GEOMETRÍA DINÁMICA: DE LA VISUALIZACIÓN A LA PRUEBA

Daniel Fernández, Elizabeth Montoya Delgadillo
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
danfernandez.ac@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen. La visualización juega un papel importante en el proceso de prueba, no fundamental, pero que cognitivamente contribuye a facilitar la búsqueda de soluciones en una tarea geométrica. En esta investigación se busca entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento geométrico en el aula por medio de la Geometría Dinámica. Se quiere intencionar el tránsito, desde la visualización a la prueba, a través de un diseño de secuencia de enseñanza, realzando este artefacto tecnológico en dicho tránsito y así, finalmente evidenciar una propuesta en los paradigmas geométricos de Kuzniak, apuntando a mejorar la enseñanza de la Geometría por medio de dicha articulación. Las actividades propuestas en el diseño invitan a los estudiantes a la exploración, inferencias, conjeturas, justificaciones, entre otras, logrando así un mayor razonamiento geométrico.

Palabras clave: paradigmas geométricos, visualización, demostración

Abstract. The visualization plays an important role in the testing that contributes not in a very strong way, but making the searching of solutions very easily in a geometric task. The objective in this investigation is to suggest how to promote the geometrical reasoning in the classroom by means of the Dynamic Geometry. By means of a teaching sequence design, the result will be a very close step by step, from visualization to the test itself, showing the evidence of a proposal in the Kuzniak geometrical paradigms, which objective is to improve the teaching of Geometry. The design activities invite students to explorations, inferences, conjectures, justifications, among others, achieving to a better Geometric reasoning.

Key words: geometrical paradigms, visualization, demonstration

Planteamiento del problema

En Chile, el eje temático de geometría es un componente matemático que ocupa un lugar privilegiado en los programas de estudio escolares por su aporte a la formación de los estudiantes. Seguramente cualquier situación geométrica, por elemental que ella sea, permitirá instancias de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con el fin de explicar, probar o demostrar hechos. De aquí se desprende que la geometría es uno de los mejores lugares para dilucidar el papel de la prueba y la demostración en matemáticas.

En nuestro sistema escolar, es común oír a profesores afirmando no darle tiempo a este razonamiento, aludiendo a que se ven tensionado por dedicar tiempo preparando para pruebas nacionales de medición de la calidad de la educación (SIMCE) o pruebas de selección universitaria (PSU) y privilegian otras temáticas de enseñanza. A esto, se agrega que los estudiantes muestran dificultades en el eje temático de geometría, así da cuenta el informe entregado por el Ministerio de Educación de Chile con respecto al informe SIMCE 2010 de los 2° Medios (15-16 años), en donde se evaluó el uso de invariantes en la transformación de figuras y de relaciones proporcionales entre trazos en triángulos y cuadriláteros; el conocimiento de las propiedades de los ángulos internos de la circunferencia y de los criterios de congruencia de triángulos; en este informe para docentes y directivos, se explicita el análisis de 3 preguntas de la prueba de matemática de las cuales una de ellas es de geometría, y donde solo un 38% de los estudiantes del país responde correctamente, a diferencia de las otras dos preguntas de algebra donde el 48% y el 58% de los estudiantes responde correctamente, esto confirma un problema en la geometría de los estudiantes del país.

En el ámbito de todo lo anteriormente expuesto, especial importancia toman las experiencias tales como la construcción de modelos geométricos y su relación con la percepción visual, la representación se encuentra en estrecha conexión con el potencial humano de visualizar y la búsqueda de mecanismos de argumentación para lograr justificar afirmaciones (asociado al razonamiento discursivo). Según Mammana y Villani (1998), el aspecto visual en la geometría es predominante, recalcan que desde las tablillas babilónicas a los papiros egipcios, cuando se trató de escribir un problema geométrico, se inició la tradición de mezclar en las producciones escritas imágenes, símbolos especiales y el lenguaje natural para comunicar ideas. La visualización juega un papel importante en el proceso de prueba, no fundamental, pero que cognitivamente contribuye a facilitar la búsqueda de soluciones o alternativas en los pasos del razonamiento donde una articulación de estos procesos cognitivos es fundamental (Duval, 2005). El uso de tecnología, por ejemplo, permite al estudiante la manipulación del entorno geométrico, ampliando su experiencia y validando enunciados, algo muy difícil de lograr al principio sin la mediación de un software. Por otro lado, las TIC ayudan a los estudiantes en sus conjeturas, pero no así en la demostración, suponemos que una inapropiada instrumentalización (Artigue, 2002) podría ocasionar incluso obstáculos en la demostración.

Proponemos que el alumno debe sentir la necesitad de demostrar, y que la tecnología como recurso a través de la visualización el alumno puede quedar convencido de que no es necesario demostrar, pues el dibujo lo deja claro.

Así la visualización, ligada a los significados o imágenes (conceptualización) y la percepción ligada al mundo de los sentidos, ayudan para entender un problema, pero se debe tener en cuenta el no abuso, por la convicción que puede ocasionar en los estudiantes para no llevar a cabo el proceso de *prueba* en el sentido de Balacheff (1987), o más explícitamente una demostración. Del razonamiento, según Balacheff, surgen *explicaciones* que son aceptadas o no por una comunidad, aquellas explicaciones que son aceptadas por la comunidad (regidas por un contrato y "*milieu*") conforman las *pruebas*, en las cuales se distingue las *pruebas pragmáticas* y las *pruebas intelectuales* y la respectiva tipología. A este esquema de trabajo es lo que nosotros entenderemos por *proceso de prueba,* y una demostración es una prueba del tipo intelectual.

En este afán, proponemos en esta investigación entregar una sugerencia de cómo promover el razonamiento de validación en el aula por medio de la Geometría Dinámica, verificando así el papel heurístico de la tecnología como artefacto en el sentido de Rabardel (1995) que interfiere positivamente en una tarea geométrica propuesta a los estudiantes.

Objetivos de la investigación

- Indagar en los referentes teóricos que propician el tránsito en un plano cognitivo, desde la "visualización" a la "prueba", realzando este artefacto tecnológico, Geometría Dinámica, en dicho tránsito.
- Proponer una situación de enseñanza en donde se provoque el tránsito de la visualización a la prueba, promoviendo la interacción entre los paradigmas geométricos.

Marco teórico: Paradigmas geométricos y espacio de trabajo geométrico

En general, la palabra *paradigma* designa el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparten los miembros de una comunidad. Cuando se habla de comunidades científicas, se puede decir que un paradigma corresponde a realizaciones universalmente reconocidas en un tiempo y que entrega modelos de problemas y soluciones a dichas comunidades.

Ahora bien, en el ámbito de la enseñanza, la noción de paradigma geométrico se entenderá por, "la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesta en juego", (Montoya, 2010, p. 25). Esta concepción acoge tres componentes que le dan sustento: la primera de carácter cognitiva, en el sentido de Gonseth, donde plantea que los modos de pensamiento; intuición, experiencia y el razonamiento deductivo serán la base del geómetra para enfrentar una determinada tarea. La segunda componente es de carácter filosófica, en el sentido de Kuhn asociada a una concepción de paradigma donde la validación de los conocimientos construidos hace relación con las verdades y estrategias compartidas por la comunidad escolar según su percepción de la realidad; por último la tercera componente es de carácter epistemológico que hace referencia a la ubicación del modelo geométrico.

Estas tres componentes permiten identificar tres paradigmas geométricos que coexisten en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría, a saber, Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Geometría Axiomática Formalista (GIII).

Geometría Natural (GI)

En esta geometría los objetos geométricos son percibidos en la abstracción de la realidad, la intuición juega el papel de calificar si el dibujo es o no representativo del objeto geométrico, es así como la visualización me permite evaluar si se logran concebir imágenes mentales. En este paradigma los medios de prueba son de tipo material, utilizando artefacto para la manipulación de los objetos, se permiten las mediciones con instrumentos, trabajo de pliegues y/o cortes, etc. La experimentación y la deducción actúan sobre la representación de los objetos geométricos, en la interfase de los artefactos, visualización y percepción. En cuanto al modelo geométrico está ligado al mundo real, cuando se habla de real, en esta teoría, no se refiere al cotidiano, si no a lo que existe. La geometría euclidiana está presente sólo en forma local, puesto que el razonamiento de validación aquí no exige ni se puede usar la axiomática.

Geometría Axiomática Natural (GII)

La representación de los objetos geométricos cambia con respecto al paradigma anterior, ya no se habla de dibujo sino de figuras geométricas, donde ella describe al objeto por medio de una propiedad; sin embargo, la visualización aún es fuerte, pero como representación inicial puesto que el razonamiento de validación se funda en las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático en el modelo geométrico, puesto en escena, es decir, propiedades, definiciones, etc. En este paradigma al abordar un problema geométrico se acepta el dibujo sólo inicialmente para extraer la información o la utilización de artefactos en la construcción, pero no como medio de prueba.

Geometría Axiomática Formalista (GIII)

En este paradigma, los objetos geométricos provienen de una axiomática que contiene todo el formalismo riguroso del modelo, el dibujo aquí podría guiar la intuición del geómetra, pero no debe ser usado para probar, pues el razonamiento de validación en esta geometría es exclusivamente a través del sistema axiomático formal, por tal razón los artefactos son instrumentos puramente teóricos. En GIII, surge la aparición de la Geometría de Euclides, incluso las Geometrías no Euclidianas, el trabajo ya no es a nivel local en la resolución de los problemas geométricos.

En ocasiones, es posible observar una transición entre los paradigmas, los más factibles entre GI y GII, y entre GII y GIII, pero no es tan evidente el tránsito de GI a GIII. Lo anterior no quiere decir que los paradigmas geométricos sea un marco impreciso, sino abierto a la diversa gama de problemas donde si puede existir una transición, pero en otros el paradigma es claro.

Lo importante es la legitimidad de cada paradigma, cada uno de ellos se debe respetar, evitar el juicio de valor, no se trata de enjuiciar sino buscar el fundamento a partir de la teoría.

En cada paradigma existe un espacio de trabajo geométrico, que corresponde a un ambiente organizado por y para el geómetra mediante la articulación de tres componentes, a saber: referencial teórico, el espacio local y real y los artefactos.

- La componente Referencial Teórico, corresponde al conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas y que finalmente determinan el modelo geométrico.
- La componente Espacio Local y Real, es la concepción por el individuo del modelo geométrico. El aspecto local se refiere a que el individuo trabaja con una parte del modelo y, el aspecto real se refiere a que los objetos son el resultante de la abstracción del modelo a partir de la realidad.
- La componente Artefactos, corresponde a todo lo que permite al geómetra manipular objetos geométricos con el objetivo de abordar un problema, en concordancia con su modelo geométrico.

Estas componentes del Espacio de Trabajo Geométrico se hacen más visibles dependiendo del paradigma geométrico, por ejemplo el referencial teórico tendrá más presencia a medida que el estudiante transite hacia GIII, los artefactos por su parte son evidentes en GI (regla, compás, doblar, cortar, etc.), pero a medida que se transita a GIII se transforman en instrumentos netamente teóricos.

Si nos enfocamos ahora desde un punto de vista cognitivo, hay procesos asociados al Espacio de Trabajo Geométrico como lo son: *visualización, construcción y prueba,* relacionándose con las componentes del ETG conformando un espacio de trabajo epistemológico y cognitivo. El proceso cognitivo de visualización aporta en el proceso de construcción y vice versa, a la vez, el proceso cognitivo de construcción aporta en el proceso de prueba y viceversa, pero el proceso de visualización aporta en el sentido que se relacionan, que se emplea uno cuando se hace el otro, en la prueba pero no podemos asegurar que la prueba aporta en el proceso cognitivo de la visualización (Montoya, 2010).

Metodología

Desde los objetivos de Investigación, ha sido pertinente un diseño metodológico en el contexto de estudio de caso. Se refiere a “caso” en la medida que se analizan realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas y con profundidad en casos particulares.

La situación que se implementó en la investigación corresponde a la aplicación de un diseño de enseñanza a estudiantes de una institución de educación secundaria chilena. La población objetivo corresponde a estudiantes de 15-16 años de un establecimiento municipal al cuál se les realizó la invitación extendida a sus 30 estudiantes para desarrollar este diseño, de los cuales un tercio de ellos accedió y aceptó participar en dicha aplicación, es decir, fueron 10 estudiantes voluntarios los que finalmente fueron la muestra de la investigación. La toma de datos consistió en la aplicación del diseño la segunda semana de junio del año 2012, el cual respondió cada uno de los 10 estudiantes de manera individual en jornada alterna a sus actividades curriculares normales, la que fue aplicada en tres sesiones de 90 minutos cada una en el laboratorio de computación del mismo establecimiento, pues éste espacio era primordial para que se llevará a cabo la aplicación. El instrumento que se aplicó corresponde a un diseño con una actividad inicial o de apresto y cuatro actividades abiertas.

A continuación se describen algunos de los detalles más importantes de éste, a saber:

La actividad de apresto tiene como objetivo diagnosticar el nivel de conocimiento del contenido de congruencia de triángulos de los estudiantes a los que se les aplicará el diseño, pues esto interferirá de alguna manera en el proceso y más aún en el análisis de los resultados. Se debe destacar que el real objetivo de la investigación no es construir el saber de congruencia de triángulos, sino proporcionar a los estudiantes otras aristas de razonamiento geométrico, como lo es la prueba por medio de la visualización; ahora bien, es necesario tomar un contenido que sirva como artefacto teórico para lograr el razonamiento y tránsito antes expuesto y con ese fin se escoge congruencia, pero podría haber sido cualquier otro saber que fuera herramienta para esto.

La actividad uno tiene la intención de indagar la aprehensión de los estudiantes con el artefacto, en este caso la herramienta del software geométrico CABRI II, la que será fundamental en el diseño; en particular se les pide a los estudiantes que construyan un triángulo isósceles con los conocimientos que tengan, si no pueden realizarlo se les entrega una guía para que lo construyan. La actividad dos y tres se centra en el real objetivo de esta investigación, es decir, en el estudio del tránsito de los polos del plano cognitivo del espacio de trabajo geométrico, de la visualización a la prueba (demostración), y la incidencia del artefacto de geometría dinámica en dicho tránsito.

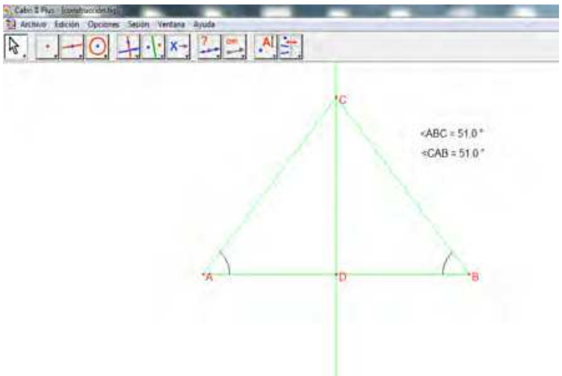

Figura 1. Actividad en Cabri desarrollada por un estudiante comprobando que en un triángulo isósceles los ángulos basales son congruentes

Analiza y determina el **orden** lógico que debería llevar la demostración de este teorema, evalúa que elementos que visualizaste en tu construcción son necesarios para la demostración y que elementos no lo son.

En el paréntesis ( ) enumera de menor a mayor el "orden" de los pasos, y escribe una "X" para afirmar que el paso NO es parte del argumento.

Sabemos que:

Entonces	(4)
m<CEF=m<CAB (por definición de ángulos alternos internos)	(X)
AC=BC (por definición de triangulo isósceles)	(1)
CD=CD	(3)
Por lo tanto m<CAB=m<ABC.	(6)
Por criterio LAL concluimos que el triangulo ADC es congruente al triangulo BDC	(5)
m<DCA=m<BCD (por propiedad de bisectriz)	(2)

Figura 2. Actividad planteada para que el estudiante se aproxime por medio de la actividad anterior a la concepción de demostración utilizando en este caso el objeto matemático, congruencia de triángulos

La actividad cuatro y última, pone en evidencia el tránsito anteriormente expuesto, pero además se incorpora el hecho de que los estudiantes deben redactar el teorema en juego, que se les propone por medio de una construcción en el software, para posteriormente justificarlo por medio de la demostración per sé.

El instrumento aplicado a los estudiantes fue sometido a diversas instancias como co-evaluación por un grupo de estudiantes tesistas de magister en didáctica con investigaciones relacionadas y no relacionadas con la investigación, la evaluación de la docente guía de esta investigación y la revisión de las actividades por dos docentes de matemática de educación secundaria. En consecuencia, la versión final del diseño de enseñanza es fruto de una reestructuración y reformulación de las actividades que buscaban secuencialmente intencionar el tránsito del que se hablaba anteriormente. Se realiza un análisis preliminar (análisis a priori) de las actividades con las respuestas expertas y las posibles respuestas de los estudiantes, y luego de la aplicación se realiza un análisis con los resultados obtenidos (análisis a posteriori).

Resultados y conclusiones

Si bien durante la aplicación se pudo observar que no era una tarea fácil de abordar para los estudiantes, pues inicialmente les resultaba difícil esta abstracción de alcanzar la concepción demostración, durante y en el avance de las actividades comenzaron a realizar inferencias y conjeturas que los llevaron al acercamiento de la rigurosidad, incluso en la escritura de las justificaciones utilizadas para argumentar por medio de los criterios de congruencias las propiedades o teoremas en juego. Así se puede evidenciar un tránsito en los paradigmas geométricos, pues la primera forma de abordar los problemas, fue utilizando el software para medir y corroborar que la propiedad se cumplía, posteriormente justificaban sus construcciones y elementos de ella por medio de definiciones y propiedades, pero aún necesitando el dibujo de la construcción. Finalmente hubo un grupo de 3 estudiantes que logró formalizar con herramientas teóricas la veracidad de los distintos teoremas, alcanzando así una cercanía a GIII, es decir, con la secuencia propuesta se evidencia no sólo el transito en los polos del plano cognitivo de la teoría (Espacio de trabajo geométrico), sino también el tránsito en los paradigmas. Se debe destacar que la Geometría Dinámica, en este caso, el software CABRI II juega un rol de real importancia, pues es éste, quién ayuda y motiva a los estudiantes a explorar, inferir, conjeturar, justificar, etc. Si bien, este es sólo el artefacto por el cual se desarrolla el tránsito de la visualización a la prueba, es quien cumple el rol de convencer a los estudiantes de la veracidad de las propiedades puestas en juego en el diseño propuesto, en particular, por medio de la percepción visual ellos identifican los elementos necesarios para la construcción utilizando el modelo teórico como referente en sus posteriores justificaciones.

Como consideración final, se debe destacar el poder heurístico de la Geometría Dinámica para lograr este tránsito de la Visualización a la Prueba, en estudiantes de educación secundaria. No tan sólo se debe utilizar como herramienta por ser entretenida o atractiva para los estudiantes, sino indagar en las riquezas que puede entregar, por ejemplo, para que ellos logren pasar por razonamientos tan abstractos como lo son la demostración en matemática, particularmente en este caso en la geometría, y donde hoy los programas de estudio vigentes ya la incorporan, pero que con muy poca frecuencia se encuentra presente en las aulas de matemática. Pues bien, como aporte a la matemática educativa, es que surgió esta investigación y la creación del diseño de enseñanza que provoca esta nueva concepción de demostración en la construcción del conocimiento geométrico.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemática. *Revista Epsilon*, *26*, 15-30.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives.10*, 5-53.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: Irem Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Mammana, C. & Villani V. (1998). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. *Kluwer Academic Publishers*, 340-341.

Montoya E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Thèse pour obtenir le titre de Docteur. Paris : Université Paris Diderot-Paris 7.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.