I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Noción de límite basada en la tipología de Brousseau

Francisco G. **Herrera** Armendia
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
harmendia@gmail.com
Enrique **Salazar** Peña
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
esalazarx@live.com.mx
Marleny **Hernández** Escobar
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
marlenylesly@hotmail.com
Raciel **Trejo** Reséndiz.
Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México
México
ratrere@hotmail.com

Resumen

Las tendencias educativas buscan el desarrollo de competencias en los futuros docentes para integrarlos a un campo laboral cada vez más especializado. En el espacio curricular denominado Opcional II del programa de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México, se abordan temas relacionados con el concepto de límite, a partir de casos particulares. En esta investigación se aborda el límite de una función expresada como fracción común con radicales en el numerador y denominador, para analizar las propuestas hechas por estudiantes del sexto semestre de la carrera, recategorizando en cuatro aspectos para conocer las dificultades que tuvieron, así como las estrategias de solución que utilizaron ya que en algunos casos sólo recordaban de forma superficial los teoremas relacionados con el concepto de límite, con base en la información obtenida se propondrá una secuencia basada en la tipología didáctica de Guy Brousseau.

Palabras clave: futuros docentes, límite, tipología didáctica de Guy Brousseau.

Antecedentes: Introducción a la problemática

El sustento normativo del programa de la LESM propone el desarrollo de habilidades específicas en el docente en formación. Para ello clasifica en cinco grandes rubros las competencias que, de acuerdo con este Plan y programas, el docente debe formarse durante su estancia en la Escuela Normal Superior, englobados como rasgos del perfil de egreso. Ellos son: a) Habilidades intelectuales específicas. b) Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria. c) Competencias Didácticas. d) Identidad Profesional y Ética. e) Capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela.

Es precisamente el segundo conjunto de rasgos que obliga al estudio de contenidos temáticos por parte del docente en formación ya que se establece que el futuro docente: "Tiene dominio del campo disciplinario de su especialidad para manejar con seguridad y fluidez los temas incluidos en los programas de estudio,…." (Plan y Programas de estudio, 1999). Derivado de ello, la asignatura que completa esta formación disciplinaria se denomina Opcional II. Temas de Cálculo diferencial e Integral, que se cursa durante el sexto semestre del programa.

Los antecedente curriculares lo forman el estudio de las asignaturas: Pensamiento algebraico, en tercer semestre; Procesos de cambio o variación y Plano cartesiano y funciones, en cuarto semestre y Opcional I, temas de Álgebra Superior, en quinto semestre. Mucho se ha discutido la necesidad de abordar el estudio del Cálculo en nuestros estudiantes en reuniones de academia y desde que dio inicio la aplicación de este Programa en 1999, se decidió por la inclusión en el espacio correspondiente ya mencionado, de estos temas, pues es evidente que su tratamiento logra mejorar los conocimientos en álgebra, geometría analítica y trigonometría entre otros, en nuestros estudiantes, independientemente del hecho de que no abordarán temas de cálculo con los estudiantes de secundaria a su cargo, pero como se observó, en un apartado del conjunto de rasgos del perfil de egreso, se convierte en requisito el dominio de contenidos matemáticos.

El problema abordado tiene los propósitos establecidos por Espinosa (2009), que son: a) calcular, si existe, el límite de una función mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos; b) bosquejar la gráfica de una función considerando su comportamiento asintótico; c) determinar el límite de una función de ciertos puntos a partir; todos ellos guiados didácticamente por la tipología propuesta por Brousseau (1997).

Después de la revisión de literatura, encontramos que existen diversas investigaciones con relación a la noción de límite en educación matemática, los trabajos de Blázquez y Ortega (1997, 1999, 2000, 2001a, 2001b y 2002) establecen una nueva conceptualización de límite funcional (definición que surge en el proceso de formación del concepto) basada en la idea de aproximación óptima, que no requiere del formalismo.

Otros estudios son los de (Tall y Vinner, 1981; Cornu, 1983; Robinet, 1983; Sierpinska, 1985 y 1987; Sánchez, 1997; entre otros) estos tratan de esclarecer cuál es la conceptualización más sencilla y, en consecuencia, la que puede ser más adecuada para que se utilice en los currículos de educación secundaria y en el primer curso de las carreras de ingeniería o similares.

