

SOBRE LAS HABILIDADES ESPACIALES Y LA DIMENSIÓN SOCIOCULTURAL DEL APRENDIZAJE DE “LO GEOMÉTRICO”

Melissa Andrade-Molina, Ricardo Cantoral-Uriza
Cinvestav-IPN
mandrade@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

México

Resumen. En esta comunicación se establece la primera aproximación a un proyecto de investigación, enmarcado bajo la Teoría Socioepistemológica, que busca responder de qué manera las culturas a través de la historia han logrado apropiarse del espacio y cómo ésta apropiación ha sido influenciada por su entorno sociocultural. Para ello se presenta el *estado del arte*, dando a conocer algunos estudios en torno a la *visualización espacial* y a la profunda interacción de lo sociocultural en el aprendizaje de “lo geométrico”.

Palabras clave: apropiación del espacio, habilidad espacial, sociocultura

Abstract. In this paper, we establish the first approximation of an investigation based in the Socioepistemology Theory, about how the civilizations have achieved the appropriation of the space and how, this appropriation, has been influenced by the sociocultural environment. We present review of the investigations that we considered, showing some studies focused on spatial visualization and the deep interaction of the sociocultural environment in the learning of geometry.

Key words: appropriation of space, spatial ability, socioculture

Introducción

Son variadas las investigaciones que postulan que las habilidades espaciales de los estudiantes pueden ser desarrolladas mediante ciertas técnicas, métodos y/o herramientas, por ello se han abocado en estudiar cómo desarrollarlas, identificando ciertas dificultades al representar o visualizar el espacio, habilidades para comunicar información espacial, estudiando y analizando lo *cognitivo* que conlleva lo tridimensional. Y finalmente, han propuesto soluciones que, para esos investigadores, se traducirán en aportes a la enseñanza de la geometría plana y espacial, esperando lograr una reestructuración del currículum escolar (Smith, 1964; Ben-Haim, Lappan y Hougang, 1985, 1989; Gutiérrez, 1996; Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2011; Prieto & Velasco, 2010).

Por otra parte, algunos investigadores se han interesado en la herencia de la cultura en el tipo de habilidad espacial que tienen los estudiantes inmersos en diversos escenarios o contextos, en los que proponen que ciertos factores culturales determinan el tipo de desempeño que tendrán los estudiantes frente a acciones que involucren actividades tridimensionales (Bishop, 1979; Mitchelmore, 1980; Lancy, 1981; Clements, 2008).

En el presente escrito se expondrá el estado del arte de este proyecto de investigación. Los artículos se clasificaron en tres categorías afines a las investigaciones analizadas, en este escrito se considerarán sólo dos: (i) Sobre la influencia de aspectos culturales; (ii) Sobre el desarrollo de las habilidades espaciales

Resultados de la revisión

Diversos estudios han puesto en evidencia la relevancia que tiene la visualización espacial, en particular en el entendimiento de la geometría y el “estatus” que tiene en el currículum, por ejemplo, considerar que la visualización es el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la Geometría (Bishop 1980; Gal & Linchevski, 2010). Otras investigaciones revelan que el currículum escolar de matemáticas favorece al pensador no visual y, en la mayoría de los salones de clase, la enseñanza enfatiza los métodos no visuales, considerando la existencia de un predominio del pensamiento algorítmico por sobre el visual, señalando que existe una resistencia por parte de los estudiantes posiblemente porque pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente (Presmeg, 1986; Vinner, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1990).

Blanco (2009) realiza una crítica al sistema educativo mexicano señalando que el principal problema es que está limitado al estudio de métodos algorítmicos, sin insistir en las descripciones y las argumentaciones respecto a las características de los cuerpos geométricos, ni cómo podrían obtenerse. Concluye que el estudiante no construye el conocimiento manejándose con figuras y construcciones que ayuden a la comprensión de un problema, sino con “recetas” que se aplican para obtener resultados.

Andrade y Montecino (2011), por otra parte, dan evidencia de que gran parte de los estudiantes inmersos en el sistema educativo chileno presentan dificultades en el trabajo y representación de problemas que requieran el uso de habilidades espaciales, en otras palabras, no acuden a la tridimensionalidad para solucionar una determinada situación que requiera de este último.

Con respecto a lo anterior, se torna necesario indagar cómo interactúa lo sociocultural en el aprendizaje de “lo geométrico”, es decir, de qué manera las diferencias transculturales, tales como la cultura o el entorno social del estudiante, se reflejan en el uso de modelos espaciales.

Influencia de aspectos culturales

Bishop (1979) demostró cómo mucho de lo que trata de comunicar una imagen depende del bagaje cultural -*cultural background*- de quien está tratando de “leer” la imagen. Por ejemplo, un niño inmerso en una cultura no occidental no es educado para darse cuenta que las líneas punteadas en un bosquejo de un cubo pueden indicar bordes “en el fondo” que no pueden ser vistos desde una vista frontal (Clements, 2008).

Una de las primeras investigaciones que se centraban en los aspectos visuales y espaciales de la matemática fue presentada por Bishop en 1979, enfocada en identificar fortalezas y debilidades

en el campo de lo espacial, estableciendo una relación con los diferentes bagajes culturales, lingüísticos y ambientales (entorno) de estudiantes indígenas, de Papúa Nueva Guinea, que participaron de sus estudios.

Clements (2008) comenta que Bishop, en una conversación acerca de la información recogida en Papúa Nueva Guinea, no se había dado cuenta que la cultura y el entorno social del estudiante, lenguaje y preferencias espaciales, pudieran interactuar tan profundamente con las formas en las cuales la matemática es presentada, enseñada y entendida.

Lo anterior puede ser ejemplificado en una de sus experiencias vividas en Papúa Nueva Guinea, donde se hace explícita la influencia de lo cultural en el razonamiento de un estudiante ante una situación escolar y una situación planteada en un contexto cotidiano: Se pudo observar que a pesar que se trate de llevar la matemática escolar a situaciones particulares de la vida diaria, ésta no deja de ser escolar, percibida como ajena a lo cotidiano, es decir, independiente de lo que ocurra en el aula, en la práctica se hace uso de las herramientas que se heredan de lo cultural.

“Le pregunté a un estudiante:

I: ¿Cómo puedes encontrar el área de esta pieza (rectangular) de papel?

E: Multiplicando el largo por el ancho.

I: Tú tienes jardines en tu pueblo. ¿Cómo juzga tu gente el área de sus jardines?

E: Sumando el largo por el ancho.

I: ¿Es tan difícil de entender?

E: No, en casa sumo, en la escuela multiplico.

I: Pero ambos se refieren al área.

E: Si, pero uno es sobre el área de un pedazo de papel y el otro sobre un jardín.

I: (Entonces dibujé dos jardines (rectangulares) en un papel, uno más grande que otro). Si estos fuesen dos jardines, ¿Cuál preferirían tener?

E: Depende de muchas cosas, no puedo decirlo. El suelo, la sombra...

I: (Cuando estaba a punto de preguntar la siguiente cuestión “Si, pero si tuviesen el mismo suelo, sombra...” fue cuando me di cuenta de lo absurdo que sonaría en ese contexto. Claramente su preocupación se refería a dos problemas: al tamaño de jardines, un problema inmerso en un contexto rico en tradición, folclore y habilidades de sobrevivencia. El otro problema, al área de piezas

rectangulares de papel, inmerso en un contexto totalmente diferente” (Bishop, 1979, p. 117).

En consecuencia, Bishop (1979) realiza una crítica a los trabajos que hasta ese momento reportaban que los estudiantes inmersos en culturas no occidentales tenían habilidades espaciales más menos desarrolladas, con respecto a los estudiantes occidentales, ya que él considera que los instrumentos utilizados en tales estudios hacen uso de “convenciones” asumiendo una universalidad de conocimiento. Por ejemplo, Lancy (1981) reporta que la mayoría de los estudios previos a 1975, usando instrumentos basados en la teoría piagetiana, concluyeron que los niños de Papúa Nueva Guinea presentan mayores dificultades en la adquisición de habilidades de conservación respecto a niños occidentales.

A pesar de la crítica se continuaron realizando ese tipo de investigaciones, el propio Lancy (1981) evidenció, mediante un estudio que tenía por objetivo documentar la relación entre el ambiente, las características culturales y el desarrollo cognitivo, que la conservación de masa aparece mucho más tarde en estudiantes “indígenas” (no occidentales) en comparación a los estudiantes de occidente, y que la conservación de longitud es lograda por menos de la mitad de la población, aún siendo adultos.

