I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

La Razón de Cambio. Niveles de Comprensión del Profesor de Educación Básica en México.

Miguel **Díaz** Chávez
Universidad Pedagógica Nacional Unidad 151
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
México
mdiaz3010@gmail.com

Resumen

En este reporte damos cuenta de algunos resultados parciales obtenidos de una investigación diseñada con el propósito de identificar el nivel de comprensión que alcanza el profesor de educación básica en México acerca del concepto de razón de cambio. La exploración la realizamos en el contexto de un programa de actualización aplicando un cuestionario donde solicitamos describir el concepto y resolver problemas. El análisis de las descripciones descubre la nula comprensión en los profesores de preescolar y primaria hasta alcanzar niveles poco significativos en el profesor de secundaria. Esto contrasta con la comprensión operatoria del concepto presente en las trayectorias de solución diseñadas por los profesores en la resolución de problemas, el cual evoluciona un poco en los profesores de preescolar y primaria, pero alcanza su máxima expresión en el profesor de secundaria. Las aportaciones contribuyeron involucrar al profesor en un proceso de comprensión autónomo de los conceptos emergentes.

Palabras clave: Niveles de comprensión, profesores de educación básica, razón de cambio.

Introducción

En México el discurso de los políticos encargados de la educación pública enfatiza actualmente una supuesta reforma educativa en el nivel básico, el origen parece ser son los malos resultados que obtienen los estudiantes del nivel mencionado en distintas evaluaciones nacionales (ENLACE: Evaluación Nacional del Logro académico y Calidad de la Educación) como internacionales (PISA). Esto lo atribuyen, en el mismo discurso, a la mala calidad de la enseñanza y en particular al deficiente conocimiento de la disciplina por parte del maestro. En esto último estamos de acuerdo, sin embargo, la deficiencia en el conocimiento no es rasgo exclusivo de este profesor.

En una investigación que realizamos con la finalidad de explorar la comprensión que poseía el profesor de bachillerato que impartía cálculo en México acerca del significado e interpretaciones de la derivada les pedimos obtener la derivada de esta función:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0 \le x \le 1 \\ -\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+3 & 1 < x \le \frac{13}{6} \\ 2x-\frac{7}{3} & \frac{13}{6} < x \le 4 \end{cases}$$

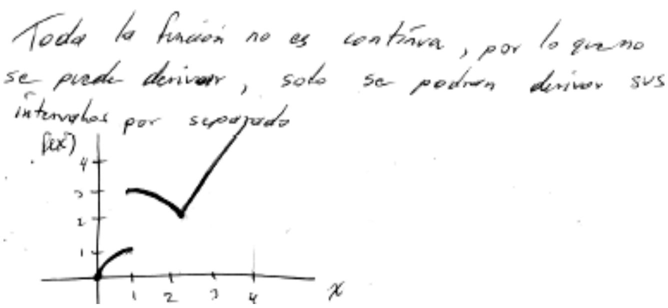
El análisis de las trayectorias de solución que diseñaron los profesores permitió descubrir que algunos aplican las reglas de derivación mecánicamente a cada una de las expresiones que componen la función

$$f(x)=x^{1/3} \quad \boxed{f'(x)=\tfrac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$
$$f(x)=-\left(x-\tfrac{7}{6}\right)^2+3 \quad \boxed{f'(x)=-2\left(x-\tfrac{7}{6}\right)}$$
$$f(x)=2x-\tfrac{7}{3} \quad \boxed{f'(x)=2}$$

Otros recuerdan algunos conceptos de cálculo de manera encapsulada y establecen relaciones y conclusiones no coherentes

es una función a trosos y es discontinua No se pede derivar.

