IDEAS DE PROBABILIDAD EN LUGARES GEOMÉTRICOS SIMPLES: EXPLORACIÓN CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav México
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Durante un curso de Geometría Analítica se exploraron, mediante la aplicación de un cuestionario a 32 estudiantes de bachillerato tecnológico, ideas de combinatoria y de probabilidad planteadas en situaciones simples de lugar geométrico y se entrevistó a un estudiante por sus respuestas al instrumento. Los estudiantes desconocían técnicas de conteo y no emplearon de forma consistente algún recurso figurativo para determinar el número total de posibilidades; predominó en sus respuestas el enfoque clásico de la probabilidad sobre el frecuencial; confundieron segmento de recta y recta y prevaleció la idea de simetría al ubicar al azar puntos en el plano y trazar las rectas que ellos determinan.

Palabras clave: combinatoria, probabilidad, geometría analítica

Abstract. During a course of Analytical Geometry a questionnaire was applied to a group of technological high school students, involving ideas of combinatorics and probability in situations of simple locus. One student was interviewed about his answers given to the questionnaire. The students were unaware of counting techniques; the appeal to frequency probability prevailed in their answers instead of the classical view. In addition, they did not distinguish between a straight line segment and a straight line, the idea of symmetry interfered to locate points at random in the plane and to draw the lines that those points determined..

Key words: combinatory, probability, analytical geometry

Introducción

La reducción de la práctica de los estudiantes a la unidad de aprendizaje que estén cursando, sin interrelacionar las distintas unidades, ha sido uno de los motivos de la reforma del nivel medio superior. Este reporte recoge los primeros resultados obtenidos en una investigación cuyo objetivo es conocer el estado de conocimientos respecto a las ideas fundamentales de estocásticos que tienen los estudiantes de un Bachillerato tecnológico, mediante su identificación o no de esas ideas de entre las implicadas en los cursos de matemáticas a los que asisten. Por un lado, este informe es previo a la enseñanza de estocásticos en el bachillerato, que se ubica en el sexto semestre; y, por otro, toda la investigación la incluye y vincula las distintas unidades de aprendizaje. En lo que corresponde a este reporte, aplicamos un cuestionario a estudiantes de Geometría Analítica del tercer semestre, que planteó preguntas referidas a conteo y probabilidad mediante la presentación de situaciones sencillas de lugar geométrico; por sus respuestas, se seleccionó a un estudiante y se le entrevistó.

Referencias teóricas

La presente investigación está fundamentada en el planteamiento de investigadores en los campos epistemológico y cognitivo para la educación en probabilidad y en estadística.

Ideas Fundamentales de Estocásticos

Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, en el sentido de Bruner, Heitele (1975) ha propuesto ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles siguiendo un curriculum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

> [...] aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975, p. 188).

Su propuesta considera cuatro puntos de vista:

- El marco de la concepción de Bruner:
  - El principio decisivo de la instrucción en un tópico es la transmisión de ideas fundamentales.
  - Las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad.
  - Las ideas fundamentales y los conceptos se abordan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un curriculum en espiral.
  - La transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal.
- Los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas estocásticas.
- Las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas.
- La historia de la probabilidad.

En esta perspectiva, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. Este listado es un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarse en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

Modelos intuitivos y enseñanza

Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

> […] un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original, constituye la sintaxis del modelo (Fischbein, 1977, p. 155).

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, donde se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

En relación a las gráficas, la comprensión del *producto cartesiano* ha sido tema de varias investigaciones. Por ejemplo, Acuña (2006) indica que:

> Durante la construcción y tratamiento de las gráficas, los estudiantes no se percatan de sus propiedades no ostensivas, como la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes, la prolongación infinita de las rectas o la posibilidad de reconstruir marcas sobre los ejes (p. 233).

En el tratamiento de la gráfica como dibujo y no como figura interviene la interpretación visual o la construcción de una relación gestalt particular.

Enfoques de la probabilidad

Se han adoptado varios enfoques para clarificar la asignación de probabilidades a eventos. En la enseñanza de probabilidad es particularmente importante el enfoque que se elija. Konold (1991) refiriéndose a las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva, argumenta que según la primera, *a priori*, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables. Según la interpretación frecuencial, derivada de la empiria, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito de ensayos. De acuerdo a las interpretaciones subjetivistas, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir como: a) descripción de ese valor según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta; b) consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección (Konold, 1991).

Propuesta institucional

En el bachillerato tecnológico, la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística se imparte en el sexto semestre, la de Geometría Analítica en el cuarto semestre. El programa de estudios respectivo propone, para la primera, el siguiente objetivo principal:

> […] preparar al estudiante para que desarrolle competencias en las que el proceso metodológico debe reflejar la aplicación de la estadística descriptiva, la probabilidad y las distribuciones probabilísticas; donde los resultados justifiquen la solución del problema relacionado con los ámbitos académico, social y global, según se indica en cada una de las unidades, atendiendo a las tres ramas del conocimiento. Lo anterior implica abordar concepciones analíticas para comprender su espacio y su hábitat, apoyando su formación propedéutica y tecnológica (DEMS, 2009, p. 2).

El programa de estudios señala una relación entre la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística con otras unidades de aprendizaje de matemáticas y con otras disciplinas:

> [...] la Probabilidad y Estadística está directamente relacionada con las siguientes unidades de aprendizaje: Álgebra, Geometría y Trigonometría, y Cálculo Integral e indirectamente con Física, Química, Biología, Comunicación Oral y Escrita,

> Ciencias Sociales, Habilidades del Pensamiento, entre las principales; además de apoyar la formación integral del estudiante (DEMS, 2009, p. 2).

Sin ebargo, el programa de estudios no considera una relación directa entre Geometría Analítica y Probabilidad y Estadística. Los resultados de aprendizaje propuestos (RAP) para la unidad didáctica de Geometría Analítica y las competencias pretendidas son:

> [...] las competencias disciplinares (general y particulares) implican como principales objetos de conocimiento: lugares geométricos, línea recta, cónicas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas, para movilizar diferentes capacidades humanas relacionadas con: analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales; razonar correctamente en forma deductiva e intuitiva; representar, abstraer, relacionar, clasificar y aplicar conocimientos de la Geometría Analítica que permita identificar y resolver problemas teóricos y reales, utilizando los diferentes lenguajes de representación (verbal, gráfico y/o simbólico). (DEMS, 2009, p. 2)

Métodos e instrumentos

Participaron en la investigación 32 estudiantes de la unidad de aprendizaje de Geometría Analítica del tercer semestre de un bachillerato tecnológico, público bivalente. Se les aplicó un cuestionario impreso, para su contestación individual en a lo más 50 min., que se refirió a situaciones geométricas simples, que incluyeron puntos en el plano, colinealidad, recta, plano cartesiano y sus cuadrantes, para plantear, respecto a cuatro situaciones distintas, preguntas abiertas referidas a ideas fundamentales de probabilidad (véase la Figura 1).

1. Dado que dos puntos determinan una recta,
   a) ¿cuántas rectas se pueden trazar en un plano donde hay seis puntos (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**) y nunca hay tres de ellos alineados?
   b) Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?
   c) ¿La probabilidad de que pase por el punto **C** es la misma que la de que pase por el punto **E**?
   d) ¿Cómo se ubicarían los puntos en el plano para que sea más probable que una recta que tomemos al azar pase por alguno de los seis puntos?
2. Los puntos **A**, **B** y **C** son colineales y están incluidos en la recta **R.** Los tres puntos se pueden mover a lo largo de la recta (como en la figura, en la que cambiamos de lugar los puntos **A** y **B**, pero también podemos mover el punto **C**.)

   a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los tres puntos en la recta?
   b) Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?
3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los cuatro puntos **E, F**, **G** y **H** alrededor de un cuadrado, si sólo puede haber uno por cada lado del cuadrado?
4. Si en el plano cartesiano hay 13 puntos en el primer cuadrante y 7 en el segundo cuadrante:
   a) ¿De cuántas maneras se puede formar un conjunto de 2 puntos del primer cuadrante y 3 puntos del segundo cuadrante?
   b) Si no importa la ubicación de los puntos en los cuadrantes, ¿de cuántas maneras se puede formar el conjunto de 5 puntos?
   c) Si los 5 puntos del conjunto deben ubicarse en el mismo cuadrante, ¿cuántas maneras de integrar el conjunto hay?

Figura 1. Presentación de reactivos en el cuestionario.

La Tabla 1 resume la caracterización del cuestionario.

Reactivos	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Adición de probabilidades	Combinatoria	Equiprobabilidad
1 a)					
1 b)					
1 c)					
1 d)					
2 a)					
2 b)					
3					
4 a)					
4 b)					
4 c)					

Tabla 1. Ideas fundamentales implicadas en el cuestionario.

Posteriormente, a un estudiante que se mantuvo en la tendencia general en cuanto al tipo y cantidad de respuestas que dio al instrumento, se le interrogó sobre los principios de conteo e ideas de probabilidad implicados en los reactivos. Fue una entrevista semiestructurada, se le videograbó y el estudiante registró sus procedimientos y respuestas en hojas de papel.

