View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS ENTORNO A LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO COMO ASPECTO MEDIACIONAL PARA SU ENSEÑANZA

Angélica María Martínez, Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay Venezuela
angelicmar5@yahoo.es, mariojose@hotmail.com

Resumen. Por medio de un estudio histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado, se establecieron diversas prácticas geométricas que permitieron detallar mecanismos idóneos tanto para la enseñanza como aprendizaje de nociones, procesos y significados de este objeto matemático. Bajo el "enfoque ontosemiótico" de la cognición e instrucción matemática se analizó la idoneidad didáctica a través de métodos cualitativos, enfatizando la dimensión mediacional, epistémica y ecológica, concernientes al grado de adaptación de los significados institucionales implementados y de referencia, así como al grado de adaptación curricular. En conclusión, el trabajo geométrico rompe con esquemas tradicionales donde la resolvente suele predominar en total separación con otros aspectos intra-matemáticos.

Palabras clave: geometría, ecuación de segundo grado, idoneidad mediacional

Abstract. Through a historical-epistemological study of the second degree equation, were established different geometric practices that allowed itemize mechanisms suitable both teaching and learning of concepts, processes and meanings of this mathematical object. Under the "onto-semiotic approach" to mathematical cognition and instruction, were analyzed the didactic suitability through qualitative methods, emphasizing mediational suitability, epistemic and ecological concerning the degree of adaptation of meanings institutional implemented and reference, as well as degree of curricular adaptation. In conclusion, the geometric work breaks traditional schemes where the typical solutions predominate totally separated to other intra-mathematical aspects.

Key words: geometry, second degree equation, mediational suitability

Introducción

La antigüedad con la que se reseña la aplicación y estudio de las ecuaciones de segundo grado puede dar una idea de cuan importantes son en el contexto matemático y a su vez advierte su utilidad en la solución de situaciones cotidianas pues hacen parte de trabajos de física, química, ingeniería, arquitectura, astronomía, industria, etc.; además hacen parte del contenido básico de muchas carreras universitarias, lo cual de alguna manera vislumbra la importancia que tiene su enseñanza por las aplicaciones a situaciones diversas como: el cálculo de áreas, lados y diagonales de paralelogramos; sirven para determinar la superficie y radio de círculos; abordar el teorema de Pitágoras; adquirir una mejor comprensión de funciones cuadráticas; realizar estudios de cálculo en: lanzamiento de un proyectil, caída de los cuerpos, velocidad del agua en tuberías, resistencias eléctricas; entre otras aplicaciones.

Por lo anterior, el presente trabajo detalla el desarrollo histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado, donde se establecen las prácticas dadas en diversos períodos de la humanidad en torno a dicha ecuación, con el propósito de precisar los mecanismos idóneos para la enseñanza y aprendizaje de nociones, procesos y significados de este objeto matemático, porque tal como dicen Godino y Batanero (1994), el análisis epistemológico de los objetos matemáticos debe permitir clarificar la naturaleza de dichos objetos y sus diversos significados según los contextos institucionales. Además, este tipo de análisis es esencial para la Educación Matemática, pues difícilmente se pueden estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos e indefinidos (Arrieche, 2003).

En tanto, metodológicamente, la investigación es de tipo cualitativo apoyada por un estudio documental, a través de la revisión y lectura de diversas fuentes como: tesis doctorales, de maestría, libros, revistas y textos relacionados con el tema; precisamente, "la Documentación es el soporte de la Historia..., constituye además una fase de la investigación histórica, específicamente el estudio de las fuentes, la recolección y evaluación de la información" (Finol y Nava, 1993, p. 60). Además, bajo el enfoque ontosemiótico se pudo analizar la idoneidad didáctica, enfatizando la dimensión mediacional, la cual está ligada al grado de disponibilidad de los recursos materiales siendo factor determinante para el interés de los educandos en un proceso de estudio, pero sin dejar de lado las dimensiones epistémica y ecológica (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2007), concernientes al grado de adaptación de los significados institucionales implementados y de referencia, así como al grado de adaptación curricular, respectivamente.

A continuación en forma sucinta, se plantean: Marco teórico referencial, construcciones geométricas para solucionar la ecuación de segundo grado, y reflexiones a nivel didáctico.

Marco Teórico Referencial

Resulta necesario aclarar algunos sustentos teóricos con los cuales se fundamenta el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) a fin de dar claridad a los mencionados anteriormente como es el caso de idoneidad mediacional.

En primera estancia el EOS define práctica: "… a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p.8), mientras que el término *significado*, es entendido como el sistema de prácticas (actuativas o discursivas) que realiza una persona, o compartidas en el seno de una institución para resolver algún tipo de situaciones problemas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2009); por lo que puede hablarse de significado *Personal o Institucional.*

Otra noción es la de *Objeto matemático*, fundamental dentro del EOS y concebida como todo aquello que pueda ser indicado, todo lo que pueda señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas (Godino, 2002).

Con el transcurrir del tiempo, el EOS comenzó a desarrollar nuevas nociones para estudiar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, una de esas nociones es la *idoneidad didáctica* entendiéndose como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados. (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Para hacer operativa la noción de *idoneidad didáctica* es necesario la interacción de las *idoneidades parciales*: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.

Es importante mencionar que la valoración de un proceso de estudio se puede aplicar a una propuesta curricular y puede ser útil para analizar aspectos parciales como un material didáctico, o "incidentes didácticos" puntuales (Godino *et al*, 2009). Cabe señalar que para este trabajo se aplicaron las herramientas de análisis de un proceso de estudio referencial correspondientes a la ecuación de segundo grado, enfatizando la idoneidad mediacional.

Construcciones geométricas para solucionar la ecuación de segundo grado

Dentro del análisis histórico-epistémico de la ecuación de segundo grado, se destacan las construcciones geométricas para su resolución, entre ellas las realizadas por los griegos, particularmente por Euclides; las abordadas por la civilización árabe, donde sobresalen los aportes de Al-Khuwarismi, entre otras más. A fin de hacer más explícito cada uno de los hallazgos, se detallarán a continuación algunos de ellos a través de ejemplos concretos.

En la época de la antigua Grecia (s. VI a.C al s. VI d.C.), Euclides (quien vivió alrededor del s. IV y III a.C.), describe la denominada proposición 6 para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax + x^2 = b^2$; esta proposición dice:

> Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta; el rectángulo comprendido por la recta entera con la recta añadida y la recta añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida. (Luque, Montes y Sánchez, 2004, p.304).

Tomando el caso particular de la ecuación $6x + x^2 = 72$ (a), y aplicando la proposición de Euclides se puede llegar al siguiente gráfico 1:

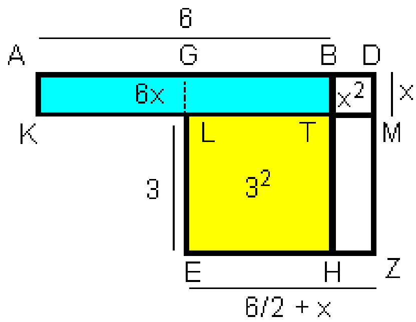


Gráfico 1. Construcción Geométrica para $6x + x^2 = 72$ (Proposición 6 de Euclides)

Con esta proposición se tiene que la suma del área en el rectángulo *ADMK* más la del cuadrado *LTHE* es igual al área del cuadrado *GDZE*, de donde se puede encontrar el valor de *x*. Numéricamente lo anterior viene a ser equivalente a: $(6x + x^2) + 3^2 = (3 + x)^2$, pero como $(6x + x^2)$ es igual a 72 por la ecuación dada en (a), entonces se tendría:

$72 + 9 = (3 + x)^2$ (por sustitución del valor de (a))

$81 = (3 + x)^2$ (por suma de términos independientes)