Otros más utilizan la gráfica como herramienta para obtener conclusiones falsas basadas en la percepción visual (Díaz & Rivera, 2012)



Estos hechos además de revelarnos ciertos rasgos que permean la cognición de este profesor, nos revelaron el bajo nivel de comprensión que tiene este profesor sobre uno de los conceptos más importantes que le corresponde enseñar. ¿Incidirá esto en las dificultades que exhiben los estudiantes en la comprensión de los conceptos que subyacen en este curso? Estas dificultades en ocasiones permanecen pasivas en el sujeto; sin embargo, cuando se activan constituyen verdaderos obstáculos en el aprendizaje en el sentido de Brosseau (2002). Si esto sucede con estos profesores que tienen cierta formación matemática, lo mismo que el profesor de la escuela secundaria, qué podemos esperar de la comprensión de los profesores de preescolar y primaria en cuya formación está ausente esa formación especializada.

En relación al concepto de derivada, está relacionado con las nociones de razón y cambio, cuyos inicios formales se encuentran en el currículum de educación básica, en temas relacionados con el número racional, razón, proporción, fracción; entre otros. Es un concepto que se extiende en todo el currículum desde la escuela elemental hasta el universitario (Lamon, 2007). Respecto a los conceptos mencionados ¿Qué podemos decir acerca de lo que comprende el profesor de educación básica?

Reflexionando acerca del nivel de comprensión que probablemente exhiban estos profesores sobre estos conceptos, nos dimos a la tarea de revisar algunos libros de texto de matemáticas de educación básica de México que datan de las décadas de los sesentas y setentas del siglo pasado y en esta revisión percibimos una inclinación a desarrollar en el alumno habilidades, destrezas, el uso de algunas reglas y técnicas y la definición de los conceptos. Esta orientación incuestionablemente es necesaria, pero creemos que no es suficiente, ya que consideramos que la enseñanza de la matemática debe enfatizar la comprensión de las reglas, las técnicas y los conceptos mismos, consideración que plantean la NCTM (2000) en sus *Principles and Standards for School Mathematics* y la OECD (2002) en el *Programme for International Student Assesment*, este último conocido popularmente como PISA; sin embargo esta creencia nuestra conlleva reflexionar acerca de las posibilidades reales de llevarla a la práctica, un aprendizaje con comprensión es necesariamente una variable que depende, entre otras cuestiones de una enseñanza que promueva la comprensión; y esta orientación depende directamente del profesor. *¿Los profesores de educación básica en México comprenden realmente los conceptos matemáticos contenidos en el currículum en los cuales se construye el concepto de derivada?* Más puntualmente *¿El profesor de educación básica comprende los conceptos de razón y de razón de cambio?*

Uno podría conformarse con aceptar que las dificultades que exhiben los estudiantes sobre los conceptos matemáticos tienen su origen en el aprendizaje, sin embargo nosotros tenemos serias dudas al respecto y creemos como Prenowitz (1951), que algunas de esas dificultades, como en el caso de la derivada, tienen su origen en la complejidad de los conceptos mismos; sin embargo no descartamos que el origen de esas dificultades se encuentre en el aula misma, más específicamente, en la conducción de la clase por el profesor (Lloyd & Wilson, 1998). De manera más precisa, en las dificultades que tiene el profesor en la comprensión de los mismos.

La buena comprensión por el profesor le permite diseñar situaciones de aprendizaje con comprensión. En caso contrario, únicamente repite lo memorizado, esto probablemente provocará en los alumnos un sentimiento de frustración. En general los sentimientos negativos que la gente tiene respecto de las matemáticas lo atribuyen, correcta o incorrectamente, a sus profesores (Boas, 1981).

Al profesor le corresponde además comunicar bien los conceptos a través del lenguaje, proporcionando definiciones o experiencias, ejemplos y contraejemplos para que el estudiante forme su propio sistema conceptual. Ello exige naturalmente del profesor una comprensión clara de los mismos. Sin embargo esta competencia parece no tenerla adecuadamente desarrollada (D'Amore y Martini, 2000).

Dewey (1916) alertaba sobre el impacto nocivo de una enseñanza sin comprensión; señalando que afecta la habilidad del estudiante para reflexionar sobre el sentido de lo que hace. Por su parte el profesor Freudenthal (1973) afirmaba que la persona que enseña debe saber más que el que está aprendiendo y lo debe saber no en el momento en que está realizando la acción de enseñar, sino antes; sin embargo Ponte & Chapman (2006) muestran que los profesores de matemáticas tienen una gran deficiencia en el conocimiento de la disciplina.

