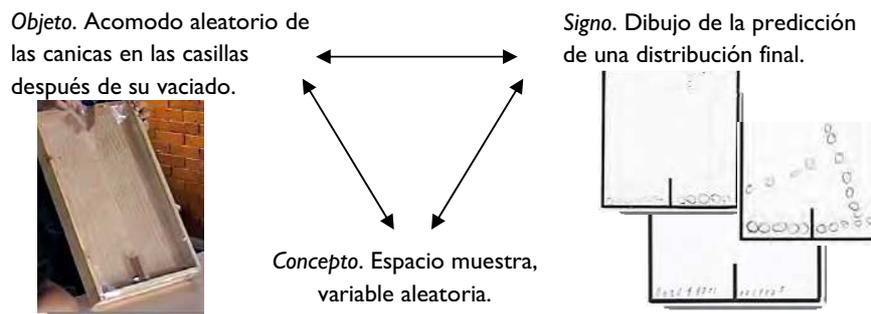


Figura 2. Triángulo epistemológico en la actividad

En el desarrollo de la actividad de enseñanza, se pudieron distinguir los vértices del triángulo epistemológico. A un nivel de *objeto* interesaba la distribución aleatoria de las canicas después de su vaciado en las bandejas, a nivel de *signo* interesaba que los niños distinguieran que su dibujo de las predicciones de las posiciones finales de las canicas correspondía a una de muchas posiciones posibles, de manera tal que se fueran introduciendo nociones de *espacio muestra* (lo posible) y, cualitativamente, de *medida de probabilidad* (véase la Figura 2).

*Espacio muestra: síndrome Down y retraso mental*

Los niños identificaron las casillas de algunas bandejas. Los casos con Síndrome Down (*GM*, *MM* y *MA*) dibujaron la misma cantidad de canicas en ambas celdas de la bandeja I (véase la Figura 3). Además, su dibujo de canicas desde el embudo hasta la base de la bandeja sugiere la comprensión de las instrucciones y la advertencia de las casillas posibles. En su dibujo, *GM* (síndrome Down) advirtió que una canica podía caer en una de las dos casillas, por ello realizó una secuencia de canicas también hacia la casilla de la izquierda. Si bien el dibujo se debió a una petición, los dibujos de *GM* y *MM* (ambos síndrome Down) de las canicas (a manera de ir cayendo), sugiere una forma de compensar el problema de lenguaje para comunicar su anticipación del proceso.

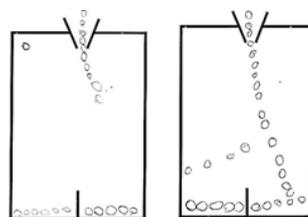


Figura 3. Producción de los casos síndrome Down, MM y GM (respectivamente)

Los niños con retraso mental (*Lu* y *Al*) identificaron, para cada una de las bandejas II y IV, las casillas en las que podrían caer las canicas. En sus dibujos presentaron más canicas en las celdas centrales (véase la Figura 4).

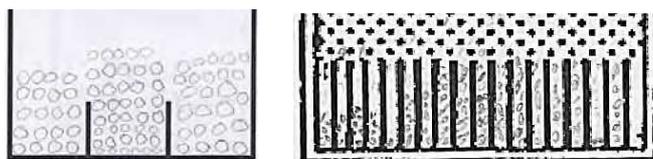
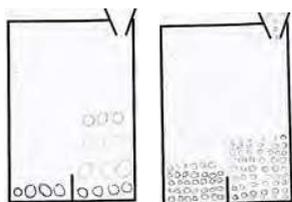


Figura 4. Acomodos aleatorios centrales de LU, retraso mental

*Variable aleatoria: síndrome Down y retraso mental*

Al proponer el número de canicas por cada celda en su acomodo aleatorio después de su caída, *LU* y *AL* (ambos retraso mental) realizaron acciones que apelan a la idea de variable aleatoria. Por ejemplo, en sus dibujos, *LU* mostró un amontonamiento central para la bandeja IV. Además, trataba de mantener la misma cantidad de canicas que serían vaciadas en la bandeja.

A partir de las bandejas III y IV, podríamos decir que *LU* puso en juego la memoria de trabajo, pues recuperaba elementos importantes de la actividad, como el número de canicas en cada celda, las trayectorias y choques entre canicas y contra las paredes de las casillas.



(Izq. Síndrome Down: GM; Der. Retraso mental: LU)

Figura 5. Amontonamiento de las canicas en la bandeja sesgada

Para la bandeja V no pareció haber confusión alguna, pues dos casos de síndrome Down (*GM* y *MM*) y dos casos de retraso mental (*AL* y *LU*) dibujaron acomodos sesgados (véase la Figura 5).