Por otro lado, Mitchelmore (1980) realizó un estudio para identificar diferencias en las habilidades espaciales entre estudiantes de Kingston, Jamaica; Columbus, Estados Unidos y Bristol, Inglaterra, tomó como muestra a 64 estudiantes por país, de tercer, quinto, séptimo y noveno grado. Mediante el análisis de las representaciones bidimensionales de situaciones tridimensionales dadas, concluyó que los estudiantes de Inglaterra poseen una mayor habilidad espacial, con una diferencia de tres años, que los de Estados Unidos, que a su vez superan a los estudiantes de Jamaica, es decir, los estudiantes de Jamaica tienen una diferencia de 6 años en comparación con los de Inglaterra.

Evidenciando que las diferencias observadas en las habilidades espaciales reflejan las diferencias transculturales en la actitud para pensar utilizando modelos espaciales, actitud que es parcialmente revelada por el grado de profundización que se le da a la geometría en el currículum escolar y por factores socioculturales, como por ejemplo que en Jamaica la escuela primaria está orientada principalmente al álgebra (Mitchelmore, 1980, p. 213). Así, la investigación de Mitchelmore (1980) revela diferencias en la habilidad espacial que pueden ser atribuidas al contexto sociocultural en el que se encuentren inmersos los estudiantes, reconociendo esta influencia en la forma en la que percibimos el mundo y nuestro entorno, por ende, en cómo lo representamos.

El desarrollo de la habilidad espacial

Ciertas investigaciones han demostrado que se deben incorporar materiales concretos (tangibles) a los salones de clases, o se deben introducir clases de dibujo técnico, o bien realizar adaptaciones o reestructuraciones curriculares para que de esta manera se desarrollen las habilidades espaciales de los estudiantes.

Otras investigaciones surgen para llamar la atención de los profesores con respecto al tipo de representaciones que logran sus estudiantes, por ejemplo Gutiérrez (1998) considera como necesario que los estudiantes aprendan a dibujar y leer representaciones planas de cuerpos tridimensionales, así podrán mejorar su capacidad para comprender la geometría espacial y facilitar el aprendizaje de ésta, ejecutándose mediante instrucciones específicas por parte del profesor.

Habilidad espacial y materiales concretos

Smith (1964) afirmó que las habilidades espaciales y matemáticas están estrechamente correlacionadas y que sus investigaciones indicaban que estas habilidades podían desarrollarse mediante materiales estructurados y cuidadosamente seleccionados.

Ben-Haim, Lappan y Hougang (1985) ponen en evidencia que los estudiantes de 5, 6, 7 y 8 grado presentaron dificultades al momento de: *identificar* por ejemplo ¿cuántos cubos se necesitan para construir un sólido rectangular?, incluso estudiantes de niveles superiores presentan las mismas dificultades (Ben-Haim, Lappan & Hougang, 1985); y en *comunicar información espacial*, a pesar de estar familiarizados con varios tipos de modos de representación verbal, gráfica, icónica, entre otros, (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989). Proponen que una experiencia con material concreto ayudará a mejorar el rendimiento de los estudiantes y que, además, se deben incluir experiencias concretas con cubos en el currículo escolar de escuela secundaria *-middle school-*, por ejemplo mediante la representación y comunicación de información en la construcción de edificios.

Habilidad espacial y reestructuras curriculares

Otras investigaciones consideran primordial que para propiciar un desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes es necesario realizar adecuaciones curriculares (Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2011). Reconociendo que se considera a la visualización en matemáticas como un tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos espaciales o visuales, tanto mentales como físicos, utilizado para resolver problemas o comprobar propiedades Gutiérrez (1996).

Blanco (2009) estudió las representaciones visuales, de los cuerpos poliédricos en el plano, que dibujaron los estudiantes que participaron en su trabajo, realizando una propuesta de aplicación de geometría dinámica. Su objetivo fue indagar de qué factores depende la representación de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

Para abordar esta problemática realizó una recopilación de antecedentes e investigaciones orientadas a poner de manifiesto las equivocaciones observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyaron sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional y los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes al momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren un manejo geométrico.