$9 = 3 + x$ (por extracción de raíz cuadrada a ambos miembros y tomando solo la raíz positiva)

$6 = x$ (por despeje)

De la civilización árabe se destaca Al-Khuwarismi (780-847), quien planteó la solución a ecuaciones de segundo grado usando completación de cuadrados, para casos como: cuadrados iguales a raíces; cuadrados iguales a números; raíces iguales a números; cuadrados y raíces iguales a números (en simbología actual $x^2 + bx = c$); cuadrados y números iguales a raíces (es decir, $x^2 + c = bx$); raíces y números iguales a cuadrados (de la forma: $bx + c = x^2$) (Cadenas, 2004). Un ejemplo para el caso de cuadrados y raíces iguales a números es si se tuviera la ecuación $x^2 + 6x = 7$, donde su solución se consigue partiendo de de la construcción geométrica dada en el gráfico 2.

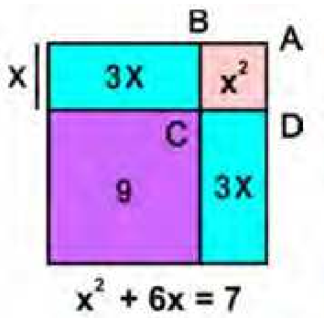


Gráfico 2. Construcción geométrica para la ecuación $x^2 + 6x = 7$

Para la elaboración de este gráfico se consideran los siguiente pasos: primero, se comienza por construir el cuadrado de lado *x*, *ABCD*, cuya área es x^2. Luego se prolongan los lados *AB* y *AD* en 3 unidades respectivamente (de este modo se obtienen dos rectángulos cada uno con área equivalente a $3x$, siendo la suma de las dos igual a $6x$, lo cual constituye el segundo término de la ecuación). A continuación, se completa el cuadrado construyendo otro cuadrado cuya área será igual a $9\ u^2$. Puede verse como el área total del cuadrado mayor viene siendo la suma de las anteriores áreas; es decir, se tienen $A_c = x^2 + 6x + 9$. Ahora, para resolver la ecuación $x^2 + 6x = 7$, se le suma 9 a ambos miembros, quedando $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$, ó igual a $x^2 + 6x + 9 = 16$, pero a su vez equivalente a $(x + 3)^2 = 4^2$, donde al extraer la raíz cuadrada quedará $x + 3 = 4$ (se toma solo la raíz positiva por tratarse de una distancia), y por lo tanto se tiene como resultado $x = 1$.

Otras completaciones de cuadrados dadas por Al-Khuwarismi a ecuaciones, hoy en día de la forma $x^2 + bx = c$, $bx + c = x^2$, y $x^2 + c = bx$, se tienen respectivamente en el gráfico 3.

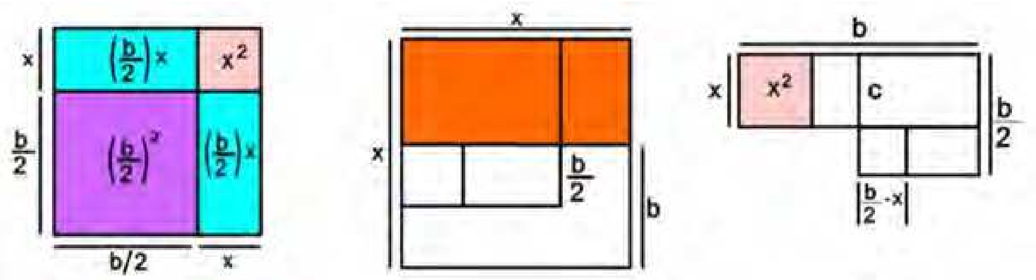


Gráfico 3. Otra construcción geométrica dadas por Al-Khuwarismi

Las soluciones de Al-Khuwarismi pueden ser fundamentadas a través de demostraciones geométricas (Ribnikov, 1987); por ejemplo, la ecuación de la forma $x^2 + ax = b$(*), puede tener una representación geométrica como la del gráfico 4:

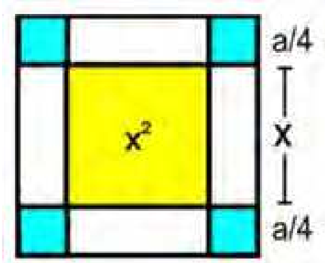


Gráfico 4. Otra construcción geométrica para ecuaciones de la forma $x^2 + bx = c$

Partiendo de esta construcción, se puede deducir que el área total S de dicha figura, se representa simbólicamente con la ecuación $S = x^2 + 4\left(\frac{a}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{4}\right)x$, equivalente a su vez a

$S = (x^2 + ax) + \frac{a^2}{4}$, de donde al reemplazar el paréntesis por el valor de *b* en (*) se llega a: $S = b + \frac{a^2}{4}$(**). Ahora, por el gráfico 4 el área de *S* también equivale a $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$, llevando esto en (**) se tendrá: $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$, equivalente a: $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$, donde al despejar x se llega a: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$, solución hoy en día conocida.

Siglos más adelante, Descartes (1596-1650) detalla instrucciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas en forma similar a como lo hicieron los griegos en la antigüedad (Boyer, 1999), su método para ecuaciones de la forma $x^2 = bx + c^2$ presenta los siguientes pasos, detallados en el gráfico 5: primero se construye el segmento *AB* con $AB = c$, luego se levanta una perpendicular en el punto *A*, y se traza el segmento $AC = \frac{b}{2}$, de esto se construye un círculo con centro en *C* y radio *AC*, luego se traza una línea entre los puntos *B* y *C* de manera que corte el círculo en otros dos puntos denominados *E* y *D*. Al final, se deduce que *x* equivale a la medida del segmento *BE* (Luque, Mora y Torres, 2004).

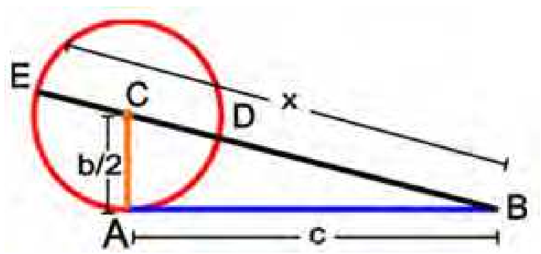
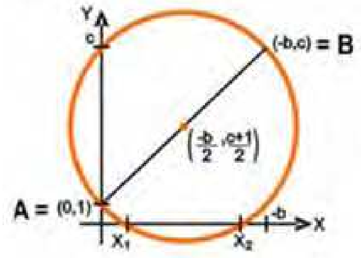


Gráfico 5. Construcción geométrica de Descartes para $x^2 = bx + c^2$

Dicho resultado parte del teorema de Pitágoras; como puede verse, se tiene que el triángulo *ABC* es rectángulo y por lo tanto se tiene que: $CB^2 = AC^2 + AB^2$, sin embargo, haciendo los respectivos cambios por *x, b* y *c*, quedará: $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$, de donde se puede llegar a: $x^2 - bx = c^2$, siendo $x^2 = bx + c^2$. Además, podría hallarse su otra solución, la cual equivale al valor de *DB*; en este caso se aplicarían pasos similares a los anteriormente descritos, pero podría llamarse a $DB = y$, para tener la ecuación de la forma: $y^2 + by = c^2$.

Otro matemático, Thomas Carlyle (1795-1881), trabaja una solución geométrica para la ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ partiendo de definiciones de la geometría plana, como: ecuación de una circunferencia, distancia entre puntos y punto medio. El gráfico 6 muestra la forma de análisis geométrico empleado por Carlyle, del cual, por geometría analítica se desprende la ecuación (*):



$$\left(x-\frac{-b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[b^2+(c-1)^2\right]^2 \qquad (*)$$

Gráfico 6. Construcción geométrica de Carlyle para $x^2+bx+c=0$.