Al preguntar a los niños *en qué casilla era más fácil que quedaran las canicas*, de los casos con retraso mental sólo *LU* contestó que para las bandejas II y III era más fácil que cayeran las canicas en las casillas centrales, sin dar más argumentos. En tanto *AL* señaló la casilla del extremo izquierdo en la bandeja III.

De los casos con síndrome Down, *MM* señaló la casilla central de la bandeja II. El caso de epilepsia *IL* señaló las casillas centrales de la bandeja III. Por tanto, se obtuvieron indicios de nociones de medida de probabilidad. Aunque algunos niños no conservaron en sus dibujos la cantidad de canicas utilizadas, sí mantuvieron la misma cantidad de canicas dibujadas en las hojas de control (15 en promedio). Sólo *LU*, dibujaba más de 15 canicas.

*Un acercamiento a la idea de azar*

De todos los casos presentes en el aula, sólo *LU*, con retraso mental, dio evidencia de haber advertido que las canicas chocan entre sí, con las paredes de las bandejas y con los muros que separan las casillas. Para el caso *MA* (síndrome Down), al preguntarle en qué casillas de la bandeja III era más fácil que quedaran las canicas, señaló las separaciones entre ellas e hizo un movimiento indicando las dos casillas centrales. Lo anterior sugiere que *MA* identificó los choques de las canicas con las separaciones (véase la Figura 6).

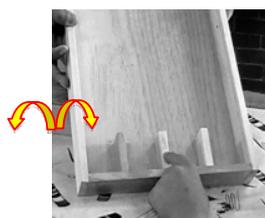


Figura 6. Señalamiento de los muros por parte de *MA*.

*Distribuciones centradas y uniformes en la entrevista*

Después de la enseñanza en el aula alterna, con modalidad semiestructurada se entrevistó a dos casos con retraso mental. Se eligió a *LU*, debido a su mejor desempeño en relación al de sus compañeros de aula, al advertir que en las celdas centrales era más fácil que cayeran las canicas, además de haber dado indicios del uso de la memoria de trabajo. El otro caso, *AL*, se eligió por manifestar indicios de nociones de espacio muestra en la enseñanza; en la entrevista se corroboró su noción de espacio muestra, además de que se identificaron las de medida de probabilidad y de variable aleatoria; también mostró un acercamiento a la idea de azar.

Ausencia de la idea de probabilidad: Caso *LU*

Cuando se preguntó por la casilla o casillas en las que era más fácil que cayeran las canicas, *LU* respondió que en las bandejas I, II y III las canicas caerían en la casilla de la izquierda, lo cual plasmó en sus dibujos (véase la Figura 7).

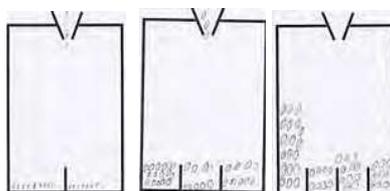


Figura 7. Sesgo en la producción de *LU*

Al realizar el vaciado efectivo de las 40 canicas y preguntarle por qué no resultó lo que él había dibujado momentos antes, *LU* en un principio dio como respuesta “porque aquí hay más [refiriéndose a la bandeja]”.

*Espacio muestra: Caso AL*

Al preguntarle a AL (retraso mental) en qué casillas era más fácil que cayeran las canicas, él contestó que en la casillas centrales [ para las bandejas II, III y IV ] era más fácil y justificó su respuesta según el resultado del vaciado de canicas de la bandeja anterior a la bandeja que se le preguntaba. Sus dibujos no correspondían a lo indicado (véase la Figura 8), al parecer sólo dibujaba las canicas en las celdas de las bandejas, por llenar esos espacios.

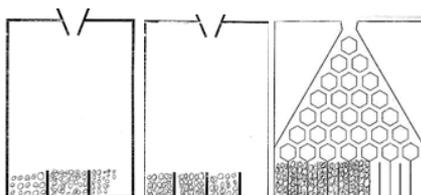


Figura 8. Producciones de AL.

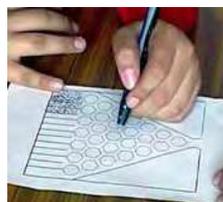
*Variable aleatoria: Caso AL*

Una vez que identificó la cantidad de canicas en cada una de las celdas, en el siguiente episodio, en que se habían liberado 10 canicas en la bandeja III, inmediatamente AL inició el conteo en cada una de las casillas:

- In: AL, vamos a lanzar las canicas, ¡Mira! [suelta las canicas en el embudo].
- AL: Cayó una canica aquí, cuatro canicas aquí [señala las dos casillas de la izquierda]...
- In: Ajá, ¿qué más?
- AL: ... Cinco canicas aquí, acá no hay canicas [señala las dos casillas de la derecha].

*Identificación de trayectorias: LU y AL*

A pesar de que LU no identificó todas las posibles casillas en las que podía caer una canica, sí pudo identificar, para la bandeja IV, que una canica podía seguir una variedad de trayectorias. LU señaló con el dedo índice algunas de esas trayectorias (véanse las Figuras 9.a y 9.b).



a. LU señala dos posibles trayectorias

b. AL señala posibles trayectorias

Figura 9. Indicando las trayectorias de algunas canicas

*Experienciación del investigador proveniente del aula*

Si bien se identificaron nociones de los niños de espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria, es decir, la estrategia de enseñanza logró su principal objetivo, es necesario afinar los esquemas en las hojas de control y proporcionar espacio suficiente para que los alumnos puedan dibujar las canicas en las casillas, principalmente el de la bandeja IV. También parece pertinente la incorporación de algunas canicas de otro color, tantas como a lo más el número de casillas, para facilitar la identificación de posibles trayectorias, de choques entre las canicas, entre los lados de las bandejas y contra las separaciones de las casillas, así como de la mezcla de canicas y de posibles acomodados en las celdas. Aunque la docente intervenía cuando el investigador presentaba dificultades en la comunicación con los niños, ella expresó no sentirse segura para desarrollar la actividad.

**Resultados del análisis: heterogeneidad en el aula y las ideas fundamentales**

Para los casos con síndrome Down, al parecer el esquema visual, articulado con los dibujos, compensan la dificultad en la comunicación presente en estos casos; sus dibujos sugieren la identificación de las posibles casillas donde pueden caer las canicas. De los casos con retraso mental, LU presentó mejor desempeño que sus demás compañeros. Identificó las casillas en las que podrían caer las canicas y trayectorias; dibujó más canicas en las casillas centrales y en la casilla de la derecha para la bandeja sesgada (V). De las interacciones entre los niños, se identificó que las niñas con síndrome Down auxiliaban a un caso de retraso mental (IS). En la tabla 3 se presentan los esquemas compensatorios y las ideas fundamentales según los casos del aula alterna.

	<i>Síndrome Down</i>			<i>Retraso Mental</i>					<i>Epilepsia</i>
	<i>GM</i>	<i>MM</i>	<i>MA</i>	<i>AL</i>	<i>AR</i>	<i>IS</i>	<i>K</i>	<i>LU</i>	<i>IL</i>
<i>Ideas fundamentales de estocásticos</i>	Espacio muestra	Espacio muestra	---	Espacio muestra	---	Algunas posiciones finales	---	Espacio muestra	Algunas posiciones finales
	Variable aleatoria	Variable aleatoria		Variable aleatoria				Variable aleatoria	
<i>Esquemas compensatorios</i>	Visual y motor, para superar ausencia de memorias: corto y largo plazo			Sin evidencia	---	Dibujos para comunicar	---	Dibujos para comunicar Repetición de instrucciones	Sin evidencia

Tabla 3. Características individuales en el aula alterna del sexto año.

**Conclusiones y comentarios**

En el desarrollo de la actividad se tuvo un acercamiento a la idea de azar al considerar posibles acomodados, es decir, los dibujos de los acomodados indicaron que las posiciones finales de las

canicas dependerían de varios factores, como los choques entre ellas y con las divisiones entre las celdas. Sólo dos niños identificaron que las casillas centrales tenían mayor facilidad de ser ocupadas. Los dibujos fomentaron la comunicación en los casos de problemas de lenguaje, pues además de responder a lo solicitado sugieren la comprensión de lo sucedido con el vaciado efectivo de las canicas. Según los resultados de Piaget e Inhelder (1951), los desempeños de los niños correspondieron al estadio de las operaciones concretas.

De la entrevista no se tuvo evidencia de la idea de probabilidad ni de la idea de azar, por el episodio de alteración que presentó el entrevistado. Sería necesaria otra entrevista referida a una situación de decisión, como elegir una urna de entre dos o tres según sus contenidos.

Es favorable aplicar actividades de enseñanza con énfasis en fenómenos aleatorios en la educación especial. Según Fischbein (1975) la *experiencia* deviene en intuición. Entre más experiencias sobre estocásticos tengan los niños desde pequeños, según Heitele (1975) más se fomentará el desarrollo de las ideas fundamentales y se prevendrán los sesgos en el pensamiento probabilístico identificados por Kahneman, Slovic & Tversky (1982).

### Referencias bibliográficas

- Bower, A. & Hayes, A. (1994). Short-term memory deficits and Down syndrome: A comparative study. *Down Syndrome Research and Practice* 2(2), 47-50.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holanda: Reidel.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6(2), 187-205.
- Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: CUP.
- Luria, A. R. (2005). *Las funciones corticales superiores del hombre*. México: Fontamara.
- Maturana, H. (2003). *Desde la Biología a la Psicología*. Argentina: Lumen.
- Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l'idée de Hasard Chez l'enfant*. París: PUF.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.
- Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obra Escogidas V*. España: Visor Dis.