Resultados

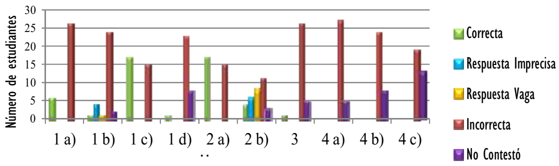
Las respuestas de los estudiantes se clasificaron de acuerdo a la formalidad con que fueron expresadas; una respuesta correcta es aquélla que lo estuvo en forma y precisión; una respuesta imprecisa expresa la relación entre cantidad de éxitos y cardinalidad del espacio

muestra, pero no formalmente; una respuesta vaga sólo manifiesta la cantidad de eventos favorables y no toma en cuenta al espacio muestra; una respuesta incorrecta lo fue del todo, aún si se le escribió correctamente. Dado que el diseño del cuestionario implica la relación de cardinalidades (o tamaño) de posibilidades favorables al evento en cuestión con las (o el) del total del espacio muestra como la probabilidad de ese evento, las respuestas correctas de los estudiantes exhibirían su comprensión de esa relación en distintos grados de precisión, según la forma de la expresión numérica asentada. Si bien el instrumento no incluyó preguntas referidas al enfoque frecuencial, las respuestas expresadas mediante porcentajes equivalentes a la correcta así se consideraron, pues exhibieron un acercamiento intuitivo, salvo cuando no se pudo asegurar que el uso del signo % implicara la identificación del espacio muestra y la del evento complementario.

Cuestionario

La Figura 2 muestra la distribución de los tipos de respuestas obtenidas.

Figura 2. Distribución de los tipos de respuestas dadas al cuestionario



El cuestionario fue difícil para los estudiantes. No obstante, trataron de contestar a las preguntas planteadas y el último reactivo, el 4c), fue para el que más respuestas se omitieron. La Figura 3 muestra una respuesta del tipo "imprecisa" al reactivo 2b). Una respuesta "vaga" es la de la Figura 4, dada al reactivo 1b).

2 b). Si los tres puntos se acomodan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el punto **C** quede entre los puntos **A** y **B**?

Figura 3. Tipo de respuesta imprecisa.

1 b). Si se selecciona una de esas rectas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pase por el punto **C**?

Figura 4. Tipo de respuesta vaga.

Medida de probabilidad. 68% de los jóvenes no asignaron correctamente la probabilidad a los eventos indicados en los reactivos 1b) y 2b). Dentro de este porcentaje se consideran las respuestas incorrectas (55%) y las vagas (13%). Estas últimas son de la forma: "2 veces" o "Hay 5 posibilidades"; expresan sólo la cardinalidad del evento, pero no la relacionan con la cardinalidad del espacio muestra. Sólo 8% de las respuestas (cinco estudiantes) fueron correctas, de las cuales cuatro evocaron al enfoque frecuencial y una el clásico. 16% de las respuestas fueron imprecisas, pues aunque relacionaron lo favorable con el total de posibles resultados, parecieron permanecer en el espacio muestra y no en una asignación numérica declarada como probabilidad: "1 de 3" o "5 entre 15", si bien dejaron entrever la noción de relación y proporción, características de las magnitudes probabilísticas.

Espacio muestra. 19% de los estudiantes omitieron en sus expresiones de probabilidad al espacio muestra, lo que exhibe su desconocimiento de los conceptos de espacio muestra y de evento. 40% de los estudiantes alteraron la cardinalidad del espacio muestra al tratar la expresión de probabilidad como una fracción, "simplificándola".

Adición de probabilidades. Dado que para el reactivo 1d) (véase la Figura 1) sólo se obtuvo una respuesta correcta, se podría afirmar que los estudiantes desconocen la adición de probabilidades. No obstante, la pregunta se interpretó por 22% de los estudiantes como si se refiriera a un acomodo lineal de puntos, más que un acomodo al azar, ya que al alinear los seis puntos se generaría sólo una línea recta, como única posibilidad.

Combinatoria. No se obtuvo evidencia de que los estudiantes conocieran el principio fundamental del conteo, implicado en seis de los diez reactivos presentados (véase la Tabla 1). Basaron sus respuestas en dibujos de la situación planteada y en el conteo uno a uno de los diferentes acomodos posibles, tanto para combinaciones como para permutaciones.

Equiprobabilidad. Ya que el reactivo 1c) (véase la Figura 1) se puede contestar afirmativa o negativamente y no solicita justificar la respuesta, fue el que obtuvo mayor número (17) de respuestas correctas. Sólo se dio una explicación de lo igualmente probable para el reactivo 1d): "Se puede poner de cualquier manera porque una recta son [se determina por] dos puntos, entonces cualquiera pasará por uno de los seis puntos"; la estudiante primeramente aclaró que no importa el orden en que se acomoden, pues dos puntos determinan una recta y, con la última frase, pareció expresar que si tomamos una de ellas al azar es igualmente probable que pase por cualquiera de los seis puntos.