Partiendo de la necesidad de conducir un aprendizaje con comprensión, lo cual requiere de profesores que cuenten con los conocimientos y por supuesto con una buena comprensión de los conceptos que enseñan, diseñamos esta investigación con la finalidad de explorar el nivel de comprensión que tiene el profesor de educación básica sobre uno de los conceptos matemáticos que desde mi particular punto de vista es de los más interesantes, tanto por su construcción formal a lo largo de todo el currículum desde la educación básica, en cuya genética encontramos los conceptos de razón y proporción y la construcción continua hasta el nivel universitario con conceptos más complejos del análisis matemático por ejemplo. Además el concepto de razón de cambio tiene una amplia gama de conexiones y aplicaciones en la misma matemática como con otras disciplinas. Es verdad que la exploración de esos conceptos ha ocupado a la comunidad de investigadores, sin embargo la mayoría ha dirigido la atención a explorar la cognición de los estudiantes (Singh, 2000; Lamon, 2007; Teuscher & Reys, 2010) a la discusión de los significados y construcción de propuestas (Behr, 1992) y en nuestra búsqueda encontramos sólo un trabajo orientado a la exploración de la razón de cambio en los profesores (Ellis, 2007) pero en el nivel superior.

Marco teórico

La preocupación por estudiar la comprensión en el aula de matemáticas ha despertado el interés de diversos sectores de la sociedad, desde mediados del siglo pasado, investigadores en educación matemática y psicólogos se han ocupado de este tema (e.g. Brownell, 1947; Skemp, 1976; Carpenter & Hiebert, 1992). El profesor Skemp (1976) por ejemplo distingue entre la comprensión relacional y la instrumental. Sierpinska (1994), así como Fennema & Romberg (1999) reportan resultados y reflexiones teóricas en relación con la comprensión en matemáticas. Otras fuentes documentales (NCTM, 2000) precisan que los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas y construir activamente sus nuevos conocimientos a partir de sus experiencias y sus aprendizajes previos. Esto está íntimamente relacionado con el principio de enseñanza, que señala: Para que la enseñanza sea efectiva los profesores deben conocer y comprender profundamente las matemáticas que a ellos les toca enseñar y ser capaces de recurrir a este conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza….Los profesores deben tener frecuentes y amplias oportunidades y fuentes para mejorar y actualizar su comprensión…Los profesores necesitan saber los distintos significados de los conceptos…Los profesores necesitan conocer las distintas representaciones de los conceptos, las fortalezas y debilidades de las mismas aisladamente y como se relacionan unas con otras

La OECD en su programa PISA enfatiza la comprensión en el desarrollo del pensamiento matemático cunado menciona que la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes saben y necesitan aprender y entonces exigirles y apoyarlos para aprenderlo bien.

En la exploración de los niveles de comprensión sobre la razón de cambio nosotros consideramos las formas de actividad mental que enuncian Carpenter & Lehrer (1999): la construcción de relaciones, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre la experiencia, la articulación de lo que se conoce y la apropiación del conocimiento; las cuales, desde nuestro punto de vista son visibles en lo que hace, comunica, explica y prueba el sujeto. A éstas nosotros añadimos la comunicación del conocimiento, ya que los argumentos y en general la manera en que lo hace es un indicador del nivel de su nivel de comprensión.

Metodología

La investigación la realizamos en el contexto de un taller de actualización de profesores en relación al sentido numérico y pensamiento algebraico, estos profesores fungen como asesores metodológicos en la educación básica. El taller tuvo lugar en cuatro regiones del Estado de México y en él participaron 36 profesoras de preescolar 79 de primaria y 36 de secundaria.