Sus resultados evidenciaron la presencia de representaciones prototipos de cuerpos tridimensionales, como de un cubo o de una pirámide, por estudiantes de bachillerato que tomaron un curso de perspectiva y, además, la presencia de figuras planas para representar un cubo y una pirámide por parte de estudiantes que no tomaron cursos de perspectiva.

Andrade y Montecino (2011) realizaron un estudio que permitió indagar si los estudiantes recurrían a la visualización espacial o tridimensionalidad al enfrentarse a situaciones que pusieran en juego sus conocimientos, pero que a la vez no involucraran fórmulas algebraicas o patrones de solución. Revelando que los estudiantes utilizan la tridimensionalidad luego de agotar todas las posibles soluciones en el plano.

Para ello, analizaron los textos escolares y planes y programas del Ministerio de Educación de Chile, evidenció que se pone énfasis en desarrollar las competencias necesarias en los estudiantes para que logren desenvolverse exitosamente en pruebas estandarizadas a las cuales deberán enfrentarse durante su formación escolar. Por consiguiente, Andrade y Montecino (2011) concluyen que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, lo cual implicaría que los estudiantes no desarrollen sus habilidades para la manipulación de lo tridimensional, por ejemplo en las actividades que se centran en el trabajo con cuerpos geométricos o sus representaciones en el plano, se remiten al cálculo de áreas y volúmenes, identificación de redes, descomposición de cuerpos, entre otros.

Por otro lado, aplicaron dos problemas que involucran el uso de la tridimensionalidad, a una muestra de 76 estudiantes de enseñanza escolar. Los resultados obtenidos pusieron de manifiesto falencias respecto a hacer uso de la tridimensionalidad como recurso para la solución de una situación problemática, ya que sólo surge ésta luego de agotar todas las

posibles soluciones en el plano, lo que, proponen, se debe a que durante la enseñanza escolar los problemas: ejemplos y trabajos, se entrelazan con el contenido que está siendo institucionalizado.

En su investigación se pone en evidencia la necesidad de establecer un trabajo interdisciplinario con el Subsector de Artes Visuales, para que los estudiantes desarrollen sus capacidades y habilidades en torno a trazar en el plano la realidad que los rodea, con lo que se pretende que será más fluido el visualizar las representaciones bidimensionales de cuerpos geométricos.

Habilidad espacial y dibujo técnico.

Prieto y Velasco (2010) realizaron un estudio para analizar de qué manera mejoraba la habilidad espacial luego del aprendizaje del dibujo técnico. Aplicaron dos pruebas, de razonamiento visual e inductivo, al inicio y al final de un curso de dibujo técnico, a estudiantes de primer año de ingeniería. En ambos estudios se observó que un porcentaje moderado de estudiantes mejoró la prueba visual, siendo esta mejora similar en hombres y en mujeres. Finalmente, los autores concluyen que la habilidad de visualización espacial puede mejorar luego de un “entrenamiento”, en este caso, el curso de dibujo técnico.

En síntesis

De la revisión anterior se puede concluir que la investigación en este campo se centra en abordar problemáticas sobre cómo realizar mejoras para que los estudiantes logren una mayor comprensión sobre la representación geométrica del espacio. De esta manera se distinguen dos categorías, una que se enfoca en realizar mejoras estructurales en el currículum escolar de matemáticas y otra que tiende a destacar la importancia que tiene desarrollar las habilidades espaciales en los estudiantes.

La primera categoría, las que dan cuenta de la necesidad de realizar mejoras estructurales en el currículum escolar, pone en evidencia que, por un lado, es necesario que este currículum favorezca al desarrollo de habilidades espaciales en los estudiantes (Ben-Haim, Lappan & Hougang, 1985, 1989; Gutiérrez, 1996; Blanco, 2009; Andrade & Montecino, 2011; Prieto & Velasco, 2010) y, por otro, que éste reconozca la cultura y el entorno social del estudiante (Bishop, 1979; Mitchelmore, 1980; Lancy, 1981; Clements, 2008).

Sin embargo, se reconoce que el foco de atención de estas categorías radica en la forma en que los estudiantes comprendan los objetos matemáticos involucrados, en otras palabras, el fondo está en el objeto matemático, a pesar de que algunas reconozcan la importancia de factores externos en su desarrollo, como el lenguaje. Es así como se logra identificar que estas investigaciones reconocen, implícitamente, que el papel del estudiante en el proceso educativo

es de un mero consumidor de un conocimiento que permanece estático o acabado, es decir, él es quien aprende, descubre o reproduce, pero no quien construye.

Por ejemplo, Bishop (1999) identificó cinco factores que no pueden ser soslayados en la enseñanza de las matemáticas, entre ellos ubicó lo cultural y lo social, argumentando que la educación debe ser considerada como un proceso social, por lo tanto la educación matemática también debería ser reconocida como tal. Asimismo, se observa que la cultura y el entorno social de un estudiante no quedan excluidos de la escuela sino que forman parte del proceso de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, aún al considerar factores de tipo sociocultural, el conocimiento matemático no se trastoca.

De esta manera cabe preguntar si esta influencia, reconocida del entorno sociocultural, interviene sólo en procesos educativos, claramente la respuesta es “no”, ya que se sostiene que la problemática va más allá de aspectos curriculares. Por ejemplo, si se considera que el conflicto para que los estudiantes desarrollen habilidades espaciales que les permitan un mayor entendimiento sobre la geometría espacial radica en la visualización y representación espacial, Borrás (1996) evidenció que la existencia de ciertos factores, desprendidos directamente del entorno sociocultural, intervienen en la forma en la que representamos lo que nos rodea.

En otras palabras, la herencia sociocultural va a mediar la manera en la que se comprende el espacio físico. Entonces parece lógico estudiar lo que ocurre dentro de un escenario sociocultural, a fin de reconocer estos factores, en lugar de proponer una reestructuración curricular o actividades. Con preguntas como ¿de qué manera esta influencia, que interviene en el modo de representar nuestro entorno, repercute en la construcción de conocimiento matemático? Por consiguiente se torna evidente estudiar cómo surgen ciertas nociones que conllevan a construir conocimiento, específicamente de geometría.

Con respecto a esto último, se postula que el entorno sociocultural incide en el desarrollo de las habilidades espaciales que permiten a una civilización construir o desarrollar ideas matemáticas. De esta forma, no se consideran las interacciones ocurridas dentro de un ambiente escolarmente regulado, sino que el foco está en las relaciones humanas que ocurren dentro de una civilización, dando respuesta a las siguientes preguntas que orientarán esta investigación: ¿De qué manera las culturas a través de la historia han logrado apropiarse del espacio? ¿Cómo ésta apropiación ha sido influenciada por su entorno sociocultural? Lo que se realizará mediante el estudio de las prácticas de una determinada civilización, identificando qué elementos socioculturales están presentes al apropiarse del espacio.

Referencias bibliográficas

- Andrade, M. y Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano, *Actas del XIII CIAEM-IACME 2011*. En: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2405.pdf>.
- Ben-Haim, D., Lappan, G. y Hougang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics* 16, 389-409.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in mathematics* 20, 121-146.
- Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones*. Tesis de Maestría, CICATA – IPN, México.
- Bishop, A. J. (1979). Visualizing and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics*, 10(2), 135–146.
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Borrás, G. (1996). *Teoría del arte I: Las obras de arte*. Madrid: Historia 16.
- Clements, M. A. (2008). Spatial abilities, mathematics, culture, and the Papua New Guinea experience. In P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop* (pp. 97–106).
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), en *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series. USA.
- Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Study of Mathematics*, 74, 163 –183.
- Gutierrez, A. R. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME international conference* 1, 3–20.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3 (3), 193-220.

- Lancy, D. (1981). The Indigenous Mathematics Project: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 445-453.
- Mitchelmore, M. C. (1980). Three-dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 205-216.
- Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, 6(3), 42-46.
- Prieto, G. y Velasco, A. (2010). Does spatial visualization ability improve after studying technical drawing? *Quality and Quantity* 44 (5), 1015–1024.
- Smith, I. (1964). Spatial ability: Its educational and social significance. London: University of London Press
- Vinner S. (1989). The Avoidance of visual considerations in Calculus. Focus Learning Problems of Mathematics. Traducido en *Antología de Educación Matemática*. Cinvestav, 85-93.