

# ALGORITMOS COMO HERRAMIENTA EN LA BÚSQUEDA DE NUEVOS DATOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE ISOMETRÍAS DEL PLANO

**Brigitte Sánchez y Jaime Fonseca**

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

[bjsanchezr@udistrital.edu.co](mailto:bjsanchezr@udistrital.edu.co), [jaimenjaimef@udistrital.edu.co](mailto:jaimenjaimef@udistrital.edu.co)

Reconociendo la importancia que tienen los algoritmos en el proceso de resolución de problemas, particularmente en la geometría, se identificaron algunas formas en las que se usan algoritmos que son conocidos para los resolutores, durante la resolución de algún problema. A tales formas se les ha dado el nombre de *uso de algoritmos* y, específicamente, se describen y se muestran evidencias de los usos relacionados con la obtención de nueva información que permita ampliar los caminos considerados para la solución del problema.

## INTRODUCCIÓN

En Fonseca y Sánchez (2007) se estudiaron los procedimientos que emplean un profesor de matemáticas, un estudiante que se está preparando para ser profesor de matemáticas y un estudiante de educación media para resolver problemas, analizando, específicamente, el uso de algoritmos conocidos.

Como resultado se encontraron diversos usos, que se clasificaron en las siguientes dos categorías: solución del problema usando algoritmos para hallar datos y solución del problema usando algoritmos para determinar relaciones entre los elementos del problema. En este documento se desarrollarán los aspectos más relevantes de la primera categoría, tales como caracterización inicial y evidencias obtenidas a partir de la aplicación de dos cuestionarios que se validaron mediante pilotaje y revisión de expertos.

## ALGORITMOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Polya (1965/2002) propone cuatro fases para la resolución de un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida; si durante las dos últimas fases es posible perfeccionar, sistematizar y eximir de ambigüedades un conjunto finito de pasos que den solución al problema, se dice que éste admite al menos un *algoritmo de solución*.

Sánchez, B. y Fonseca, J. (2011). Algoritmos como herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 421-430). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

De ser así, existe correspondencia entre las partes del problema (datos, condiciones e incógnita) y los componentes del algoritmo (datos iniciales, pasos y datos finales) respectivamente.

Por ejemplo, en el problema de reflejar un punto  $C$  del plano, a través de otro punto  $X$  del mismo plano (esto es  $[X](C)$ , la reflexión de  $C$  por  $X$ ), se puede observar lo siguiente:

Problema	Algoritmo
Datos: Puntos $C$ y $X$ , $[X]$	Datos iniciales: Puntos $C$ y $X$ , $[X]$
Condición: El punto resultante debe ser la reflexión de $C$ a través de $[X]$ ; debe ser el punto $C'$ tal que $C$ , $X$ y $C'$ son colineales y $\overline{CX} \cong \overline{XC'}$ .	Pasos de un algoritmo de solución: Trazar $\overline{XC}$ . Trazar una circunferencia de centro $X$ y radio $\overline{XC}$ . La circunferencia construida tiene dos puntos de intersección con $\overline{XC}$ : $C$ y $C'$ (que corresponde a la reflexión de $C$ a través de $X$ ).
Incógnita: $[X](C) = C'$	Datos finales: $[X](C) = C'$

Tabla 1. Relación entre problema y algoritmo

El algoritmo de solución de un determinado problema (denominado problema auxiliar) se puede usar durante la resolución de otro, ya sea para encontrar más información de los datos o para encontrar nuevas relaciones entre ellos. Los dos propósitos que se acaban de mencionar determinan las dos categorías que se consideraron durante la investigación y que permitieron clasificar y caracterizar usos de algoritmos propuestos a partir de los planteamientos de Polya sobre resolución de problemas. Sin embargo, este documento se centrará en los usos asociados a la primera categoría se enuncian y describen a continuación.

## SOLUCIÓN DEL PROBLEMA USANDO ALGORITMOS PARA HALLAR DATOS

En esta categoría se encuentran aquellos usos que se presentan cuando se emplean los algoritmos de solución de problemas conocidos para encontrar la

incógnita o elementos adicionales que no pertenecen al problema inicial, pero que aportan información importante para su solución. Estos últimos son denominados *elementos auxiliares*.

Una revisión del trabajo de Polya condujo a proponer los siguientes usos de algoritmos, que se verificaron en la experimentación y cuya caracterización se amplió:

- Solución inmediata del problema por medio de un algoritmo.
- Composición iterada de un mismo algoritmo.
- Composición de dos o más algoritmos diferentes.
- Uso de un algoritmo análogo.
- Uso de un algoritmo para determinar elementos auxiliares.

### Solución inmediata del problema por medio de un algoritmo

Dentro de los procedimientos que propone Polya para resolver un problema se encuentra la *generalización*, que consiste en pasar del examen de un problema o un conjunto de problemas al examen de un conjunto más amplio de problemas que lo(s) contiene(n). El problema que consiste en solucionar todos los problemas del conjunto más amplio recibe el nombre de *problema general*, mientras que cada uno de los problemas de este conjunto recibe el nombre de *problema particular*.

Cuando el problema general admite un algoritmo de solución, éste puede usarse para resolver el problema particular, como lo muestra el siguiente esquema:

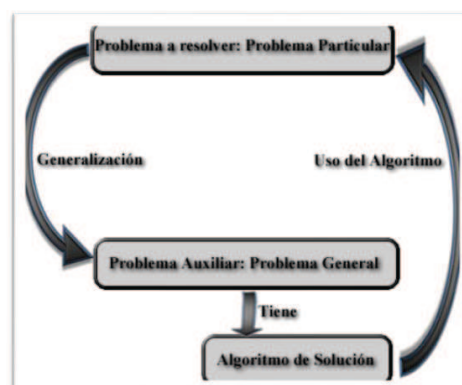


Figura 1. Esquema del uso de algoritmo para resolver un problema particular

En el caso en que se conozca un algoritmo de solución del problema general y se aplique sin mayores variaciones a los datos del problema particular dado, se dice que se ha realizado una *solución inmediata del problema por medio de un algoritmo*.

### Composición iterada de un mismo algoritmo y composición de dos o más algoritmos diferentes

Otro de los procedimientos propuestos por Polya (1965/2002) es la *descomposición y recomposición*, donde se fija una idea directriz para la solución del problema y éste se divide de tal manera que el tratamiento se centre en los detalles del problema y cada uno de ellos se convierta en un problema auxiliar. Luego de solucionar cada uno de estos problemas auxiliares, la directriz antes fijada permitirá componer todas las soluciones y encontrar la solución del problema original. De hecho, es natural intentar descomponer el problema en otros conocidos, de modo que si éstos tienen un algoritmo de solución, su concatenación permita, la solución del problema original o la construcción de un algoritmo que se use para su solución.

En el caso en el que se tome una parte o la totalidad de los algoritmos de solución de los problemas auxiliares para encontrar la solución del problema original, se pueden presentar la *composición iterada de un mismo algoritmo* y la *composición de dos o más algoritmos diferentes*. El primer uso puede presentarse cuando: se utiliza repetidas veces un mismo algoritmo, los algoritmos de solución de los problemas auxiliares en los que se descompuso el problema original comparten la secuencia de pasos, o cuando los problemas auxiliares hacen parte de un problema general cuya solución se puede obtener mediante la aplicación de un algoritmo. El segundo uso puede presentarse si se aplican dos o más algoritmos que dan solución a los problemas auxiliares en los que se descompuso el problema original, donde cada uno de los algoritmos difieren en al menos uno de sus pasos.

### Uso de un algoritmo análogo

En la analogía, como otro de los procedimientos que propone Polya, es posible utilizar el método o el resultado obtenido de la solución de problemas análogos para solucionar el problema original (si se desea profundizar sobre analogía, se sugiere consultar a Polya, 1965/2002). Específicamente, si se utiliza el algoritmo de solución de un problema análogo, ya sea repitiendo algunos pa-

sos, variando únicamente los datos iniciales, o tomando los datos finales como elementos auxiliares del problema original, se dirá que se usó un algoritmo análogo para hallar datos.

#### USO DE UN ALGORITMO PARA DETERMINAR ELEMENTOS AUXILIARES

En la resolución de un problema es necesario introducir elementos auxiliares con frecuencia, ya sea para ampliar la cantidad de datos, determinar nuevas relaciones, o simplemente comprender el problema; más aún, en geometría donde algunos de los elementos que se introducen se obtienen por construcción y la representación gráfica es frecuentemente empleada para comprender el problema. Por lo tanto, el uso de algoritmos para determinar elementos auxiliares se presenta cuando el elemento introducido es de vital importancia en la resolución del problema original.

#### ALGUNAS EVIDENCIAS DE LOS USOS DE ALGORITMOS PARA HALLAR DATOS

Los casos de usos de algoritmos que se presentarán se obtuvieron de la aplicación del siguiente problema:

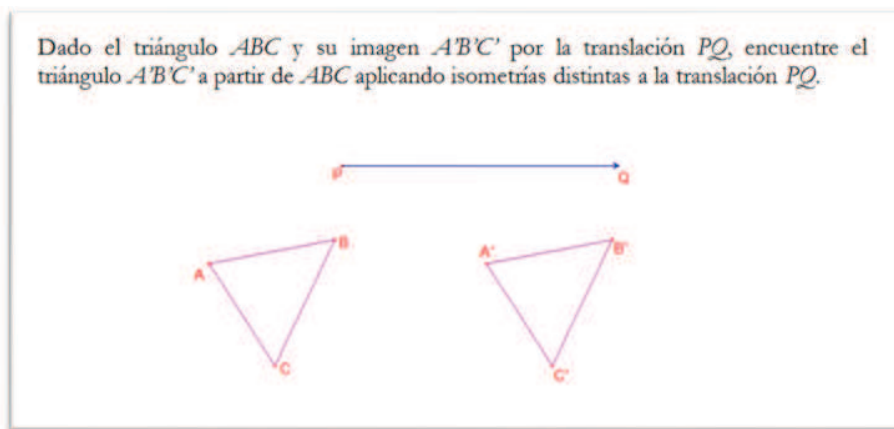


Figura 2. Problema aplicado

En la solución elaborada por el estudiante que se está formando como profesor se observó que asoció el problema con la construcción de dos reflexiones axiales que aplicadas a un polígono, determinan una imagen equivalente a la de aplicar una traslación. Este problema había sido abordado anteriormente por el estudiante y su algoritmo de solución se aplicó de manera directa, sin mayores variaciones a la solución de este problema, obteniendo *la solución inmediata*

*del problema por medio de un algoritmo.* Esta inferencia se hace, teniendo en cuenta la siguiente afirmación hecha por el estudiante durante la resolución del problema:

En este caso diría: pues **como la más directa** (se refiere a una solución de un problema similar) que yo vería en este caso, sería [...] dos simetrías axiales, más o menos perpendiculares a ésta ( $\overline{PQ}$ ), la primera perpendicular a ésta [señala  $\overline{PQ}$ ] por este punto (P o B) y bueno, procedo. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

La solución obtenida fue:

1. Construye la recta  $l_1$  perpendicular a  $\overline{PQ}$  por C.
2. Refleja  $\Delta ABC$  por  $l_1$ .
3. Construye la mediatriz de  $\overline{CC'}$  y la nombra  $l_2$ .
4. La composición  $[l_2][l_1](\Delta ABC)$  es  $\Delta A'B'C'$ .

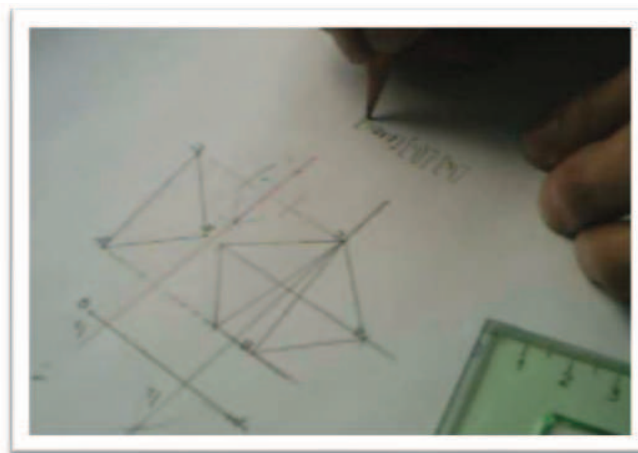


Figura 3. Evidencia de la solución inmediata del problema por medio de un algoritmo

Buscando un forma diferente de resolver el problema, el estudiante plantea la intención de usar únicamente rotaciones con centros convenientes, de tal modo que haga coincidir la imagen del  $\Delta ABC$  por  $[l_1]$  con  $\Delta A'B'C'$ . De esta forma, como lo describe durante el proceso de resolución, el estudiante da evidencias de su intención de usar el algoritmo de manera repetida, para realizar la rotación de un triángulo a través de un punto, con el fin de obtener otras dos transformaciones cuya imagen sea equivalente a la de una traslación, usando

de esta manera, *la composición iterada de un mismo algoritmo*. La transcripción de lo expresado por el estudiante se encuentra a continuación:

[...] la reflexión la puedo ver como una rotación. Y después lo vuelvo a rotar y vuelve a quedar en el mismo sitio pero más lejos, entonces estoy viendo en ésta (señala la gráfica de la primera solución), debe haber algún punto especial (indica  $[I_1](\Delta ABC)$ ) sobre el cual rotar, para convertir éste, y aquí ya pasarlo al otro lado.

Este intento resulta fallido debido a que según el estudiante, no encontró el centro de la rotación que le permitiera, solucionar el problema y en cambio, le estaba generando confusión.

Otro intento fallido consistió en aplicar una rotación y luego una traslación. Sin embargo, esta composición no le sirvió porque la aplicación de la rotación le mostraba un cambio en la dirección con respecto al  $\Delta A'B'C'$ .

Llegué a esa idea porque estaba pensando en rotación y después traslación, pero no me servía con rotación y después trasladar porque quedaba al revés, no quedaba; quedaba en otra posición, entonces pensé en otro movimiento y se me vino fue rotación, ehh... traslación. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

La idea a la que el estudiante se refiere, es la composición de traslaciones para resolver el problema. El intento anterior, evidencia el *uso de composición de dos o más algoritmos diferentes* y le permitió establecer una segunda forma de solucionar el problema: utilizar dos traslaciones de tal manera que su composición, sea  $[\overrightarrow{PQ}]$ , por tanto, *usa composición iterada de un mismo algoritmo*.

La traslación la veo como, [...] podría hacer esta otra traslación (traslación que parte de  $P$ , diferente a  $[\overrightarrow{PQ}]$  y se visualiza en la Figura 4), [...] y después de aquí hasta acá a este punto (hace referencia a la traslación determinada por  $Q$ , diferente a  $[\overrightarrow{PQ}]$  y cuya representación la expresa con la escuadra como se visualiza en la Figura 4), y sería lo mismo trasladar el triángulo  $(\Delta ABC)$  acá (señala la ubicación de la imagen) y pasarlo acá (señala la ubicación de  $\Delta A'B'C'$ ). Pues es algo. No sé. Me parece tonto. Esa sería como una solución, pero no estaría a la altura, y pues quiero hacer algo distinto a una traslación. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema).



Figura 4. Evidencia de la composición de dos o más algoritmos diferentes

En esta intervención, el estudiante hace explícito su plan: descomponer el problema para realizar sólo traslaciones, dado que conoce algoritmos para realizarlas. El procedimiento de solución consiste en componer de manera iterada este mismo algoritmo y así, encontrar otro que le permita solucionar el problema.

Una evidencia del uso de algoritmo para hallar elementos auxiliares fue obtenida en el proceso de resolución de este mismo problema, realizado por el profesor de matemáticas. En la búsqueda de una tercera solución, expresó su interés en usar composición de diversas isometrías.

[...] Pensaba de pronto en otro, en otra, [...] en otro movimiento que me permitiera obtener esa figura, pero tendría que hacer una composición de movimientos para obtener [...] (quiere obtener  $\Delta A'B'C'$ )

[...] Estoy pensando en si hago una reflexión central aquí (indica punto  $C$ ) y podría obtener una, hacer una después, o sea, primero hacer una reflexión central teniendo como centro  $C$  ¿sí? obtenemos una figura y si me daría podría obtener esta figura (posible imagen de  $\Delta ABC$  por  $[C]$ ), también a partir de ahí o sea, después hacer una reflexión axial. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

Durante esa búsqueda, la imagen de  $\Delta ABC$  por  $[C]$ , le permitió observar que la segunda isometría que debía usar no era una reflexión axial, sino una reflexión central; también, usó esta imagen y el triángulo  $A'B'C'$  para obtener el centro de la reflexión. Por tanto, la imagen de  $\Delta ABC$  por  $[C]$  fue un elemento auxiliar fundamental en la resolución del problema, obtenido por la aplicación del algoritmo de la reflexión central. Por ello, se usó un algoritmo para determinar elementos auxiliares.



Una evidencia del uso de un algoritmo análogo para hallar datos, se obtuvo de la aplicación del siguiente problema:

Dado tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , considere un punto  $X$  distinto de ellos. Si el punto  $X$  tiene que ser reflejado por lo menos una vez por cada uno de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . ¿Qué isometrías se deben realizar para volver al mismo punto de partida? Las isometrías deben definirse a partir de los puntos  $A$ ,  $B$  o  $C$ , o de objetos contruidos con base en tales puntos.

Una solución propuesta por el estudiante que se está formando para profesor fue:

1. Refleja  $X'''$  por  $C$ , obteniendo  $X''$
2. Refleja  $X''$  por  $B$ , obteniendo  $X'$
3. Refleja  $X'$  por  $A$ , obteniendo  $X$ .

En la búsqueda de otra solución, el estudiante construye mediatrices y medianas de  $\triangle ABC$  intentando encontrar alguna relación entre éstas y datos del problema. Sin embargo, no tiene éxito alguno, por lo que cambia la estrategia y quiere variar el orden de aplicación de las reflexiones centrales consideradas en la anterior solución. Por tanto, usa el algoritmo de la solución anterior en la búsqueda de otra solución. Esto es, *uso de un algoritmo análogo* para hallar datos, específicamente para encontrar  $X$ . Este plan de solución del problema, se puede evidenciar en la siguiente intervención:

No, no me salió nada, por ninguna, por ningún punto especial.

Estoy pensando en este momento en otra solución, ya dejé a un lado lo que estaba pensando. Ahora estoy pensando en si influye el orden de las reflexiones que haga respecto a cada punto; si yo digo que hago respecto a  $A$  (reflejar  $X'''$ ), primero me quedaría el punto por acá (indica una aproximación de  $[A](X''')$ ) (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

Como se puede observar, el estudiante que se está formando para profesor plantea explícitamente el cuestionamiento que se hace respecto a la imagen que podría obtener al cambiar el orden de las reflexiones consideradas en la anterior solución.

## CONCLUSIONES

En el estudio realizado se encontró que el profesor de matemáticas, el profesor en formación y el estudiante:

- reconocieron la existencia de algoritmos en geometría donde, las construcciones son un caso particular de los mismos.
- calificaron como importante el papel de los algoritmos al resolver problemas de matemáticas en general.
- concibieron los algoritmos en geometría en el mismo sentido considerado en esta investigación y como la secuencia de acciones asociadas a la resolución de los problemas.
- usaron algoritmos de solución a problemas conocidos, en la resolución de problemas relacionados con este objeto matemático.
- resolvieron problemas usando de diversas maneras, algoritmos para encontrar datos o relaciones entre los elementos del problema.

Por otra parte, el estudiante para profesor privilegió el uso de algoritmo análogo para encontrar datos, la solución inmediata del problema por medio de un algoritmo y la composición iterada de un mismo algoritmo y de algoritmos diferentes, al momento de resolver problemas sobre isometrías del plano.

Finalmente, en términos generales, puede establecerse que al estudiar los procesos enmarcados en la resolución de problemas, un factor que se ha de considerar son los algoritmos involucrados, así como el uso que se le dé a los mismos.

## REFERENCIAS

- Fonseca, J. y Sánchez, B. (2007). *Uso de algoritmos en la resolución de problemas sobre isometrías del plano. Un estudio de caso*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Polya, G. (1965/2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.