La evolución de la noción de límite y las variaciones que ha tenido en el desarrollo de la matemática, pone de manifiesto lo difícil que ha resultado su conceptualización. Ahora bien, todas estas conceptualizaciones surgen desde la propia matemática, no desde la didáctica. Van orientadas hacia el rigor matemático y su formalismo sintáctico ha incrementado con el avance de la matemática; sin embargo, no tienen en cuenta los aprendizajes de los alumnos.

Dentro de los antecedentes se cuenta con la propuesta de Flores (2004) que sugiere emplear paradojas para provocar conflictos cognitivos en profesores de matemáticas en formación, quienes deben compartir una visión epistemológica constructivista de la matemática, y para lo cual se debe romper con la visión unidimensional de la misma, a partir del paradigma de la reflexión en la acción.

Una investigación fue la realizada por Movshovitz y Hadass (1990), quienes consideran que para la formación de los profesores-estudiantes se deben integrar contenidos de matemáticas, psicología y pedagogía, para ello plantearon una paradoja relacionada con la demostración de la irracionalidad del número 2, observando que la actitud predominante fue de desesperación y angustia por detectar o no el error. Otra investigación es la de Ramírez (2004) que da a conocer las distintas reacciones que provocaron algunas paradojas planteadas a profesores de matemáticas, sobresaliendo su reacción reflexiva en la que expresaron su deseo de mayor análisis para la resolución, creyendo que estaban mal planteadas o que había algún error en ellas.

La investigación que combina el concepto de límite y paradoja es la de Sacristán (2003), en la que se trabajó procesos infinitos en un ambiente de exploración computacional con el fin de ayudar a los estudiantes a experimentar diversos contextos y construir diversas representaciones externas del concepto e interactuar con ellas. Particularmente, exploró algunas sucesiones y series infinitas mediante figuras geométricas recursivas, específicamente, la Curva de Koch que condujo a los estudiantes a una paradoja: El perímetro infinito está formado por segmentos de longitud cero.

Otra investigación es la de Hitt (2003) que muestra los obstáculos de aprendizaje del límite y continuidad de funciones, que en el caso del primero, menciona que los obstáculos están precisamente en la palabra “límite” y “tiende hacia”, destacando que “el límite de la función no es alcanzado”.

En este contexto, surge nuestro interés de analizar en el espacio curricular denominado Opcional II, el cual aborda temas del Cálculo Diferencial e Integral, incluido el concepto de límite a partir del análisis de casos particulares; el límite de una función expresada como fracción común que contiene radicales en el numerador y denominador, como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}$$

Ahora bien, ya que en las actuales tendencias educativas se busca el desarrollo de competencias en los futuros docentes para integrarlos a un campo laboral cada vez más especializado, dos de los cinco rasgos del perfil de egreso del plan de estudios de la Licenciatura en educación Secundaria con especialidad en Matemáticas, están estrechamente vinculados con la apropiación de saberes matemáticos y su aplicación didáctica, los cuales son habilidades intelectuales específicas y dominio de propósitos y contenidos.

Así, damos a conocer los resultados del análisis de las propuestas de análisis e interpretación de dicho límite, hechas por los estudiantes del sexto semestre de la licenciatura, a parir de cuatro categorías: a) interpretación de la expresión con base en los teoremas correspondientes a límites; b) condiciones necesarias y suficientes del rango y ámbito de la expresión; c) aplicación de los axiomas de campo del conjunto de los números reales para encontrar la solución; d) interpretación y solución de radicales. Con base en esta categorización damos a conocer las dificultades que tuvieron los estudiantes así como las estrategias de solución que propusieron.

A partir de las conclusiones proponemos una secuencia didáctica basada en la tipología didáctica de Guy Brousseau para ser desarrollada con estudiantes que cursen próximamente el sexto semestre y observar los resultados posteriores al trabajo áulico, para así comentar las posibles bondades de la mencionada tipología.

Marco conceptual

De acuerdo con la revisión de la literatura, referente a los diversos conceptos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral y particularmente en el estudio del concepto de límite, a partir del análisis de casos particulares, a continuación son bosquejados aquellos conceptos que desde hace tiempo se han considerado en los procesos de aprendizaje.

La idea de 'límite" ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero por su carácter estructural que lo constituye el eje central y concepto básico sobre el cual se construye la estructura del Cálculo diferencial e integral, pero también por su carácter instrumental como herramienta para la solución de problemas y finalmente, como objeto matemático que se gesta en diferentes contextos: geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos.

La evolución histórica de la noción de límite no se desarrolla en forma independiente y autónoma sino que hace parte de una red o entramado que se obtiene por medio de la interacción e interdependencia con otras nociones vecinas del cálculo; variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo numérico.

De acuerdo con la revisión de la literatura, desde hace tiempo ha existido interés de los investigadores en el estudio sobre las concepciones del límite. De las aportaciones relacionadas con el concepto de límite, sobresalen los descubrimientos de Newton (1712) sobre series infinitas, fluxiones y diferencias, así como los trabajos de Leibniz sobre el cálculo diferencial y series infinitas.

Boyer (1999, pp. 500–501), en la sección 1 del libro I que conforma el tratado Philosophiae naturalis principia matematica, señala que Newton, al intentar definir el límite de una función, postula dos lemas, el Lema 1 concerniente a las cantidades y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales y el Lema VII sobre la razón última del arco, cuerda y tangente, cualquiera de ellos respecto de cualquier otro, es la razón de igualdad.

Jaques Bernoulli (1654–1705) y Jean Bernoulli (1667–1748) continúan la obra de Leibniz; Jean descubre la regla de L'Hospital y la serie de Taylor.

Leonhard Euler (1707–1883) integra el cálculo diferencial de Leibniz y la teoría de las fluxiones, dando lugar al "análisis" como área de la matemática que estudia los procesos infinitos.

Sin duda, el desarrollo del nuevo cálculo propició que D'Alembert (1717–1783), oponiéndose a Leibniz y Euler, pensara que la notación de las diferenciales tenía que ser sustentada por algo con mayor fundamento que el desvanecimiento de cantidades. D'Alembert interpreta las razones primeras y últimas de Newton como límites; según Boyer (1999, p. 567), postula que una cantidad es el límite de otra cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella).

Hay que esperar hasta el Cours d'analyse de l'École Polytechnique, de Augustine Louis Cauchy (1821) para que surja una nueva definición que, si bien es totalmente subjetiva, supone un avance respecto a la dada por D'Alembert, cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.

La búsqueda de resultados para problemas físicos y astronómicos concretos, utilizando métodos infinitesimales dentro de ellos se encuentran las aportaciones de Kepler, Fermat, Cavalieri, Barrow, Newton y Leibniz, (Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006; Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez et al. 2006). Los matemáticos que trabajaron con métodos infinitesimales en el siglo XVII lo hicieron en un ambiente geométrico - dinámico; el móvil era el estudio del movimiento a través de prácticas relacionadas con la predicción, que motivaba la profundización en el estudio del Cálculo. El límite se presenta, nuevamente de manera implícita, vinculado a los problemas de cálculo de velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos, etc. Los matemáticos de la época desarrollaron sus teorías en un ambiente más intuitivo, el afán por conseguir resultados dominaba sobre la búsqueda de argumentos y fundamentaciones sólidas (Kline, 1994).

D'Alembert se fundamentó en los trabajos de Newton considerando su método de razones primeras y últimas como un método para encontrar el límite de esas razones. Su consideración explícita del concepto de límite lo condujo a ser uno de los primeros matemáticos en expresar una definición del mismo: se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea no asignable. (Citado en Blázquez y Ortega, 2002, p. 75).

Collel (1994) plantea, haciendo referencia al concepto de límite… "base de cualquier concepto del Cálculo Diferencial e Integral, (…) se le presenta en un contexto puramente lógico, y, por lo tanto, abstracto.(...) constituye para las personas que lo reciben, algo así como un "jeroglífico" que deben descifrar, sin comprender su verdadero significado".

Aunque con algunas diferencias, como la consideración de las "cantidades" como monótonas y de la imposibilidad de que el límite sea alcanzado, esta definición se aproxima a la aceptada actualmente. Sin embargo, no fue suficientemente reconocida en su época por estar enunciada en lenguaje coloquial y no disponer de suficientes herramientas algebraicas: esta etapa se caracteriza precisamente por una fuerte concepción algebraica.

Bagni (2005) sostiene que las concepciones de Wallis, Mengoli, Gregory, Newton, Gregory of St. Vincent y Vitali eran generalmente relacionadas con sucesiones y series, y tenían en común el considerar al límite como una aproximación que no se alcanza, más como un proceso que como un objeto en sí mismo. Estas concepciones comparten además el ser expresadas principalmente en forma verbal, incluida la concepción de Cauchy.

Es interesante destacar cómo en la obra de Cauchy sí existen indicios de considerar al límite como un objeto y no sólo como un proceso en las definiciones de número irracional y de superficie de círculo: "... un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus... " Cauchy (1821, p. 4).

Cauchy establece además criterios de convergencia para límites indeterminados, en cuyas demostraciones se puede apreciar la precisión y claridad de su idea de límite. En su definición de función continua, Cauchy identifica el aspecto esencial de la continuidad, a la vez que formula una definición de continuidad mediante sucesiones, muy útil en la demostración de teoremas. Sin embargo, la definición resulta confusa por hablar de continuidad en un intervalo y puntual a la vez. Esta definición ambigua puede ser el punto de partida de una concepción errónea en su teoría: que las propiedades de los términos de una sucesión se transfieren automáticamente a su límite. Esta confusión sólo se subsanará después, con el concepto de continuidad uniforme introducido por Heine en 1870.

Es recién con Weierstrass que se introduce el uso de los registros de representación simbólica ya que realiza un esfuerzo por evitar el uso de la expresión "la variable se aproxima al límite" porque sugería -ambiguas- ideas de tiempo y movimiento. Esto permitió evolucionar entre la idea dinámica de límite (como un proceso) hacia la idea estática de límite (como un objeto). Así, presentó la definición que actualmente se enseña en los cursos de cálculo: Si dado cualquier ε positivo, existe un δ tal que para $0 < n < \delta$, la diferencia $f(x0\pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x=x0$. Blazquez y ortega (2001, p.77). Por último, se podría considerar una generalización del concepto a nuevos contextos dentro de la matemática, gracias a la reciente consideración de los espacios topológicos como generalización, de los cuales el de la distancia habitual en el conjunto de los números reales es sólo un caso particular. El límite es pues, una concepción topológica ya no tan estrechamente vinculada con una determinada definición de distancia y aplicable a funciones cuyo dominio y codominio ya no tienen por qué ser el de los números reales.

Teoría de las Situaciones Didácticas

A finales de los años 60 surgen en Francia los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Mateámticas (IREM), los cuales se dedicaron en un principio a complementar la formación matemática de los maestros, los programas, y preparando maestros en las escuelas normales. También se dedicaron a producir materiales de apoyo para el trabajo en el aula (textos, fichas, juegos, problemas, juguetes etc.) y con ellos una "experimentación rudimentaria, concebida como prueba de su factibilidad y como antecedente para introducir ajustes mínimos, antes de proceder a su difusión dentro del sistema educativo" (Gálvez, 1985).

Con el paso del tiempo, los IREM desarrollaron actividades no orientadas a la producción de medios, sino a la investigación científica orientada a construir y controlar las acciones de la enseñanza. Guy Brousseau, profesor e investigador del IREM de Burdeos, propuso estudiar las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, con la finalidad de reproducir y optimizar los procesos de adquisición de los mismos. A partir de este punto surge lo que después se conocería como la Teoría de las Situaciones Didácticas, cuyo principal exponente es Brousseau. La idea de estudiar las condiciones tiene referencias en el constructivismo propuesto por Piaget. Mabel Panizza (2004) menciona (en una cita que hace de Brousseau) que "el alumno aprende adaptándose a un medio" (p.3) porque en él encuentra dificultades, desequilibrios, a los cuales el alumno debe responder. El estudio de las condiciones se debe hacer mediante el diseño de situaciones didácticas que son "un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución" (Gálvez, 1985).

Las situaciones didácticas presentan como elemento central al medio, que son situaciones presentadas por el profesor con una intencionalidad: el aprendizaje de un conocimiento determinado. Para ello es necesario diseñar una situación que genere cierto tipo de interacciones y retroacciones.

Las interacciones suceden de dos tipos, entre el alumno y el medio, y entre el alumno y el docente, a las primeras se les denomina adidácticas en las cuales el alumno trabaja, mientras que el profesor monitorea, es donde suceden las situaciones de acción, formulación y validación. A las segundas se les llama didácticas y se refiere a los intercambios entre ambos, y se presenta en las situaciones de institucionalización y en el proceso de devolución.

Las retroacciones en cambio se refieren a los intercambios entre el medio y el alumno, es decir, el alumno tratará de resolver la situación, la cual está diseñada para que no se solucione con estrategias convencionales, por lo que el alumno volverá a intentarlo.

Las interacciones de tipo adidáctica ocurren a través del proceso de devolución, que se refiere a que el alumno adquiera la responsabilidad matemática para resolver la situación planteada. Este proceso se encuentra regulado por el contrato didáctico, es decir, por reglas implícitas y explicitas entre los alumnos y el docente que determinan qué papel juega cada uno, así como los instrumentos que se pueden utilizar para resolver el problema.

Las situaciones didácticas se clasifican en tres tipos según Panizza1; acción, son en las que la interacción es entre el alumno y un medio físico o simbólico, es una toma de decisión de los conocimientos que pondrá en juego; formulación, en donde el emisor debe comunicar cierta información al receptor, de tal manera que el lenguaje sea preciso y adecuado para lo que debe comunicar; validación, en la cual el alumno debe establecer la validez de una afirmación, para "convencer" con argumentos a otro sujeto que acepte o rehúse dichas afirmaciones, pudiendo dar afirmaciones opuestas o pidiendo pruebas de ello.

Cada una de las situaciones descritas tiene una situación fundamental, es decir, una situación que derive en otras "a través de la asignación de diversos rangos de variación o valores particulares a las variables que la caracterizan" (Gálvez, 1985). Un rasgo característico es que son evolutivas, como lo es la adquisición de un conocimiento; buscan que el alumno realice una evocación de los conocimientos ya adquiridos para ponerlos en juego, y pueden ser de dos tipos, de acción (que ocurren al día siguiente de realizarla) habiendo una descontextualización del problema, y la evocación de tiempo prolongado (cuando ya ha transcurrido un lapso amplio) que buscan interiorizar un nuevo conocimiento estableciendo relaciones entre lo viejo y lo nuevo.

Por otro lado, la institucionalización, es la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje por parte del maestro, es decir, los alumnos comprenden el objeto con el que se trabajó, mientras que el maestro percibe el aprendizaje de los alumnos.

[1] Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp.220-223) refieren las tres situaciones que describe Panizza, dentro de las situaciones adidácticas. El hecho de que ella las clasifique dentro de las didácticas tiene que ver con el que el profesor utilice las situaciones adidácticas con una intención didáctica, puesto que a pesar de que el medio natural en el que nos desarrollamos no es didáctico, es necesaria la intervención del profesor sobre el alumno-medio, para hacer funcionar las situaciones adidácticas y no caer en el empirismo (Chevallard et. al., 1997, p.217).

Para que el alumno articule la situación adidáctica con la institucionalización2 es necesario que tenga un proyecto de aprendizaje, según Patricia Sadovsky, porque intervendrá y condicionará la producción del aprendizaje sobre el objeto matemático que se esté tratando, al responder los cuestionamientos "¿Qué quieren que aprenda con esto? ¿Qué tiene que ver esto con los problemas que hicimos antes?" (Sadovsky, 2005, p.14).

Una parte importante de la Teoría de las Situaciones Didácticas es el concepto de obstáculo, el cual se define como "un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades" (Chevallard et. al., 1997, p.224). Se clasifican en ontogénetico, didáctico y epistemológico. El primero se refiere a las limitaciones del sujeto a un momento de su desarrollo; el segundo se refiere a la noción del alumno sobre cierto conocimiento aprendido en el sistema educativo; y el tercero se refiere al rol constitutivo del conocimiento, es decir, de su génesis.

Resultados y conclusiones.

El ciclo de investigación sugiere dos aspectos para su desarrollo (Gravemeijer, 1995), fuertemente vinculados entre sí: a) el desarrollo de la fase, guiado por la teoría de enseñanza específica y b) fase de investigación guiada por una metodología específica. Ambos aspectos, mantienen una relación simbiótica, ya en el salón de clase, esta interacción se vuelve más permeable al existir un intercambio de fases (Simon, 1995) como son: a) la observación de la trayectoria de aprendizaje hipotético y b) la interpretación docente de los sucesos y actividades dentro del salón de clase.

Cobb (1995) menciona que el desarrollo de un proceso hipotético de aprendizaje junto con el desarrollo de las actividades de instrucción mantienen un fuerte y estrecho vínculo uno con el otro, es por ello que en este estudio las evidencias recabadas elaboradas por los estudiantes las relacionamos con los conocimientos implícitos que poseen al haber cursado la educación media superior.

Estos conocimientos son abordados a través de la aplicación de la situación de acción (Brousseau, 1997), al solicitarle a los estudiantes que después de observar la expresión, se trabajara por parejas para explicar las características de la misma en términos de clasificar a la expresión numérica del numerador y del denominador en el conjunto de los números reales R.

Notamos que el grupo observó e indagó el medio simbólico propuesto y en este sentido empezamos a abordar la noción de límite y explorar los antecedentes que justifican esta idea matemática, conceptos como: ε y δ; otra idea es el Teorema que estudia Leithold (1972): Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Las ideas manifestadas por los estudiantes fueron implícitas, en forma de comunicación, mas que de argumentación, sin embargo el propósito de esta fase se cumplió con el grupo, y aunque pudiera suponerse que el papel de la memoria en los estudiantes no fue tan sólido, en realidad comprobamos que es, tal como lo estipula Brousseau (1997), mencionando que la administración de la memoria como producto de esquema de negociación engloba la memoria del sistema didáctico y no solo la memoria de los estudiantes.

---

[2] Panizza describe la institucionalización como establecer la relación entre las producciones de los alumnos y el saber cultural mediante los procesos de recapitulación, sistematización, ordenación y vinculación.

Es necesario mencionar que el programa de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas no posee rasgos de perfil de ingreso, lo que implica trabajar con estudiantes que no necesariamente tienen habilidades ni los conocimientos necesarios y suficientes para abordar estos temas, además de que provienen de escuelas con diferentes programas educativos, y muchos de ellos no incluyen el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, algunas de estas instituciones sólo ofrecen en un último semestre la posibilidad de escoger la asignatura de Estadística y Probabilidad o Cálculo Diferencial e integral.

Con relación a la caracterización, y una vez activada la negociación de la memoria, encontramos que la gran mayoría de los estudiantes recordaban de forma superficial los teoremas relacionados con el concepto de límite, pero no los vincularon adecuadamente con el análisis de la expresión propuesta, muchos de ellos no concluyeron como se esperaba con las condiciones que posee la expresión con relación al rango y al ámbito, pues hubo un gran debate con relación al signo negativo fuera del radical del denominador. Este debate se propuso como una situación de formulación, ésta, como lo establece Brousseau (1997), se puede provocar partiendo de la formalización progresiva (trabajo entre el docente y el grupo) a través del momento oportuno en que los estudiantes van abordando cada noción que el tema incluye; los axiomas de campo de los números Reales han sido un tema cuyo estudio es satisfactorio cuando se aborda como preámbulo al estudiar, por ejemplo, la teoría de números o los temas de álgebra superior, sin embargo los estudiantes tienden a no darle la importancia fundamental para justificar cualquier proceso algebraico como algoritmo en otras ramas de la matemática, como es este caso, descuidando su memorización, su aplicación, y por ende generando la confusión en el proceso de solución; sin embargo trabajar con modelos implícitos es muy efectivo, aunque debe ponerse atención al momento en que se aborda, pues provocar la situación de formulación con nociones muy al principio puede ser muy útil, pero hacerlo casi al final de ella puede ser muy significativa para los estudiantes, cosa que comprobamos al haberla abordado muy al principio de la situación, la mayor dificultad la encontramos con el manejo de radicales, los estudiantes no recordaban cómo operarlos, comentaron utilizar lo que llamaron el binomio conjugado como factor, pero se confundían si lo aplicaban en el numerador o sólo en el denominador, algunos si lo aplicaron en ambos miembros de la fracción común, pero desconocían el axioma que justifica este hecho.