Expresiones figurales. Los estudiantes se ayudaron con el trazo de planos cartesianos, rectas y puntos para contestar a las preguntas en que estaban implicados estos conceptos (conjunto de reactivos 1 y 4), pero en sus dibujos no pusieron de manifiesto la propiedades no ostensivas de estos objetos, como la prolongación infinita de las rectas y los ejes coordenados, o la disposición homogénea de las unidades marcadas sobre los ejes.

Entrevista

Nueve días después de la aplicación del cuestionario se entrevistó al estudiante seleccionado. De sus respuestas durante el interrogatorio señalamos lo siguiente:

Indicó las rectas como segmentos de recta, sin prolongar sus líneas más allá de los puntos extremos. Contó una por una las líneas, ante la pregunta de cuántas rectas se pueden trazar en arreglos de 4, 5 y 6 puntos en el plano, lo que indica su desconocimiento de técnicas de conteo (combinaciones). Ubicó los puntos simétricamente y no en una configuración que pareciera al azar. Expresó el enfoque clásico de probabilidad. A la pregunta acerca de la diferencia entre las expresiones "uno de tres" y "una entre tres", contestó que con esta última llegaba a la interpretación frecuencial de probabilidad. Entendió la expresión "una entre tres" como dividir un segmento de recta en tres partes iguales y tomar una de esas secciones, que es una idea distinta a la que se hubiera esperado por las ideas previas expresadas, que es tomar una recta de entre tres. Inicialmente expresó la probabilidad como 1-3. Después afirmó que la podría expresar como una división. Posteriormente afirmó que la probabilidad era de un tercio, a partir de su expresión como una división. El entrevistado dijo que la probabilidad también se podía tomar como una parte de un pastel dividido en varias partes, asentando la idea de su expresión inicial “una de tres”. Para que indicara la cantidad de arreglos diferentes de cuatro puntos, uno por cada lado de un cuadrado (reactivo 3; véase la Figura 1), inicialmente no identificó que las opciones de acomodo disminuyen de uno en uno para los sucesivos elementos a ordenar; con una pregunta posterior el estudiante advirtió el decremento de uno en uno en esas ordenaciones sucesivas, pero no se percató de que el primer punto que se acomoda en el cuadrado es referencial y no se le considera para el cálculo. No distinguió acomodos iguales sólo porque estaban rotados de manera distinta, pero al final cambió esta consideración.

Conclusiones y comentarios

Los resultados muestran desconocimiento de los estudiantes de las ideas fundamentales implicadas en el cuestionario; para la solución de los problemas de conteo no utilizaron los métodos matemáticos correspondientes, expresaron medidas de probabilidad de un enfoque clásico mediante porcentajes, en su mayoría incorrectamente. Esto y los errores restantes implican que la enseñanza de estocásticos en la educación básica ha sido deficiente dando lugar a una serie de imprecisiones en las interpretaciones conceptuales y la solución de problemas por parte de los sujetos, por lo que, en acuerdo con Heitele (1975), proponemos la implementación del modelo de ideas fundamentales de estocásticos a lo largo de los distintos niveles de enseñanza como método para revertir las deficiencias de aprendizaje observadas. En corroboración de lo señalado por Acuña (2006) respecto a las gráficas, rectas y puntos, en los resultados se manifestó la incomprensión de los estudiantes de los objetos de conocimiento implicados en las competencias disciplinares indicadas por el programa de estudios de Geometría Analítica, exhibida mediante problemas combinatorios y probabilísticos; en los reactivos de combinatoria los estudiantes mostraron una subvaloración del número de arreglos y de combinaciones solicitados (en acuerdo con Fischbein, 1975). De nuestra entrevista derivaría también el resultado, ya avanzado por otros investigadores (de León, 2002), de que ante la idea de azar prevalece lo equiprobable debido al predominio de la idea de simetría física. Nos preguntamos qué respuestas se obtendrían aplicando el instrumento a estudiantes que cursaran la unidad de aprendizaje de Probabilidad y Estadística, del sexto semestre.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de construcción e interpretación por estudiantes de bachillerato, el caso de los ejes cartesianos. En E. Filloy (Ed). *Matemática educativa, treinta años* (pp. 215-236). México: Santillana.

De León, J. (2002). *Comprensión de la Ley de los Grandes Números de estudiantes de Ciencias Sociales*. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría Analítica*. México, D. F.: IPN.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, *8*, 153-165.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6(2), 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed). *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer.