

APROXIMACIÓN AL TRATAMIENTO ESCOLAR DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE MATERIALES MANIPULATIVOS

Gilbert Cruz y Carlos Montenegro

Colegio Lacordaire

andrescruz1008@hotmail.com, cemn_1987@hotmail.com

En años recientes, un cuerpo creciente de investigaciones en didáctica de las matemáticas han identificado algunas dificultades en relación con el aprendizaje de contenidos temáticos, procesos y contextos relacionados con el pensamiento espacial y sistemas geométricos, siendo comúnmente atribuidas a causas de orden epistemológico, cognitivo, curricular y didáctico. En este sentido se revela como prometedor el estudio del proceso de integración al currículo y a las prácticas escolares, de *recursos*, concretamente lo que se refiere a materiales manipulativos. Esto con la intención de fortalecer en los estudiantes los conocimientos adquiridos para resolver algunos problemas de su entorno escolar y cotidiano, a medida que avanza su proceso de aprendizaje.

PLANTEAMIENTO DEL TEMA

En años recientes, un cuerpo creciente de investigaciones en didáctica de las matemáticas han identificado algunas dificultades en relación con el aprendizaje de contenidos temáticos, procesos y contextos relacionados con el pensamiento espacial y sistemas geométricos, siendo comúnmente atribuidas a causas de orden epistemológico, cognitivo, curricular y didáctico. En este sentido, resulta importante explorar nuevas perspectivas para el estudio de los fenómenos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que permitan la formulación y eventual puesta en *práctica de alternativas de intervención*¹ en las aulas de matemáticas. Un campo que se revela prometedor es el estudio del proceso de integración al currículo y a las prácticas escolares, de *recursos*², concretamente lo que se refiere a materiales manipulativos. Ahora

¹ Entendemos por *práctica de alternativas de intervención* un hecho que sucede al interior de las aulas en el que se tienen distintas visiones sobre cómo abordar un mismo contenido. Puede considerarse como una opción y no como una imposición institucional para brindarle a los estudiantes una o distintas maneras de asimilar un mismo contenido.

² En este sentido las prácticas de alternativas de intervención se enriquecen a partir de los distintos medios físicos o virtuales, de lectura o de exploración, de práctica o invención, etc., con la intención de enriquecer los procesos cognitivos y metacognitivos no sólo de los Cruz, G. y Montenegro, C. (2011). Aproximación al tratamiento escolar de la geometría a través de materiales manipulativos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 345-354). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

bien, aunque estas investigaciones cuentan con cierta tradición en el campo de la didáctica de las matemáticas, el impacto en las prácticas de enseñanza todavía parece débil y sólo recientemente han presenciado un interés renovado sobre sus alcances y proyecciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar.

En este punto se hace visible la importancia del estudio de las dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes en relación con el aprendizaje de la geometría, el estudio y análisis de las concepciones y creencias de los docentes de matemática en relación con la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas, concretamente en geometría, y el papel de las propuestas curriculares vigentes sobre las iniciativas de integración de materiales didácticos en las aulas de matemáticas y la indagación de otros que sirvan de realimentación a dichos procesos. De manera particular, se retoma el aporte de las investigaciones sobre el impacto de la integración de un tipo de recursos didácticos, los manipulativos.

MARCO DE REFERENCIA

Al respecto puede señalarse que las investigaciones en didáctica de las matemáticas desarrolladas en las últimas décadas reconocen un interés creciente por precisar el impacto de los recursos (material manipulativo) en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, discutir las limitaciones de su uso y estudiar las posibilidades de su integración en la clase de matemáticas (Post, 1981; Godino y Recio, 1998). En general, se señala la existencia de una importante relación entre el uso de recursos y materiales didácticos y el desempeño de los estudiantes:

El uso de los *manipulativos*, un tipo particular de recursos, se presenta en el marco de las investigaciones realizadas desde las primeras décadas del siglo XX en relación con la formación y evolución de conceptos en los niños (Piaget, 1971; Dewey, 1938; Bruner, 1960; Dienes, 1969). Estas investigaciones sugieren que en algunos momentos los conceptos de los niños evolucionan a través de la interacción directa con el ambiente y que precisamente los manipulativos son vehículos que permiten que esto suceda. La importancia de este tipo de estudios, se asocia al reconocimiento de la posibilidad de que se proporcione un conjunto de evidencia “persuasiva” para los docentes de matemáticas en rela-

estudiantes sino también de los docentes que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

ción con el uso de *materiales manipulativos* en la clase de matemáticas. (Post, 1981)

Este es un asunto complejo, pues también se señala que existen relativamente pocos programas curriculares que incorporan un componente experimental significativo y la mayoría se concentra en el trabajo con textos y guías escolares:

En cuanto concierne a la presencia en las distintas propuestas curriculares de muchos países, prevalece la idea de que el uso de materiales didácticos constituye un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza, particularmente en los primeros niveles de escolaridad. Se suele señalar la influencia profunda que, desde la década de 1980, tienen los trabajos del NCTM sobre esta visión. (Post, 1981)

El estudio de la dimensión curricular se revela como un escenario adecuado para analizar y comprender el desarrollo del pensamiento matemático vinculado a la comprensión y desarrollo de procesos y contextos matemáticos.

Sin embargo dicho análisis está sujeto a ciertas consideraciones ya que el diseño, planificación y desarrollo de una propuesta curricular o de una unidad didáctica no se reduce a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre unos tópicos matemáticos determinados, si no que incorpora otro tipo de informaciones que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen. En este orden de ideas nace la necesidad de una reformulación innovadora y local del currículo de matemáticas, la cual requiere de nuevos organizadores del currículo para los diferentes niveles de concreción. De allí emerge la necesidad de una propuesta denominada *Análisis Didáctico* en la que se tiene como elementos teóricos y metodológicos, articuladores y facilitadores la noción de organizadores del currículo de matemáticas (conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo). (Bedoya, 2011, pp. 2-10)

Ahora bien, también puede señalarse que a finales de la década de 1990, como resultado de la emergencia de nuevos modelos teóricos en Didáctica de las Matemáticas, se plantean nuevos interrogantes en relación con el uso de materiales manipulativos en el estudio de las matemáticas. En algunos casos, estos plantean la necesidad de precisar: (1) la noción de material didáctico y sus tipos; (2) las funciones semióticas e instrumentales de los sistemas de signos; (3) las relaciones entre materiales manipulativos, problemas matemáticos y

situaciones didácticas; (4) la ingeniería didáctica como marco integrador de la investigación científica y la práctica de la enseñanza (Godino y Recio, 1998).

Otra dimensión de análisis en relación con el uso de los recursos en la enseñanza de las matemáticas se relaciona con las funciones asociadas a ellos, particularmente a los materiales manipulativos. Se suele referenciar fundamentalmente las funciones que pueden desempeñar estos materiales dentro del marco más general del papel de los medios de expresión en la actividad matemática, y de manera más general dentro del estudio de las relaciones entre lenguaje y pensamiento (Vigotsky, 1934, citado en Godino y Recio, 1998). A partir de esta aproximación, se plantea que los recursos expresivos desempeñan un papel esencial en el triángulo epistemológico (signo, concepto, objeto), en sus distintas formulaciones, y en las funciones semióticas que se establecen entre dichos elementos (Godino y Recio, 1998).

En general, se considera desde la perspectiva de Brousseau (1983) que:

Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y más precisamente con una situación que hace el conocimiento “interesante”, quiero decir “óptima” en un cierto dominio definido por características numéricas “informacionales” de este conocimiento.

Reiterando que:

[...] en el conocimiento, el hombre y el medio siendo lo que son, es inevitable que esta interacción desemboque a concepciones³ “erróneas”. De todos modos estas concepciones son comandadas por las condiciones de la interacción que uno puede más o menos modificar. Esta declaración tiene importantes consecuencias, en principio para la enseñanza: así, si uno quiere desestabilizar una noción bastante enraizada, será ventajoso que el estudiante pueda invertir suficientemente sus concepciones dentro de situaciones. (Brousseau, 1983)

Esta aproximación permite reconocer importantes consecuencias para la organización de situaciones problemáticas. En efecto, como señala Brousseau, la concepción del aprendizaje que se apoya sobre el estudio del desarrollo de los conocimientos en términos de obstáculos difiere sensiblemente de la concep-

³ En este sentido se guarda la perspectiva que Brousseau propone al respecto: la concepción se constituye en una herramienta para el análisis del saber y el diseño de situaciones didácticas que permitan analizar las actuaciones de los estudiantes en relación con un concepto matemático.

ción clásica de aprendizaje, sobre todo en lo que concierne al rol y a la organización de las situaciones de problemas. En consonancia con esto, se señala que:

Plantear un problema consiste en encontrar una situación con la cual el estudiante va a emprender una sucesión de intercambios relativos a una misma cuestión que forma un “obstáculo” para él, y sobre el cual va a apoyarse para apropiarse, o construir, un conocimiento nuevo. (Brousseau, 2007, p. 6)

Adicionalmente, se considera que el proceso de superar un obstáculo comporta necesariamente una sucesión de interacciones entre el estudiante y el medio que ponen en juego distintos sistemas de representación y pueden a menudo ser interpretados como intercambios de mensajes. Para Brousseau, organizar el franqueamiento de un obstáculo consistirá en proponer una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al estudiante según una dialéctica conveniente. Estas aproximaciones reivindican la importancia de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986)⁴ y la Teoría de la Educación Matemática Realista⁵ desarrollada en el Instituto Freudenthal (Gravemeijer, 1994) como marcos de referencia para el estudio del uso de los recursos en la enseñanza de las matemáticas. En general, sostienen que debe analizarse cuidadosamente el uso de materiales manipulativos tangibles en los primeros niveles de enseñanza y el rol de éstos como apoyo ostensivo para la reflexión matemática.

Así, y desde ciertas propuestas, se señala la importancia del trabajo experimental en matemáticas, de manera que los estudiantes puedan simular las distintas situaciones o experiencias escolares que se presentan en su quehacer. De esta forma emerge la importancia de implementar en las clases de matemáticas la utilización de materiales manipulativos que le permitan al estudiante explo-

⁴ Su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de las Matemáticas es la Teoría de Situaciones Didácticas, una teoría cuyas primeras formulaciones fueron hechas a comienzos de la década de los años setenta. Brousseau propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la **producción** y la **validación** de los conocimientos matemáticos.

⁵ Esta teoría comenzó a gestarse en el Instituto Freudenthal a comienzos de los años setenta. Propone que los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando los conceptos y herramientas matemáticas en situaciones que tengan sentido para ellos. Es decir, que no necesariamente están ligadas a situaciones de la vida real sino a situaciones que pueden *imaginar* pero que son “reales” para ellos.

rar ciertos conceptos de una manera diferente y en este sentido validar o no un conocimiento que se ha puesto en un contexto diferente al habitual. Ahora bien, así se reconoce, desde una perspectiva didáctica, que las concepciones y prácticas escolares en relación con este tipo de prácticas docentes están estrechamente asociadas a las creencias y concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y sobre la naturaleza y el rol otorgado a las mismas en estos procesos. De esta manera, es posible reconocer que para la integración de una propuesta docente que se inspire en la utilización de materiales manipulativos se requiere de un enriquecimiento a nivel de una cultura escolar, que responda al reconocimiento de las expectativas, necesidades, ventajas y desventajas de docentes, estudiantes y directivos de una institución educativa.

PRESENTACIÓN DE LA TESIS

En general, como maestros de matemáticas, la necesidad de reconocer las concepciones, creencias, intereses y necesidades de los estudiantes surge como una manera de poder crear condiciones que les permitan a los estudiantes usar los conocimientos adquiridos para resolver algunos problemas de su entorno escolar y de su entorno cotidiano a medida que avanza su proceso de aprendizaje. Este presupuesto nos lleva a conceder especial valor al estudio de los sistemas de creencias de profesores y estudiantes, dado que éstos inciden en sus comportamientos, ayudan a explicarlos y ofrecen pistas para tratar de modificarlos o mejorarlos. Se acepta que las creencias influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplica la matemática; a su vez, la forma de aprender y utilizar las matemáticas, configuran las creencias y los sistemas de creencias. De aquí que las creencias matemáticas de un individuo y su punto de vista matemático, formen un sistema regulador de su estructura de conocimiento; dentro de este marco actúa y piensa, y a su vez este marco influye fuertemente en su rendimiento. Este es un asunto central en la propuesta, que permite plantear un escenario de indagación e intervención, más amplio en el que se inscriben, el trabajo con materiales y recursos manipulativos, a saber, el **trabajo experimental en las clases de matemáticas**. Ahora bien, como este proceso es social y culturalmente condicionado –y muchas veces– determinado o limitado por la cultura escolar, se requiere un enriquecimiento colectivo que tome en cuenta e integre de manera concertada las expectativas, necesidades, percepciones y creencias de docentes, estudiantes y directivos de una institución educativa.

A partir de estas consideraciones formulamos una propuesta de trabajo que permita abordar desde las perspectivas epistemológica, matemática, didáctica y curricular la integración de recursos y materiales manipulativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el ámbito escolar.

De igual manera, nos proponemos caracterizar algunas de las concepciones y creencias de estudiantes, docentes y directivos de educación básica sobre el aprendizaje de la geometría mediada por recursos manipulativos y su impacto en el diseño y/o rediseño de planes de aula en una institución escolar. También nos proponemos vincular los aportes que esto nos brindaría a una iniciativa de carácter institucional, que nace en el marco del *Laboratorio de Matemáticas*. Esta iniciativa se ha venido implementando de manera experimental, a partir de la elaboración, por parte de los estudiantes, de algunos materiales como: geoplanos, juegos de cartas poligonales, bloques poligonales, dominós poligonales, entre otros. Materiales estos que han sido usados en distintas clases para el fortalecimiento y enriquecimientos de estrategias didácticas enfocadas en la práctica docente, obteniendo resultados que aportan a estrategias que potencian y facilitan el proceso educativo de un conocimiento matemático en particular.

Así, el uso adecuado de materiales manipulativos puede llegar a ser un excelente recurso didáctico para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ya que le da la oportunidad al docente de mejorar su labor pedagógica, y a los estudiantes la opción de transformarse en personas *originales*⁶ junto con sus pares (compañeros, docentes, etc.): constructores del conocimiento, imaginativos, dinámicos, y creadores de ideas.

En consecuencia, es posible afirmar que es a partir de las concepciones que surgen al momento de que los estudiantes son puestos a prueba dentro de las prácticas escolares, como se evidencian las limitaciones teóricas e inclusive, en el plano operativo, un nivel limitado de desempeños. Por esta razón, la formación de los docentes se revela entonces como una alternativa para superar este estado. Para el docente llegar a conocer las concepciones de los estudiantes, podría dar puntos de vista más fundamentados sobre la enseñanza y el aprendizaje de otros conceptos matemáticos en el ámbito escolar. De allí que la mayoría de las dificultades que presentan los estudiantes en su vida es-

⁶ *Originales*, hace referencia al hecho de que los estudiantes se conviertan en personajes propositivos y no sólo sea el maestro quien lo es.

colar, se deben a falencias conceptuales que le impiden apropiarse de nuevos conceptos y/o relacionarlos con otros.

En la medida en que el profesor conozca las concepciones de los estudiantes, propondrá ciertos problemas o situaciones que conduzcan a evidenciar, modificar o completar tales concepciones, de tal manera que éstas se aproximen cada vez más al concepto en cuestión. El estudio de las concepciones es igualmente revelador de la falta de conexión tanto en el plano de la enseñanza como en el curricular de estos conceptos con aspectos de la realidad cotidiana que podría abordarse ampliando los contextos en los cuales se les presenta el concepto a los estudiantes. En general, los aportes y proyecciones de este trabajo busca crear un nivel de comprensión y de compromiso en la comunidad educativa, de tratamientos escolares que superen la manera convencional en que se introducen ciertas temáticas en las clases y que sirva en un futuro para hacer más visible una toma de conciencia en torno a lo que los estudiantes están considerando o no como relevante en su proceso de enseñanza y aprendizaje, el por qué y el sentido del mismo. De esta forma se estaría mejorando la labor docente de forma cualitativa y se estaría dotando a los estudiantes de herramientas que les permitirían interactuar de mejor forma con el medio en el que se encuentren inmersos.

Por otra parte, en un acto de enseñanza el lenguaje es el “medio” que regula la interacción entre los individuos y permite la relación maestro-estudiante y viceversa; por esta razón en el proceso de construcción de un conocimiento se hace necesario reconocer al estudiante como ser pensante, que puede llegar a la apropiación de un conocimiento por la vía de la experimentación, el análisis y la reflexión. Asimismo se hace necesario que durante este proceso el docente tenga una participación activa y significativa, que motive y muestre al estudiante que, en su hacer matemáticas, un objeto matemático puede tener diferentes formas de ser representado o abordado, según la situación o actividad en la que se enmarque. Como lo plantea Bishop (1999): las actividades que se consideran matemáticas son aquellas que producen distintas ideas matemáticas; igualmente plantea que los cimientos del conocimiento matemático en distintas culturas son las que se indican a continuación: contar, localizar medir, dibujar, jugar y explicar. De esta forma se hace pertinente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se hace indispensable que el docente adquiriera conciencia de la necesidad que existe en el aula, de incorporar herramientas didácticas innovadoras para estimular la “creatividad” de sus estudiantes.
- Por otro lado, le permitirá incluir interrogantes a través de actividades por niveles, y trabajar tanto con las necesidades como con las potencialidades de una manera personalizada.

Reconocemos que existen herramientas instructivas convencionales (e.g., la “teoría” acerca de un tema específico sin contexto, la ejemplificación a través de gráficos, etc.) que de igual forma contribuyen en el desarrollo cognitivo del educando. Pero, a diferencia de éstas, mediante el uso del geoplano⁷ se busca despertar el potencial creativo de los estudiantes y obtener resultados trascendentes, que no sólo tendrán implicaciones en las matemáticas sino en otras áreas de estudio. En este sentido, el geoplano, las cartas poligonales, los bloques, etc., se convierten en un recurso didáctico para dirigir el proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría, permitiendo a los estudiantes la verificación de propiedades, la socialización de ideas, la indagación sobre distintas formas, la apropiación de nuevas ideas acerca de distintos objetos, figuras y propiedades geométricas.

CONCLUSIONES

En general, es posible señalar que las actividades con materiales manipulativos se pueden ver como una *actividad humana* que puede potenciar ciertas capacidades humanas que podrían fortalecer y facilitar procesos de enseñanza. Sin embargo, es necesario aclarar que no todos los juegos son significativos desde el punto de vista matemático, ¿Qué los hace significativo? ¿Solamente el hecho de emplear consciente o inconscientemente un conocimiento matemático? Se considera que se debe ir más allá, pues dentro de una actividad significativa que propicie la apropiación de un conocimiento matemático, pueden reconocerse factores que en un futuro llevarían a facilitar la comprensión de un objeto matemático abstracto; por ejemplo, el reconocer las normas, procedimientos estrategias modelos, etc. De igual manera, la implementación de actividades matemáticas fundamentadas con materiales manipulativos requiere de un análisis especial, pues como se pudo notar en los interrogantes

⁷ Se presenta como anexo una de las actividades diseñadas para la utilización del geoplano; está orientada a reforzar los conceptos de perímetro y área.

planteados son muchos los factores que se deben estudiar para ver si en verdad se pueden utilizar en pro de un conocimiento matemático o solamente como algo lúdico que rompe el esquema de una clase magistral.

REFERENCIAS

- Bedoya, E. (2011). *Formación profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento y análisis didáctico*. Documento de trabajo en elaboración, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. (Traducido al castellano como: *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*, por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo, en 1989).
- Brousseau, G. (2007). *Introducción al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Godino, J. y Recio, A. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. En A.M. Machado et al. (Eds.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 117-124). Guimaraes, Portugal: Associação de Professores de Matemática:
- Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.
- Post, T. (1981). The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts. En *Selected issues in mathematics education* (pp. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation.