CARACTERIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN BÁSICA SECUNDARIA

Cristina Bolívar, Mayerly Martín y Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional
crisbol_2002@hotmail.com, mmartinb@pedagogica.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

Se presentan algunos resultados obtenidos de una investigación interdependiente con una experiencia de aprendizaje desarrollada con estudiantes de grado noveno del Instituto Pedagógico Nacional. En ella se pretendía involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa, a partir de la resolución de un problema geométrico abierto haciendo uso de un software de geometría dinámica. El estudio contribuyó a caracterizar la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa e identificar algunos factores que influyen en dicha participación.

INTRODUCCIÓN

La comunicación que queremos socializar se deriva del trabajo de grado que realizamos para optar al título de magister en Docencia de las Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional y que giraba alrededor de la actividad demostrativa en educación básica secundaria, mediada por el uso de un programa de geometría dinámica. El proyecto se centró en caracterizar la actividad demostrativa que llevan a cabo dos grupos de estudiantes de grado noveno, del Instituto Pedagógico Nacional, cuando se enfrentan a una tarea en la que tienen que formular una conjetura y demostrarla, haciendo uso de un conjunto de enunciados geométricos estudiados en clase.

Entre los objetivos que se plantearon en el proyecto para favorecer la actividad demostrativa se encuentran: diseñar un conjunto de problemas geométricos; analizar sus posibles soluciones, identificando el contenido geométrico que los estudiantes podrían usar, propuestas de construcción y exploraciones en Cabri, posible formulación de conjetura y argumentos geométricos; implementar los problemas propuestos en un grupo de estudiantes de noveno grado del Instituto Pedagógico Nacional; analizar por fragmentos la interacción en clase profesor-estudiante, del proceso llevado a cabo por los estudiantes en torno a la actividad demostrativa, sintetizar y caracterizar dicho proceso y evaluar sus proyecciones para un curso completo.

Bolívar, C., Martín, M. y Camargo, L. (2011). Caracterización de la actividad demostrativa en básica secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 173-180). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

El estudio se enmarca en la línea Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, del grupo Didáctica de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, que pretende aportar elementos a la solución de la problemática del aprendizaje de la demostración en geometría. Este asunto es objeto de discusión en la comunidad de investigadores en educación matemática (Mariotti, 1997; Healy y Hoyles, 1999; Sánchez, 2003; Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006), y es preocupación constante en nuestra práctica como profesoras de matemáticas.

A continuación hacemos una breve presentación del marco de referencia empleado en el estudio, después sintetizamos aspectos del diseño metodológico. Posteriormente proponemos un ejemplo del tipo de análisis que realizamos. Finalizamos con algunas conclusiones del estudio.

MARCO DE REFERENCIA

Tomamos como referente teórico principal la conceptualización de *actividad demostrativa* desarrollada por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006). Este es un constructo que abarca más que la elaboración de una demostración formal pues se ve como una actividad que apunta al aprovechamiento de la justificación como recurso para la comprensión de ideas geométricas y a la adquisición de herramientas para la comunicación de éstas y para su validación. Es decir, que para poder realizar una auténtica actividad demostrativa las acciones deben ir dirigidas a desarrollar procesos tales como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, que son las que permiten movilizar el razonamiento hacia la búsqueda de la validación, dar significado a la tarea de argumentar para aceptar afirmaciones y proveerse de elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones; además, se deben considerar las acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones matemáticas. Desde nuestro punto de vista, es posible acercar significativamente a estudiantes de secundaria a la demostración si ellos participan de manera genuina en acciones asociadas a dicha actividad.