Los valores hallados en (*) representan una solución a la ecuación dada. El procedimiento para demostrarlo es más ó menos así: se sabe que el diámetro de la circunferencia es *AB*, entonces el radio *(r)* debe medir *r=AB/2*, donde la distancia de *AB* queda en la ecuación $x=\frac{1}{2}\sqrt{(-b-0)^2+(c-1)^2} = \frac{\sqrt{b^2+(c-1)^2}}{2}$ (i). Como el centro de la circunferencia es el punto medio de *AB*, entonces su valor en coordenadas es $\left(-\frac{b}{2},\frac{c+1}{2}\right)$, en cuyo caso la ecuación de la circunferencia será de la forma: $\left(x-\frac{-b}{2}\right)^2+\left(0-\frac{c+1}{2}\right)^2=r^2$, donde al reemplazar a *"r"* en (i) y al hacer otras operaciones quedará $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2+(c-1)^2-(c+1)^2}{4}$, equivalente a: $x^2+bx+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}-c$, y a su vez a: $x^2+bx+c=0$; además, como el valor de *x* es solución, entonces el punto *(x,0)* pertenece a la circunferencia (Luque *et al*, 2004).

Finalmente, el matemático alemán Karl Von Staudt (1798 - 1867), encuentra una solución a la ecuación de la forma $x^2-px+q=0$, muy similar a la actualmente conocida resolvente, y para esto se vale de construcciones geométricas como se muestra en el gráfico 7.

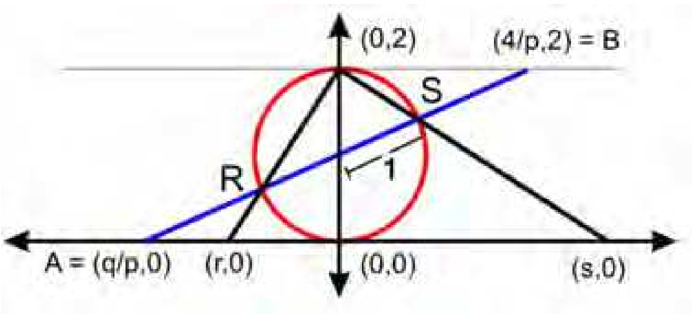


Gráfico 7. Construcción geométrica de Von Staudt para $x^2- px + c = 0$.

Usando coordenadas, ubica los puntos $A=\left(\frac{q}{p},0\right)$ y $B=\left(\frac{4}{p},2\right)$, luego realiza la construcción de un círculo con centro en (0,1) y radio 1u. Al graficar los puntos A y B traza un segmento entre ellos que corta la circunferencia en los puntos *R* y *S*, cuyas proyecciones desde las coordenadas (0, 2) se denominarán respectivamente (r, 0) y (s, 0). Al asumir que *r* y *s* son las raíces de la ecuación, la demostración queda bajo los siguientes pasos: considerando la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2 + (y-1)^2 = 1$, y la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $2px - (4-q)y - 2q = 0$, entonces los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia llamados R y S, tendrán respectivamente las coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) y sus proyecciones desde el punto (0, 2) se podrán determinan por los puntos de corte de las rectas que pasan por (x_1,y_1), (0,2) y (x_2,y_2), (0,2) con el eje *x*, es decir, se tendrá que (r,0)=$\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}, 0\right)$ y (s,0)= $\left(\frac{-2x_2}{y_2-2}, 0\right)$. Por último para verificar que *r* y *s* efectivamente son soluciones de la ecuación propuesta, se reemplazan en la ecuación original, quedando para cada punto $\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}, 0\right)^2 - p\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}, 0\right)^2 + q = 0$ y $\left(\frac{-2x_2}{y_2-2}, 0\right)^2 - p\left(\frac{-2x_2}{y_2-2}, 0\right)^2 + q = 0$, en cuyos casos se obtiene una igualdad al realizar las operaciones indicadas (Luque *et al*, 2004).

Reflexiones a nivel didáctico según el EOS

Se detallaron diversos procedimientos para deducir las raíces de una ecuación cuadrática, tales como: la completación de cuadrados, el método de Descartes, entre otros; donde predomina la construcción geométrica y por ende, desde lo epistémico, constituye un tratamiento idóneo, diferente e innovador, para abordar didácticamente la enseñanza de la ecuación de segundo grado. En forma similar, se puede decir que los casos presentados dan referencia de lo mediacional y ecológico, siendo idóneo tratar geométricamente la solución de ecuaciones de segundo grado para un proceso de enseñanza-aprendizaje, pues rompe con esquemas tradicionales donde el uso de la resolvente suele predominar en total separación con otros aspectos intra-matemáticos como son los referentes a la geometría.

Por lo general el uso de la resolvente suele ser la única manera como los estudiantes solucionan ecuaciones cuadráticas, haciendo su estudio y aprendizaje muy mecanizado (Martínez, 2008). No es de extrañar que muchos de los educandos aprendan de memoria las fórmulas matemáticas por el mismo desconocimiento que tienen tanto de su origen como de su aplicación en contextos cotidianos. Por esto, es necesario rescatar según los ejemplos observados, diversas técnicas para deducir las raíces de la ecuación de segundo grado en el momento de su enseñanza-aprendizaje; considerando problemas con casos simples hasta llegar a los más complejos pero que reviertan interés para el estudiante.

Otro aspecto a considerar, es dedicar un espacio para platicar sobre la biografía de personajes dedicados a la matemática, como Euclides, Descartes, Carlyle, entre otros, haciendo mención de sus aportes en la consolidación de la ecuación de segundo grado; aspecto que confluye en el aprendizaje cultural del estudiante, además humaniza, sensibiliza y hace ver menos rígida la enseñanza de la matemática.

Por lo anterior, se puede entonces establecer lo tratado con una alta idoneidad epistémica dada la relevancia y apreciable representatividad de los significados institucionales implementados por los distintos grupos sociales que abordaron la ecuación en estudio, siendo a su vez un significado referencial para el docente. De la idoneidad mediacional y ecológica, se pueden determinar adecuaciones en recursos materiales y temporales para su proceso de enseñanza y aprendizaje; además de realizar adaptaciones curriculares y conexiones intra e interdisciplinares al abordar la ecuación con las soluciones geométricas.

Finalmente, estas conclusiones son apenas un pequeño aporte, al momento de tratar en clase este tema, surgirán otras estrategias según las situaciones emocionales, sociales y físicas presentes en el aula. Lo valioso es reencontrar a través de este recorrido histórico, la importancia de enseñar la ecuación de segundo grado y las muchas formas para tratar este objeto matemático y convertirlo en un tema más accesible para nuestros estudiantes.

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (2003). Línea de investigación perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática. *Paradigma, 24(2)*, 151-160.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universitaria.

Cadenas, R. (2004). *La ecuación de segundo grado. Un estudio Histórico - Didáctico*. V Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto, Venezuela.

Finol de Navarro, T. y Nava de Villalobos, H. (1993). *Procesos y Productos de la Investigación Documental*. Maracaibo: EDILUZ.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14(3)*, 325-355.

Godino, J. D. (2002). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Recuperado el 10 de enero de 2010 de http://www.ugr.es/local/jgodino/ indice_eos.htm.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhemi, M. (2007). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma 27(2)* ,221-252

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 8 de junio de 2009 de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Luque, C., Montes, C., y Sánchez, D. (2004). *Solución de ecuaciones cuadráticas a partir de los elementos de Euclides*. Recuperado el 8 de febrero de 2007 de http://www.encuentrogeometria.org/

Luque, C., Mora, L., y Torres, J. (2004). *Algebra Antigua*. Recuperado el 9 de marzo de 2007 de http://www.encuentrogeometria.org/

Martínez, A. (2008). *Significados personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay, Venezuela.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.