Para el taller diseñamos un cuestionario dividido en dos secciones. En la primera solicitamos datos relacionados con su perfil profesional, que incluía su formación, su último grado de estudios y la institución que lo otorgó, su especialidad y su experiencia en la docencia. En esta misma sección se pidió a los profesores describir los siguientes conceptos:

- *Matemáticas*
- *Número*
- *Razón de cambio*
- *Pensamiento Matemático*
- *Razón de cambio*

La segunda parte del taller consistió en la resolución del siguiente problema (*Figura 1*). El cual es una adaptación del problema de manzanos y coníferas contenido en PISA. Este problema se planteó con la intención de indagar la comprensión del profesor acerca de la razón de cambio a través del análisis de las trayectorias de solución y la comunicación de las mismas. El problema es el siguiente:

Un agricultor siembra árboles de manzanas. Para proteger el huerto del viento, siembra coníferas, utilizando un modelo como el que muestra el dibujo.

X=conífera; ●= manzana
XXX *X ● X* *XXX*
XXXXX *X●   ●X* *X   X* *X●   ●X* *XXXXX*
XXXXXXX *X●   ●   ●X* *X   X* *X●   ●   ●X* *X   X* *X●   ●   ●X* *XXXXXXX*
XX XXXXXXX *X●   ●   ●   ●X* *X   X* *X●   ●   ●   ●X* *X   X* *X●   ●   ●   ●X* *X   X* *X●   ●   ●   ●X* *X X XXXXXXX*

a) ¿En algún momento el número de coníferas es igual al número de árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

b) Supóngase que este agricultor quiere hacer más grande el huerto con más filas de árboles. ¿Qué aumentará más rápidamente, el número de árboles de manzana o el de coníferas? Argumenta tu respuesta.

c) ¿Cuántos árboles de coníferas se requerirán para rodear k árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

Figura 1. Problema adaptado de PISA (2002)

El proceso de resolución se dividió en cuatro etapas. En la primera los profesores lo resolvieron individualmente. En la segunda etapa, los profesores agrupados ahora en equipos discutieron las trayectorias de solución de cada uno de ellos y colaboraron en el diseño de una colectiva. En la tercera etapa cada uno de los equipos comunicó al pleno la trayectoria consensada. Finalmente la sesión concluía con algunas precisiones conceptuales, orientadas por un lado a la comprensión de los conceptos matemáticos emergentes y por otro lado a la comprensión de la parte didáctica; tomando como punto de partida esas trayectorias de solución.

La información la estamos concentrando en mapas conceptuales, los cuales nos han auxiliado en la identificación, interpretación y jerarquización de sus niveles de comprensión de la razón de cambio. El análisis de los resultados lo estamos haciendo primero a nivel individual, luego transitaremos a las comunidades de enseñanza (preescolar, primaria y secundaria), para finalmente identificar afinidades entre estas comunidades e individuos.

Algunos resultados y discusión

Una vez que aplicamos el cuestionario el análisis lo hacemos considerando por un lado las respuestas a la pregunta y por otro las trayectorias de solución al problema. Después el análisis lo estamos haciendo considerando diversos niveles. En el primero consideramos únicamente el nivel educativo en que laboran los profesores, preescolar, primaria o secundaria. Este es el que presentamos en este reporte. Un segundo nivel de análisis lo hacemos en cada uno de los profesores, considerando sus mismas trayectorias de solución y los argumentos y pruebas que esgrimen.

Lo que explican acerca de la razón de cambio.

Lo que percibimos en esta parte es que el nivel de comprensión de los profesores específicamente sobre este concepto va en orden ascendente. Desde una comprensión casi nula de los profesores de preescolar

> - Razón de cambio.- Construir, para transformar. Resolución de problemas.

> 5 Razón de cambio.- un motivo intrinseco para o que posibilita la transformación de pensamiento o de comportamiento

Este tipo de respuestas, generalizadas en estas profesoras muestran una nula comprensión del concepto. Las definiciones y las explicaciones están más bien asociadas a la valoración social como *razón para el cambio*. Sin embargo los conceptos aislados de *razón* y *cambio* son conceptos que los niños comprenden y utilizan de alguna manera en distintas actividades. Estos conceptos además están implícitos en los contenidos correspondientes al pensamiento matemático a desarrollar en preescolar.

En el caso de los profesores que laboran en la escuela primaria las respuestas no varían mucho, el nivel de comprensión es muy semejante al que exhiben las profesoras de preescolar. Algunos prefieren omitir su respuesta.

Otros lo definen de manera semejante a las de los profesores de preescolar.

> azón de cambio - tener expectativas de actualizar y mejorar

En la Escuela Primaria se profundiza en la construcción de los conceptos de fracción, razón y proporción; estos están explícitos o implícitos en los tres ejes en que está organizada la enseñanza de la matemática este nivel.

El nivel de comprensión se modifica un poco y en casos aislados en los profesores de educación secundaria como lo ilustra la siguiente descripción

> 5- RAZON DE CAMBIO: COMPARACION DE DOS CANTIDADES

No obstante la aparente precisión de estas respuestas, resulta, con un análisis pertinente del contexto, en un bajo nivel de comprensión. Finalmente los términos utilizados carecen de significado y relación con el verdadero concepto de razón de cambio.

Sin embargo, si bien es cierto ese nulo bajo nivel de comprensión que manifiestan los profesores en sus explicaciones y definiciones es totalmente distinto al que muestran en la resolución del problema en cuya solución subyace el concepto de razón de cambio.

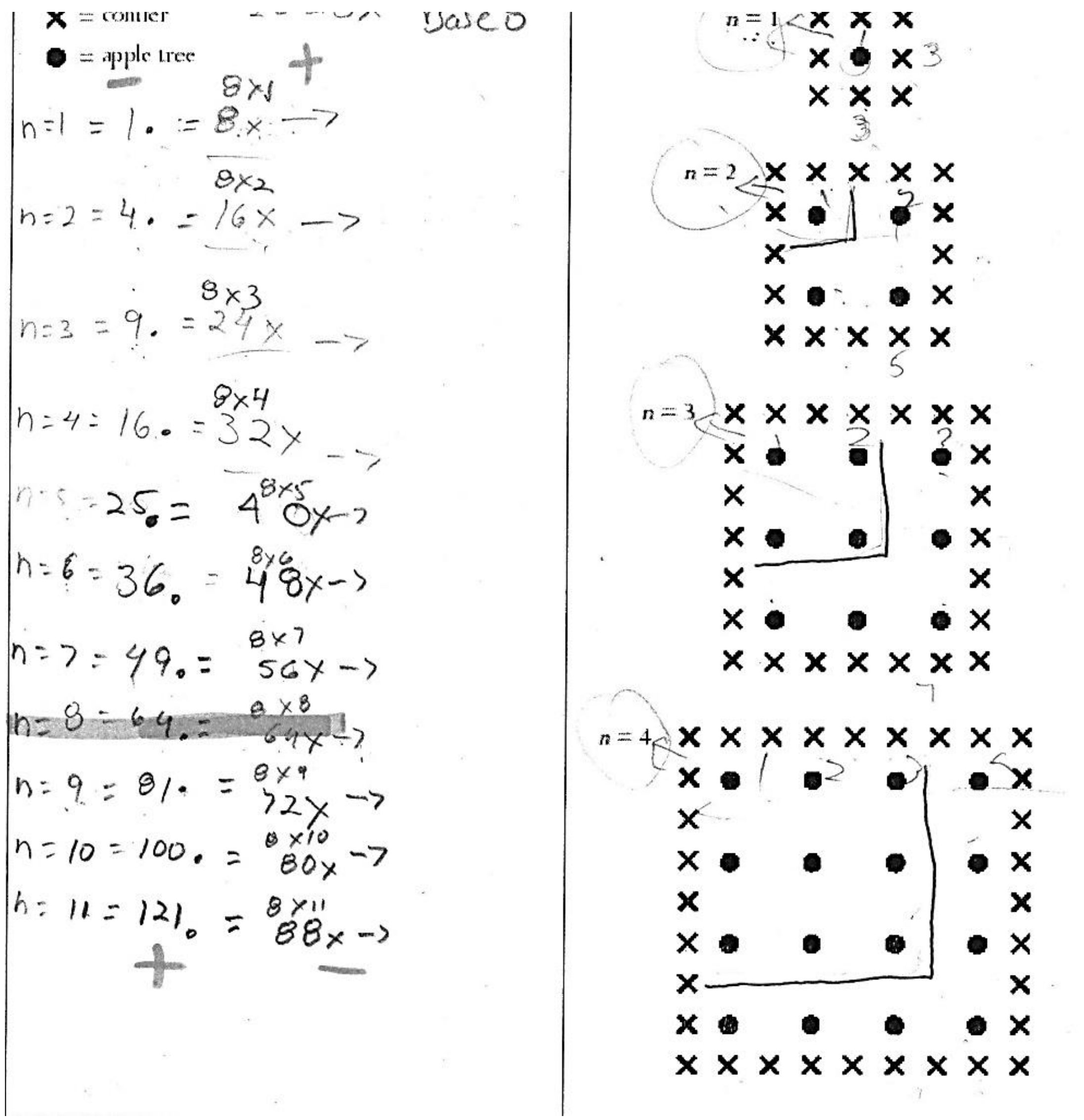


Figura 2. Trayectoria de solución de una profesora de preescolar

En la resolución del problema de manzanos y coníferas todos los profesores utilizan el concepto de razón de cambio en distintos niveles, operan de manera ágil con el mismo, esto sin embargo contrasta con las deficiencias en su explicaciones. El profesor del nivel básico no sabe cómo explicarlo pero si sabe utilizarlo.

En el caso de las profesoras de preescolar se manifiesta una clara inclinación a la ejecución con una tendencia a la percepción de formas y figuras para después transitar al hacer aritmético donde combinan de manera indistinta símbolos, notaciones y relaciones; sin ninguna preocupación por las reglas sintácticas como se puede ver en la figura 2.

Vale la pena señalar que esta trayectoria permitió en la etapa final descubrir la suma de los primeros *n* números impares.