Uno de los aspectos relevantes que se constituye en objeto de análisis de quienes se ocupan del aprendizaje de la demostración es el papel que juegan las definiciones en la actividad demostrativa. Reflexiones hechas por autores como Vinner (1991) y Dreyfus (1990) destacan que aprender de memoria una definición no garantiza comprender su significado y mucho menos su uso correcto en la producción de demostraciones, razón por la cual los estudiantes tendrán dificultades a la hora de hacer uso de las definiciones dentro de una cadena de argumentos. Destacan la necesidad de incluir el análisis de las definiciones en el marco de la resolución de problemas en el momento en el que los objetos geométricos que se van a definir se vuelven parte indispensable de la argumentación. Efectivamente, en el curso de nuestra investigación encontramos en los registros de las dos primeras sesiones de trabajo una intensa discusión acerca de las definiciones de rectángulo, cuadrado y trapecio dado que las conjeturas formuladas por los estudiantes hacían referencia a dichos objetos. Incluso, pese a haber acordado como definición de rectángulo que éste es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos, al momento de justificar una conjetura, un estudiante quiso usar como dado que dos lados opuestos de un rectángulo eran congruentes. Esto condujo a revisar la definición y establecer qué propiedades explícitas en ella se podían tomar como antecedentes de los pasos de la justificación.

DISEÑO METODOLÓGICO

Para realizar el proyecto, diseñamos un conjunto de problemas encaminados a que los estudiantes identificaran propiedades comunes al rectángulo y al trapecio isósceles (Bolívar y Martín, 2010). Estos problemas fueron propuestos a dos grupos de tres estudiantes en cuatro sesiones de trabajo de dos horas cada una, que se realizaron en horario extra-clase. Los dos grupos disponían de un computador portátil con el software Cabri y de un listado de postulados, definiciones y teoremas que se les entregó al iniciar la primera sesión. La dinámica seguida combinó: trabajo en grupo sin ayuda de la profesora, trabajo en grupo con intervención de ella, discusión entre los estudiantes con intervenciones ocasionales de la profesora y puesta en común dirigida por la profesora.

Cada sesión fue grabada y se dispone del video y del audio del trabajo del grupo y de las puestas en común. Al finalizar la implementación de la experiencia, realizamos la transcripción de los archivos de audio y video, para su posterior análisis. A partir de la transcripción de las interacciones de las sesiones de trabajo, realizamos la organización y reducción de la información.

Dividimos las transcripciones de cada sección en fragmentos teniendo en cuenta la acción de la actividad demostrativa que estaban realizando. Contextualizamos cada fragmento escribiendo un encabezado que permitiera a cualquier lector ubicarse en la actividad que estaban realizando los estudiantes y comprendiera la interacción comunicativa que se llevaba a cabo sin necesidad de leer todos los fragmentos. Luego, propusimos una descripción general de cada fragmento indicando la acción de la actividad demostrativa que se llevaba a cabo y algunas ideas en torno al rol de los estudiantes y de la profesora.

Interpretamos y analizamos la interacción en cada fragmento. Además de la descripción, analizamos la actividad demostrativa de los estudiantes, apoyándonos en los referentes proporcionados por el marco teórico.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

A continuación, presentamos un ejemplo de los análisis realizados. El fragmento es tomado de la segunda sesión. Los estudiantes estaban investigando qué tipo de cuadrilátero permitía afirmar lo siguiente: "si el cuadrilátero *ABCD* es un ________ entonces la intersección de sus diagonales es vértice de dos triángulos isósceles". Cada grupo había construido un rectángulo, ya que habían conjeturado que este cuadrilátero satisfacía la afirmación. Habían etiquetado los vértices con las letras *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente, y trazado sus diagonales. También nombraron el punto de intersección entre ellas con la letra *E* (ver Figura 1).

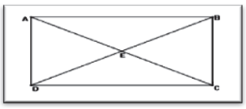

Figura 1

El fragmento que se presenta a continuación recoge la interacción entre los estudiantes, con intervención de la profesora, en el momento en el que creen haber demostrado que $\angle ADE$ y $\angle CBE$ son congruentes, así como $\angle DAE$ y $\angle BCE$. Deciden justificar que los segmentos *AD* y *BC* son congruentes para poder afirmar que los triángulos *AED* y *BEC* son congruentes. Esto porque han desviado el interés por demostrar que los triángulos son isósceles y se concentran en mirar que son congruentes. En el curso de la justificación de la conjetura, un estudiante pretende hacer uso de propiedades del rectángulo no incluidas en la definición de rectángulo que había sido construida en consenso por todos los integrantes del grupo.

