EL PASO DE LA RAZÓN A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: REVISIÓN DE ALGUNOS ELEMENTOS HISTÓRICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Carlos León

Universidad La Gran Colombia

carlos.leon@ugc.edu.co

La noción de función trigonométrica ha estado asociada a diversas prácticas que la han convertido en un concepto complejo que tiene sus orígenes en los primeros cálculos astronómicos y que adquiere su formalización con el planteamiento de respuestas a problemas generados en contextos físicos. El análisis de los episodios asociados a la evolución del concepto de función trigonométrica nos permite identificar una serie de herramientas que se vuelven pertinentes para el planteamiento de escenarios en donde se resignifiquen algunas características de la función en torno a su uso y a una nueva interpretación de la misma.

INTRODUCCIÓN

En esta ponencia se pretende realizar una reseña de algunos momentos históricos que resaltan el uso en ciertas mediciones que se le dio a la razón trigonométrica y su relación con algunos resultados geométricos que permitieron establecer un paso hacia el concepto de función trigonométrica.

La trigonometría es una rama de las matemáticas que cuenta con diversas aplicaciones en campos como la topografía, la cartografía, la astronomía y la física, haciéndose necesario su estudio en los niveles básicos de carreras relacionadas con la ingeniería o la administración. Los estándares curriculares localizan la trigonometría como un tema fundamental de la matemática de grado décimo y la proponen como una herramienta para resolver problemas tanto de las matemáticas como de otras disciplinas.

Por estas razones, es muy importante relacionar la trigonometría con otras ciencias para responder a los requerimientos presentes en nuestro sistema escolar, tanto en el colegio como en la universidad. Además, esto revela una necesidad social del conocimiento escolar el cual, según Suárez (2008), el estudiante debe adquirirlo para que le sirva en ámbitos formativos y profesionales y que le ayude a construir y transformar su vida.

León, C. (2011). El paso de la razón a la función trigonométrica: revisión de algunos elementos históricos en la construcción de la función trigonométrica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 371-378). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Sin embargo, es común en el ambiente escolar encontrar actividades alrededor de la trigonometría desprovistas de significado para el estudiante. Según Orhun (2000, citado en Maldonado, 2005), en la educación secundaria, la enseñanza de la trigonometría se limita, en buena medida, a la obtención de razones para un ángulo particular.

Esta falta de significación, especialmente de las funciones periódicas, la reportan Cordero y Martínez (2001) como causada por privilegiar argumentos de corte analítico en los que los conceptos matemáticos se consideran objetos elaborados, alejados totalmente de argumentos situacionales.

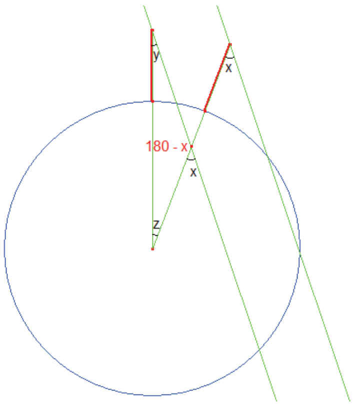
Es en el tránsito entre diferentes disciplinas científicas como se puede estudiar la generación de un conocimiento matemático, dotado de un contexto significativo y de las actividades y herramientas que permiten su construcción (Buendía, 2004). Por ejemplo, los conceptos trigonométricos han evolucionado dando explicación a fenómenos físicos relacionados con el movimiento de los planetas, el calor, el sonido, entre otros, y en donde a partir de las preguntas que se plantearon para resolver un problema, nos situamos en una época y en un contexto social para tratar de reconstruir el desarrollo de nociones trigonométricas.

Utilización de la razón en la trigonometría clásica

La razón trigonométrica y las propiedades de los triángulos son la base del estudio de la trigonometría clásica. Gracias a estos conceptos se pudieron ejecutar novedosos cálculos astronómicos para la medición de distancias estelares.

Fue Aristarco quien por primera vez utilizó la geometría con un fin trigonométrico: poder deducir una relación entre las distancias entre el sol y la luna, y la luna y la tierra. Aristarco comienza haciendo su análisis a partir de la idea de que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto formado por las líneas de sol-luna y luna-tierra. Aunque el cálculo resultó erróneo, el método fue correcto y utiliza la razón trigonométrica que hoy conocemos como la tangente de un ángulo.

Eratóstenes tomó la idea de que la tierra no era plana, para plantear su procedimiento; en primer lugar, aseguró que las sombras de dos estacas clavadas en el suelo sobre el mismo meridiano no tendrían, a la misma hora, la misma longitud, para lo cual utilizó la tangente como razón entre la longitud de la sombra y la de la estaca.



$$\tan y = \frac{S_1}{h} \qquad \tan x = \frac{S_2}{h}$$

Siendo S_1 y S_2 las sombras respectivas de la primera y la segunda estaca y h la altura de las estacas, con las igualdades anteriores y utilizando la función arcotangente se encuentra el valor de los ángulos x, y. Ahora, si se toma el triángulo cuyos ángulos son y, z y $(180 - x)$ (por formar par lineal con x) se tiene que:

$$180 = y + z + (180 - x)$$
$$z = x - y$$

Teniendo la longitud del arco entre las dos estacas y la medida del ángulo z se puede establecer la siguiente regla de tres:

Medida del arco L	$\longrightarrow$	Medida del ángulo z
Medida de la circunferencia terreste (C)	$\longrightarrow$	360º

Obteniendo:

$$C = \frac{L \times 360}{z}$$

Pero como la longitud de una circunferencia está dada por la fórmula $C = 2\pi R$, siendo R el radio terrestre, podemos igualar ambos resultados y obtenemos

$$\frac{L \times 360}{z} = 2\pi R\,,\ R = \frac{L \times 360}{2\pi z}$$

Eratóstenes pensó que si en alguno de los lugares en donde estaban las estacas, los rayos solares inciden de forma perpendicular, el ángulo y sería 0 y tendríamos que el ángulo central sería igual al ángulo x, y cuya medida se obtiene con la utilización de la razón trigonométrica. Realizando los respectivos cálculos, Eratóstenes estimó en 40.000 kilómetros aproximadamente, el radio de la tierra y esta medida se estima actualmente en 40.075 kilómetros.

Estos cálculos y algunos otros fundamentaron la trigonometría al dar aproximaciones del seno de ciertos ángulos y utilizar triángulos y relaciones entre sus lados. Para Montiel (2005), el elemento más importante en la construcción de nociones trigonométricas es la proporción expresada como razón en un sentido matemático abstracto y no como la relación de dos catetos en un triángulo.

Aunque existió un avance significativo en la visión de la trigonometría como rama independiente, ésta aún mantiene una estrecha relación con algunos cálculos astronómicos. Fue hasta el siglo XVII cuando adopta un carácter de tipo analítico, al estudiar las razones trigonométricas desde una óptica distinta al contexto geométrico representado por las cuerdas subtendidas en un arco.

Según Katz (1987) se debe interpretar esto como una mirada distinta de las propiedades de las relaciones trigonométricas. Un ejemplo de esto son propiedades como la periodicidad y lo acotado de los valores de las cuerdas, ya que en el contexto astronómico, una vez encontrados el período y la posición del planeta no se estudiaba la relación trigonométrica que se involucraba en los cálculos.

DE LA RAZÓN A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: UN CONTEXTO FÍSICO

La física, a lo largo de la historia ha abastecido a la matemática de situaciones y planteamientos en donde han nacido conceptos matemáticos, creciendo una relación constituyente entre las dos ciencias, pero según Arrieta (2003), el peso de los fenómenos físicos en clase es escaso, a pesar de las nociones y procedimientos matemáticos que ha surgido del proceso de comprender fenómenos reales.

Además, se ha adquirido una interpretación disyunta del conocimiento matemático; por ejemplo, la periodicidad es un concepto que está presente en la matemática y la física escolar, formando parte de una sola cultura científica del estudiante, pero en el discurso escolar suelen estar separadas, a tal punto que lo periódico viene a ser relativo dependiendo del referente (matemático y físico) que se tenga en cuenta.

Buendía (2004) propone un ejemplo de esta circunstancia: en Cálculo una función es o no es periódica según cumpla o no la definición, mientras que al estudiar lo periódico con osciladores, se habla de funciones casi periódicas, pareciendo que existe una confrontación entre la periodicidad definida a partir de una función y los comportamientos periódicos asociados a fenómenos con lo que se impone una separación disciplinar que no favorece un conocimiento científico articulado, si solamente se estudia este concepto de forma individual y sin conexión entre las dos disciplinas.

Los conceptos físicos están asociados a uno o varios conceptos matemáticos guardando así una relación constituyente más que experimental (Levy- Leblond, 1999). Esta integración entre la física y la matemática le dará al docente de matemáticas nuevos escenarios de enseñanza, y propiciará la conformación de comunidades de estudios con docentes no sólo de física sino de otras áreas, que ampliarán considerablemente los contextos en donde se puede apreciar la matemática.

EL PROBLEMA DE LA CUERDA VIBRANTE

En el siglo XVII, Huygens y Hooke empiezan a realizar el estudio del movimiento oscilatorio a partir del péndulo y el resorte respectivamente, y son estos nuevos usos los que determinan el cambio de percibir las relaciones trigonométricas como líneas en un círculo a cantidades que describen movimientos periódicos.

En 1739, Euler expone su trabajo sobre un oscilador armónico dirigido sinusoidalmente, que generó un problema llamado "la cuerda vibrante" en el que se considera el movimiento de un objeto en dos partes, una proporcional a la distancia y la otra como variación sinusoidal en el tiempo, al cambiar el foco de atención del período al movimiento.

El problema de la cuerda vibrante es uno de los problemas más importante en el desarrollo de conceptos tan importantes como el de función o el de serie trigonométrica. Su solución generó una gran discusión entre los matemáticos más destacados del siglo XVIII.

Daniel Bernoulli en su obra *Teorema sobre oscilaciones de cuerpos conectados por un hilo flexible y de una cadena verticalmente suspendida* explica en qué consiste el problema. Así lo reseña Sánchez (2007, p. 126) recurriendo a la siguiente cita de D. Bernoulli:

> Una cuerda musical tensa puede producir sus vibraciones isócronas de muchas maneras, incluso, de acuerdo con la teoría, hasta de diferentes maneras, el primer y más natural armónico tiene lugar cuando la cuerda produce en sus oscilaciones un solo arco; se produce entonces la oscilación más lenta y se emite el tono más bajo de entre los posibles, fundamental respecto al resto. El siguiente armónico exige que la cuerda produzca dos arcos a lados opuestos (de la posición de equilibrio de la cuerda) siendo entonces la oscilación el doble de rápida y emitiéndose ahora la octava del sonido fundamental.

Este problema data de 1727 cuando Johann Bernoulli envía dos cartas a su hijo Daniel en donde resume los avances alcanzados por él y por otros matemáticos acerca de la cuerda vibrante.

En 1749 D'Alembert en su obra *Investigaciones sobre la curvatura que forma una cuerda extendida puesta a vibrar* estudia las oscilaciones pequeñas que adquiere una cuerda homogénea de longitud fija l en sus extremos, hallando la ecuación diferencial que rige este movimiento:

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$$

Y cuya solución tiene la siguiente forma:

$$y\,(t,x) = \frac{1}{2}\,h\,(at+x) - \frac{1}{2}\,h\,(at-x)$$

Se destaca que la función ***h*** es una función periódica, impar y debe coincidir en el intervalo $0 < x < l$ con la función que describe la forma inicial de la cuerda. Ademas D'Alembert intenta demostrar que las curvas que describen la forma de la cuerda no son solamente sinusoidales sino que también pueden ser distintas a una combinación de senos y cosenos.

Tiempo después Euler en su artículo sobre las oscilaciones de cuerdas, estudia las condiciones iniciales de la cuerda y gracias a argumentos físicos y aceptando curvas no algebraicas antepone un nuevo concepto de función al considerar estas curvas como expresiones que analíticamente son polinomios con infinitos términos.

En 1753 Daniel Bernoulli establece que existe un enfrentamiento entre las ideas sobre soluciones sinusoidales y la variedad de soluciones distantes a las sinusoidales descritas en los trabajos de Euler y D'Alembert. Bernoulli plantea, apoyándose solamente en argumentos físicos, que cualquier movimiento correspondiente a una curva inicial no es más que una suma de armónicos periódicos sinusoidales (Jácome y Montiel, 2007).

Aunque existía un consenso en que mediante una función se podía expresar todo tipo de curva, Daniel Bernoulli había planteado una solución menos general que la de Euler y D'Alembert, al limitarse únicamente a funciones de tipo trigonométrico implicando el carácter periódico de dichas funciones. A pesar de que las soluciones de Euler utilizaban una función arbitraria, no necesariamente eran funciones periódicas y eso lo obligó a demostrar que cualquier tipo de función podía admitir una representación en series trigonométricas.

En 1753, Joseph Lagrange, gracias a un intercambio de correspondencia con Euler, plantea en su obra *Investigaciones sobre la naturaleza y la propagación del sonido* una mediación entre las soluciones propuestas al problema de la cuerda con lo que obtiene, de forma analítica, la representación en funciones trigonométricas de la solución general.

Por lo tanto, el problema de la cuerda vibrante es un hito en la historia de las matemáticas, al plantear una discusión sobre la definición de función, y fundamentar el trabajo de Fourier acerca del análisis armónico en la identificación de la propiedad de periodicidad dentro de las características de las funciones que pertenecen a la solución del problema.

Según Buendía (2004), varios autores coinciden en señalar este momento como el de la introducción del tratamiento formal que define las funciones trigonométricas numéricamente y no simplemente como líneas de un círculo.

REFERENCIAS

Arrieta, J.L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Buendía, G. (2004). *Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 14, pp. 422–431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Construyendo la razón trigonométrica. Una secuencia basada en la actividad. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 433-436). Yucatán, México: Red Cimates.

Katz, V. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica, 14*(4), 311-324.

Lévy-Leblond, J.M. (1999). Física y matemáticas. En F. Guénard y G. Lelièvre (Eds.), *Pensar la matemática*. (Cuarta edición.) Barcelona, España: Tusquets Editores.

Maldonado, E.S. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Sánchez, C. (2007). *Las funciones: un paseo por su historia*. Madrid, España: Nivola Libros y Ediciones.

Suarez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemólogico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.