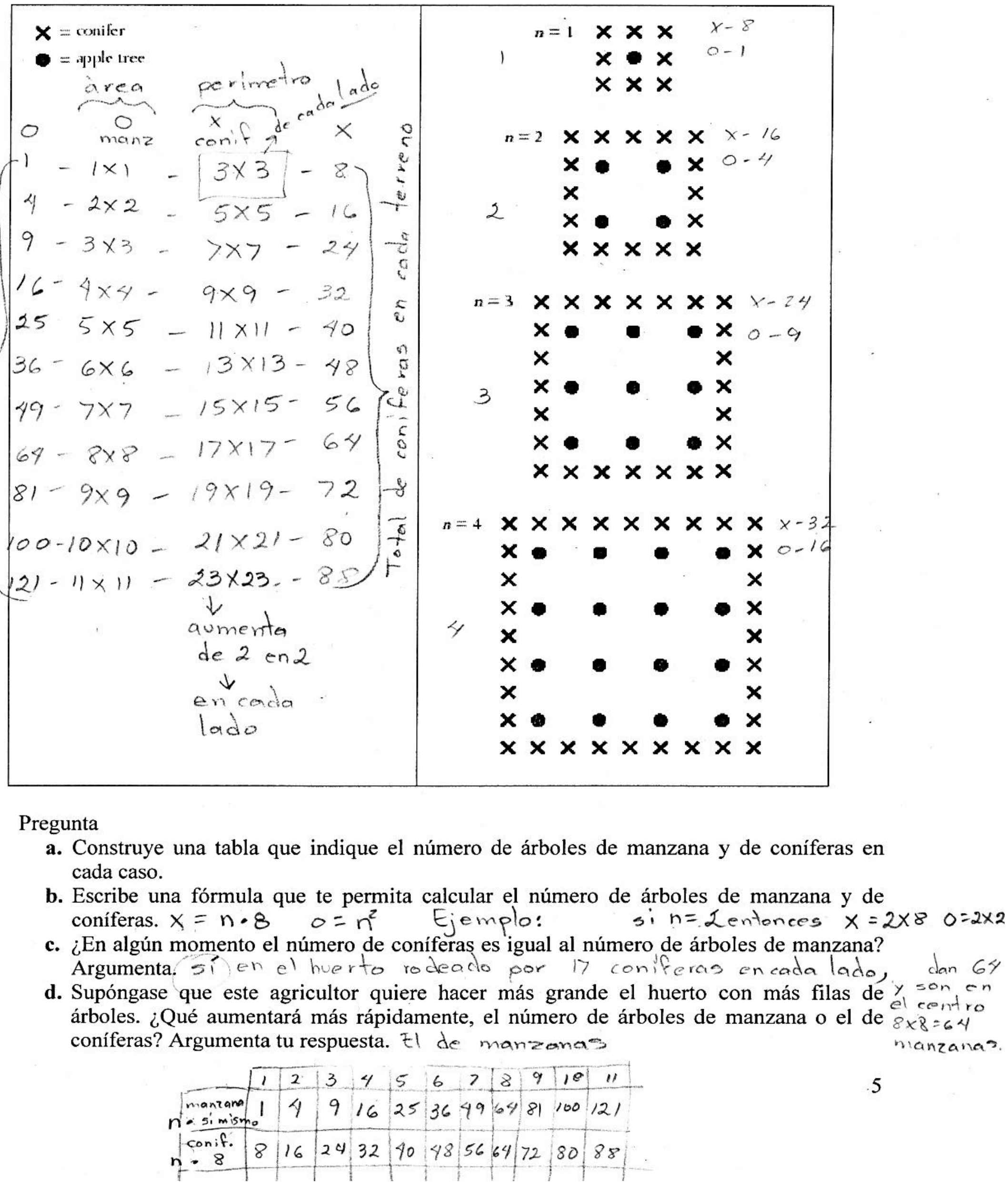


Figura 3. Trayectoria de solución de un profesor de secundaria

En los algunos profesores de primaria y principalmente de secundaria percibimos un respeto por la sintaxis y la semántica, ahí se observa claramente como el nivel de comprensión ha evolucionado de lo operatorio a lo simbólico. Observándose el tránsito de la comprensión aritmética a la comprensión simbólica, de los arreglos numéricos a la traducción de las expresiones algebraicas, donde se puede ver la razón de cambio pero que sin embargo el profesor aún no distingue este significado, aún en el caso sencillo de la variación directamente proporcional.

En la figura 3 por ejemplo se puede observar otro nivel de comprensión, lo cual se evidencia al usar correctamente las literales para la representación de las relaciones, además de que identifican variables; sin embargo aún con esta evolución hacia el álgebra en el tratamiento de la información, su manejo, traducción y arribo a generalidades importantes sobre el problema y su solución el nivel de comprensión de la razón de cambio no muestra una evolución significativa. Este es el punto de partida para involucrar al profesor en un proceso de comprensión evolutivo, que se construye de manera colaborativa a partir de los conceptos emergentes en la resolución de los problemas y la orientación del experto. La figura 4 muestra un poco este proceso.