458. Diego: Pero falta mirar que los lados [de los triángulos] son congruentes.

459. Jordan: ¡Ah!... pero falta.

460. Nathaly: Faltan los segmentos [*AD* y *BC*].

461.	Diego:	Los segmentos son congruentes.
		[…]
465.	Jordan:	[…] [El segmento] *BC* es congruente a [el segmento] *AD*, por definición de rectángulo.
		[…]
469.	Profesora:	¿Sí? Y, ¿dónde dijimos en la definición de rectángulo que dos [lados opuestos] son congruentes?
470.	Jordan:	¡Ah, no!, eso era el trapecio [isósceles].
471.	Nathaly:	Sí, los [lados] paralelos son congruentes.
472.	Profesora:	Pero eso no lo dijimos en la definición que construimos.
473.	Jordan:	No.
474.		[…]
476.	Profesora:	Y como la definición es esa, no la podemos usar así. Tocaría demostrarlo. […]
		[…]
492.	Profesora:	Miren [el criterio] ALA; si fuera ALA, necesitaríamos un [par de] lado [lados congruentes].
493.	Jordan:	¡Ah!
		[…]
495.	Jordan:	ALA… yo ya lo tengo.
		[Los estudiantes observan las construcciones de su respectiva mesa de trabajo. Luego se retoma la socialización entre todos los integrantes].
497.	Jordan:	Eh…, uhm… Profe, cuando uno traza las...
498.	Profesora:	¿Señor?
499.	Jordan:	¿Al trazar las diagonales en un cuadrilátero, entonces, o sea, la intersección de estas es el punto medio, de este segmento [de cada diagonal]?
500.	Profesora:	[…] Puede que sí sea cierto, pero […] todo lo que no conozcamos en este momento habría que demostrarlo, solamente podemos jugar con lo que tenemos.

Diego, Jordan y Nathaly caen en cuenta de que deben afirmar que tienen un par de lados congruentes [458-461], afirmación en la que se centra la argumentación desarrollada en este fragmento. Jordan comienza por señalar que el segmento *BC* es congruente con el segmento *AD* justificando la afirmación con la definición de rectángulo [465]. La profesora interviene preguntándoles si realmente pueden asegurar la congruencia recurriendo a la definición de rectángulo que se ha construido en consenso [469]. Nathaly insiste en que los lados paralelos del rectángulo son congruentes [471], quizá con base en la visualización de la figura o en la imagen conceptual que posee, por lo que parece no comprender por qué no se puede usar esta información en la justificación [474]. La profesora recurre a la norma establecida al comenzar la experiencia recordándoles que sólo pueden afirmar propiedades del rectángulo que estén explícitas en la definición que ellos adoptaron [476]; por lo tanto, deben buscar cómo justificar la congruencia de los segmentos *AD* y *BC*. Propone revisar el criterio de congruencia ALA, haciendo ver a los estudiantes que hace falta verificar la congruencia de un par de lados para poder aplicarlo [492]. Por tal motivo, Jordan, (probablemente buscando una alternativa que le permita encontrar un lado), pregunta si se puede afirmar que las diagonales de un cuadrilátero se intersecan en su punto medio [499]. La profesora insiste en que todo lo que se afirme y no se haya establecido o definido anteriormente debe ser demostrado para poder ser usado [500].

El fragmento ilustra dos características de la actividad demostrativa que están muy relacionados. De un lado, el papel que juegan las definiciones en la producción de una justificación. A pesar de haber acordado una definición de rectángulo, a la hora de usarla como garante de una afirmación, los estudiantes recurren al conocimiento común que tienen del rectángulo y sus propiedades, y no a la definición, ignorando el funcionamiento de un paso deductivo. Es decir, los estudiantes asumen la definición como una descripción y no como una expresión bicondicional que sirve de puente entre unos datos y una conclusión que se quiere obtener. A lo largo de la interacción, Jordan parece entender a qué se refiere la profesora cuando les explica que sólo deben usar las propiedades incluidas en la definición de rectángulo. En cambio, Nathaly se muestra confundida al respecto e insiste en preguntar por qué no pueden afirmar que los lados paralelos de un rectángulo son congruentes. De otro lado, la negociación de la norma de usar en las justificaciones sólo afirmaciones que ya se tengan de antemano, es otro aspecto que genera dificultades a los estudiantes. En el fragmento, como Jordan ha entendido que no se puede valer de la definición de rectángulo para afirmar la congruencia de dos segmentos, recurre a una propiedad del rectángulo reconocida visualmente, pero no demostrada: las diagonales se bisecan. Nuevamente viola la norma establecida y la profesora debe insistir en ella.

Desde nuestro punto de vista, aunque los estudiantes logran sintetizar los hallazgos relevantes alrededor de la demostración de la congruencia de triángulos que quieren establecer, es necesaria la guía de la profesora cuando buscan las justificaciones de lo que desean afirmar. Ella centra su papel en enfocarlos sobre los objetos relevantes para la demostración y también los ubica cuando recurren a argumentos que no son válidos dentro de una argumentación deductiva, insistiendo en la norma. Parece que Jordan entiende mejor las reglas del juego y se ve un avance en la actividad demostrativa que realiza con respecto al resto de los estudiantes. A pesar de que aún utiliza afirmaciones que no se han demostrado, recurre a la generalización y a hacer uso de sus conocimientos previos. Es probable que un trabajo más sistemático y prolongado en ese sentido le permita a él y a otros estudiantes entrar en el mundo teórico de la geometría tempranamente.

Conclusiones

Dentro de los alcances del proyecto se evidencia que fue posible plantear un conjunto de problemas retadores que permitieron a los estudiantes involucrarse de manera genuina en la actividad demostrativa, lo que se analizó, extrayendo un conjunto de indicadores derivados de las interacciones que se dieron en la actividad, logrando realizar una síntesis y caracterizar el proceso que realizan los estudiantes.

Una característica central de la actividad demostrativa en la que se involucran los estudiantes es que tienen mayor facilidad para elegir argumentos, que para construirlos, aunque no necesariamente sean correctos. El nivel argumentativo de los estudiantes permite explicar las diferencias en sus respuestas, ya que los que le encontraban poco sentido a una demostración, casi siempre elegían argumentos empíricos; en cambio, los que reconocían la generalidad de la prueba y su papel en el establecimiento de la verdad de una afirmación eran mejores en la construcción de una demostración y en la selección de argumentos.

El uso del programa de geometría dinámica aportó a la acción de visualizar, lo que posibilitó que los estudiantes completaran la conjetura sugerida en el segundo problema. Sin embargo, los resultados no permitieron concluir cuál es el efecto de la geometría dinámica en la construcción de una justificación, quizá porque en el diseño metodológico no se previó que el manejo que tenían los estudiantes de Cabri no era suficiente para poder aprovechar la opción de arrastre para explorar, verificar y visualizar hechos geométricos que les permitieran vislumbrar un camino para la justificación. Sin embargo, no debe desestimarse el papel de la geometría dinámica al crear un ambiente propicio para la indagación y de construcción colectiva de las justificaciones, ya que permitió que los estudiantes participaran en la solución de un problema abierto involucrándose de manera genuina en la solución y justificación del problema.

La experiencia favoreció un ambiente que permitió a los estudiantes participar activamente en la construcción social del conocimiento, en el que el proceso de enseñanza y aprendizaje fue una responsabilidad compartida y los estudiantes tuvieron un papel activo. Al escoger los problemas que se les proponen a los estudiantes hay que tener en cuenta que la demostración de las conjeturas que surgen no implique observar más de un elemento a la vez, pues esto puede desviar su atención en lo que deben demostrar.

Referencias

Bolívar, C. y Martín, M. (2010). *Caracterización de la actividad demostrativa. Una experiencia en secundaria.* Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113-133). Cambridge: Cambridge University Press.

Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Student's performance in proving: Competence or curriculum? En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (vol. 1, pp. 153-167). Osnabrück: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.

Mariotti, M. (1997). Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague: Prometheus Publishing House.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática, 15*(2), 27-53.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.