Esto nos permite reflexionar y comprobar que una formalización conceptual dentro de una situación de formulación si se aborda muy pronto y con relación al significado atribuido al lenguaje es notoriamente esencial para las situaciones de acción y de formulación más que si se aborda al último de la fase, y con relación a los conceptos o ideas formuladas por los estudiantes bajo el monitoreo docente, estas ideas no son aisladas unas de otras sino que funcionan conjuntamente hacia el propósito deseado, (Brousseau 1997). Durante la aplicación de la situación de validación se les propuso una pista, que consistió en cuatro respuestas al ejercicio planteado: a) 0; b) -2; c) 2; d) indeterminado, siendo una de ellas la correcta. A pesar de esto, algunos estudiantes lograron validar la respuesta correcta al ejercicio propuesto, y otros tantos no consiguieron visualizar la relación de las pistas con el ejercicio. Lo que si comprobamos es lo apuntado por Brousseau (1997) en relación con el hecho de que los resultados concretos son imprecisos y reflejan en algunas ocasiones interrupciones de aprendizaje en el modelo, además, cuando un grupo de estudiantes siente que tiene una guía (pistas en nuestro caso) éstas les dan la confianza para generar conclusiones y darse cuenta si uno o algunos estudiantes muestran una conclusión falsa, otra parte del grupo tiende a oponerse a esa opinión, formándose entonces una discusión, en la que un grupo debe probar a los demás su opinión sobre la falsedad o no del enunciado.

Queda claro que deben existir reglas (en este caso, los conceptos matemáticos) que le permiten al grupo de estudiantes tomar decisiones acerca de aceptar o rechazar las pruebas producidas por otro grupo de ellos, e inclusive, el solicitar nueva información matemática para continuar con la validación. Para un análisis más eficaz, propusimos algunas respuestas esperadas para el ejercicio además de un listado de consideraciones previas relacionadas con los saberes y conocimientos que poseen los estudiantes, anotadas cuidadosamente en el diario de observación de uno de nosotros, lo que permitió contrastar nuestras suposiciones con las observaciones posteriores y las evidencias provenientes de los estudiantes.

Con base en los resultados proponemos diseñar una secuencia didáctica que nos permita obtener nuevas evidencias y contrastarlas con las anteriores para así observar las bondades de la propuesta hecha por Guy Brousseau, este docente e investigador francés propone la Teoría de las Situaciones Didácticas con el propósito de hacer más eficaz y eficiente el proceso de aprendizaje de los alumnos centrándose en el trabajo realizado por los estudiantes con la correcta intervención del docente, proponiendo la fase didáctica y la fase a-didáctica, en la que se observa el producto que va realizando el estudiantado al ir transformando en saberes matemáticos, los conocimientos implícitos que ya posee. Es aquí donde nos centramos a interrelacionar los diferentes tipos de situación didáctica para que los estudiantes aborden el tema: a) la situación de acción, que consiste en el trabajo hecho por los estudiantes sobre un medio material o simbólico para rescatar los conocimientos implícitos necesarios para abordar el tema, b) la situación de formulación, muy difícil de llevar a cabo, que consiste en guiar y monitorear al grupo de estudiantes para que, entre ellos, generen mensajes a otro grupo de estudiantes que actúan como receptores del mismo, con base en códigos específicos relacionados con el tema; c) la situación de validación, que permite a los estudiantes emitir juicios sobre una propuesta hecha por el docente o algún otro estudiante a través de argumentos que den fe del juicio mismo; d) situación de institucionalización cuyo fin es acordar la definición de conceptos matemáticos, de axiomas, de teoremas, utilizando principalmente la producción de los estudiantes obtenida con el trabajo en la o las situaciones didácticas anteriores y con la intervención del docente quien complementa las definiciones consensadas por el grupo de estudiantes. Es necesario aclarar que la aplicación de la tipología no tiene un orden específico y bien puede utilizarse cualquiera de ellas al inicio de la secuencia didáctica.

Las conclusiones que ofrecemos giran en torno a la reflexión del proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes, guiados y monitoreados desde luego por el docente, sin la aplicación de una metodología específica de la didáctica de las matemáticas y con la aplicación de ella. Hemos tenido gratas experiencias sobre logros de desarrollo de competencias matemáticas cuando se utiliza la Teoría de las Situaciones Didácticas de G. Brousseau tanto con docentes en formación como con estudiantes de educación secundaria cuando las trabajan ellos, así que la hipótesis que tenemos se relaciona con el mejor aprovechamiento de los recursos didácticos, de la experiencia y conocimiento docente y trabajo áulico de los estudiantes, que permite a su vez desarrollar de mejor manera las competencias sugeridas en educación matemática en México: la comunicación, la validación, el manejo de técnicas y la propuesta y resolución de problemas matemáticos, ahora con un contenido específico, como es el concepto de límite. Queda pues este trabajo con el análisis y caracterización de las dificultades observadas en nuestros estudiantes y con ellas, la propuesta de una secuencia didáctica que intenta reducirlas con la hipótesis de que permitirá mejorar la eficiencia y la eficacia del tratamiento del contenido temático, ahora con el trabajo próximo con estudiantes que cursen el sexto semestre del Plan y Programa mencionado.

Referencias

Bagni, G. (2005). Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 5(4), 453-468.

Blázquez, S. (1999). Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Tesis de doctorado, Universidad de Valladolid, España.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 189-209.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, e)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 37(5), 515-526.

Boyer, C. B. (1999). Historia de la matemática. Madrid, España: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1980) Teoría de las Situaciones Didácticas

Bucari, N., Bertero, F. y Trípoli, M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo, en: http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/bucari.pdf.

Cauchy, A. (1821). Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnyque (Premier Partie. Analyse Algébrique). Sevilla, España: SAEM Thales (edición facsímil).

Cobb, P. (1995). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. En Kelly, Anthony / Lesh, Richard. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. Chap. 12. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Mahwah, N. J.

Collel, A.E. (1994). *Educación Matemática*.Vol. 6. No. 2.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Thèse de 3ème Cycle, Mathématiques, Université I de Grenoble, France.

Chevallard,Y., Bosch, M.& Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: I.C.E.-Horsori

Espinosa, E. J. (2009). Cálculo Diferencial. Editorial Reverté – Universidad Autónoma Metropolitana. Impreso en Hong- Kong.

Flores, P. (2004). Paradojas matemáticas para la formación de profesores (Mathematical paradoxes for teachers education). *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,* SUMA No. 31.P. 27.

Gálvez, G. (1985): La Didáctica de las Matemáticas, en Parra y Saiz (comp.) Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones. Bs. As. Paidós.

Granville, A. (1980). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial LIMUSA. México

Grevemaijer, K. P. E: (1995). Developing realistic mathematics instruction.Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno*, (32), 97- 108.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical thinking and learning,* 8(4), pp. 407 – 431.

Leithold, L. (1972). El Cálculo con Geometría Analítica. HARLA S. A. De C. V. Segunda Edición. México

Manteca, E. (1999) coordinador editorial. Licenciatura en educación Secundaria. Plan y Programas 1999. Documentos Básicos. Secretaría de Educación Pública, México.

Panizza, M. (2004). Conceptos Básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en: Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: Análisis y Propuestas. Paidos, pp.59-71.

Sadovsky, P. (2005): La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la ensañanza de la matemática, en Reflexiónes teóricas para la educación matemática, Buenos Aires, Libros Del Zorzal.

Sánchez, C. (1997). Estudio estadístico sobre el proceso enseñanza–aprendizaje de la noción de límite de una función. Tesis de doctorado, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Granada, España.

Sánchez, C. y Contreras, A. (2000) Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX . En Cantoral, R. (ed) El futuro del cálculo infinitesimal (pp 211-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica SA de CV.

Sánchez, O. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *En Enseñanza de las Matemáticas,* V. 16, N0 1. p. 73—84.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques, 6 (1), 5–67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18 (4), 371–397.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12 (2), 151–169.