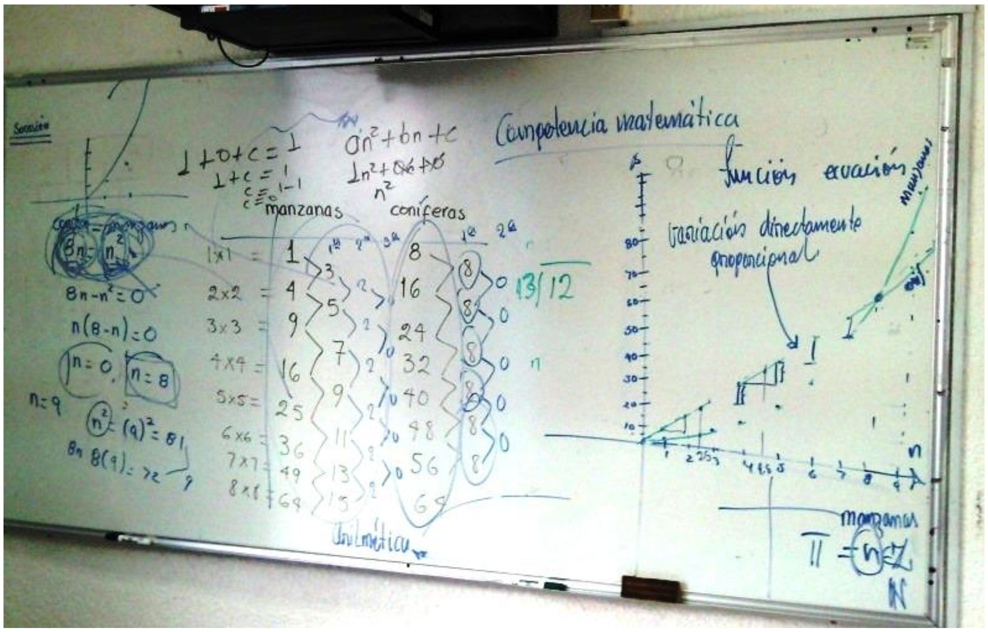


Figura 4. Conceptos emergentes y su articulación en el proceso de comprensión.

Conclusiones

En un primer nivel de análisis los casos discutidos exhiben la nula comprensión del concepto y por otro la encapsulación del mismo, esto tiene que ver de alguna manera con las dificultades que tienen los estudiantes con la comprensión que posteriormente tienen con conceptos relacionados con el cálculo, tales como límite, el infinito, la idea de función y la demostración. La investigación mostró además que es posible involucrar al profesor en un renovado y significativo proceso de comprensión a partir de la resolución de problemas no rutinarios y el trabajo colaborativo entre los elementos de distintas comunidades de aprendizaje.

Referencias

Behr, M.; Guershon, H.; Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion. En Grouws, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Toronto. Macmillan Publishing Co. 296-333.

Boas, R. (1981). Can We Make Mathematics Intelligible? *The American Mathematical Monthly*. **88**(10), 727-731.

Brosseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York. Kluwer Academic Publishers.

Brownell, W. A. (1947). The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*. **47**(5). 256-265.

Carpenter, T. & Hiebert, J. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grows, A.D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Co. 65-97.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En Fennema E. & Romberg, T. (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum**.** 19-32.

D'Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* **3**(1). 33-46.

Ponte, J. & Chapman, O. (2006). Mathematics teacher's knowledge and practices. En Gutierrez, A. & Boero, P. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* Rotterdam: Sense Publishers. 461-494.

Dewey, J. (1916). *Democracy and education*, USA. The Free Press.

Díaz, M. & Rivera, A. (2012). Understanding of the derivative and its meanings. the case of calculus professors. En *Proceedings of The 12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12).* Seoul. Korea. 2862-2870.

Ellis, E. (2007). *Modelling teachers' ways of thinking about rate of change.* Doctoral Tesis. Arizona State University.

Fennema, E. & Romberg, T. (Eds.). (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (Ed.). (1973). *Mathematics as an education task*. Dordrecht. Reidel.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework. En Lester, F. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning*. NCTM. 629-668.

Lloyd, M. & Wilson, M. (1998). Supporting innovation; the impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. **29**(3), 248-274.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. USA. National Council of Teachers of Mathematics.

OECD. (2002). *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment: Reading, Mathematical and Scientific Literacy*. Paris. Organisation for Economic Co-operation and Development.

Prenowitz, W. (1951). Insight an understanding in the calculus. En Apostol, T. *et.al.* (Eds.) *A Century of Calculus*. USA. The Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London. Falmer Press.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*. **43**(3). 271-292.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*. **77**. 20-26.

Teuscher, D. & Reys, R. (2010). Slope, rate of change and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*. **103**(7). NCTM. 529-524.