NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 113–134

Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología[1]

Josefa Perdomo Díaz (Universidad de La Laguna)

Fecha de recepción: 15 de julio de 2011
Fecha de aceptación: 30 de septiembre de 2011

Resumen

En este artículo se presenta parte de una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Se distinguen dos partes principales: en primer lugar se muestra el análisis de la forma en que un grupo de estudiantes que han recibido una formación tradicional del concepto utilizan sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO, para continuar con el diseño e implementación de un Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO en un ambiente de resolución de problemas, haciendo uso de TIC (calculadora Voyage™200). Finalmente se analiza el papel que la resolución de problemas, la tecnología y la interacción jugaron en el proceso de aprendizaje y se describen los aspectos cognitivos observados en el desarrollo de este Módulo.

Palabras clave Ecuaciones diferenciales ordinarias, resolución de problemas, tecnología, interacción.

Abstract

In this article we present a part of a research related with ordinary differential equations (ODE) teaching and learning processes. Two main parts are distinguished: in first place we show an analysis of how a group of students who received a traditional training of the concept use his mathematical skills to solve problems and answer questions related to ODE. The paper continues with the design and implementation of a teaching module to introduce ODE by creating an environment of problem solving, using TIC (Voyage™200 calculator). Finally the role that problem solving, technology and interaction played in the learning process is analyzed and cognitive aspects observed in the development of this module are described.

Keywords Ordinary differential equations, problem solving, technology, interaction.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en diversos currículos del nivel universitario, por ejemplo las licenciaturas o los grados en Matemáticas, Física, Química, Económicas... La razón de su importancia es clara: las ecuaciones diferenciales permiten describir fenómenos de variación y por tanto resultan de utilidad para modelizar, analizar y resolver numerosos problemas que surgen en diferentes contextos.

[1] Este artículo está basado en la memoria de Tesis Doctoral realizada por la autora, dirigida por los Doctores Matías Camacho Machín (Universidad de La Laguna, Tenerife) y L. Manuel Santos Trigo (Cinvestav-IPN, México) y presentada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, el 3 de diciembre de 2010.

La investigación que se presenta en este artículo surge como respuesta a la preocupación mostrada por diversos profesores universitarios que han enseñado ecuaciones diferenciales durante su trayectoria profesional, al observar que sus estudiantes tenían dificultades para resolver problemas presentados en un contexto no matemático.

El trabajo se realizó en dos fases. La pregunta de investigación que guía la primera de las fases es:

Pregunta de investigación 1: *¿Cómo utilizan los estudiantes sus conocimientos matemáticos para resolver problemas en los que intervienen conceptos y significados relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias?*

En esta primera fase de la investigación el objetivo es indagar acerca de la red de significados que un grupo de estudiantes, que están en pleno proceso de aprendizaje de las EDO, ha construido en torno a dicho concepto y la forma en que lo utilizan para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las ecuaciones diferenciales, sus soluciones y el campo de direcciones asociado a una ecuación particular. En esta primera etapa participaron alumnos de las licenciaturas en Física y Matemáticas de la Universidad de La Laguna (España) que habían recibido una enseñanza del concepto que denominaremos tradicional, centrada en la definición formal del concepto, la posterior clasificación de las ecuaciones y el uso de métodos algebraicos de resolución.

Los datos obtenidos mostraron cierta tendencia de los participantes a centrarse en la búsqueda de algoritmos de resolución para dar respuesta a las actividades propuestas, presentando un sistema débil de conexiones entre distintas interpretaciones del concepto de derivada y su relación con el concepto de ecuación diferencial ordinaria, además de ciertas carencias en cuanto a habilidades y capacidades esenciales para el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos, como reflexionar, representar, abstraer o generalizar.

La segunda fase de la investigación surge como respuesta a los resultados obtenidos en la primera fase y en ella nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

Pregunta de investigación 2: *¿Cómo diseñar y desarrollar en el aula una ruta de enseñanza y aprendizaje, basada en la resolución de problemas, que promueva la construcción del concepto de EDO de forma integrada con el concepto de derivada?*

Pregunta de investigación 3: *¿Qué procesos cognitivos desarrollarán los estudiantes haciendo uso de un modelo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias basado en la resolución de problemas?*

Pregunta de investigación 4: *¿Qué influencia tendrán los tres elementos introducidos en el proceso de aprendizaje (resolución de problemas, tecnología e interacción entre estudiantes)?*

De esta forma, la segunda fase de la investigación comienza con el diseño y la implementación de un Módulo de Enseñanza para la introducción del concepto de EDO, tomando como punto de partida diferentes significados asociados al concepto de derivada de una función (Thurston, 1994) y conjugando tres elementos: la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción entre alumnos. Este Módulo de Enseñanza se diseñó con el objetivo de introducir el concepto de EDO en un primer curso de la licenciatura en Química de la Universidad de La Laguna y se implementó con un grupo de alumnos que ya habían estudiado cálculo en una y varias variables.

A lo largo de este artículo describiremos las actividades que se propusieron a los estudiantes de cada una de las fases de investigación y mostraremos parte de las respuestas a las preguntas de investigación formulada. Previamente, presentaremos algunos resultados de otras investigaciones que están directamente relacionados con el problema de investigación tratado en este artículo.

2. Antecedentes de la investigación

Las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales se pueden dividir en dos grandes grupos: aquellas centradas en la detección y análisis de dificultades en el proceso de aprendizaje y las que proponen modelos de enseñanza alternativos al modo tradicional, basado en el tratamiento algebraico del concepto, la clasificación de las ecuaciones en diferentes tipos y el uso de métodos algebraicos de resolución específicos para cada tipo de ecuación.

La mayoría de las investigaciones centradas en el aprendizaje de las EDO están relacionadas con el concepto de solución, en particular, las soluciones de equilibrio. Distintos trabajos señalan este concepto como elemento que provoca la aparición de dificultades en el tratamiento de las EDO, considerando dos posibles causas: (i) el hecho de que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos y (ii) el uso de métodos de resolución o de cálculo en el que se consideran las variables como símbolos que se deben manipular, sin tomar en cuenta su significado (p. e. Rasmussen, 2001; Zandieh y McDonald, 1999).

Rasmussen y Whitehead (2003) realizaron una revisión de distintos trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, identificando distintas estrategias, dificultades y formas de comprender que muestran los estudiantes en relación con la creación, interpretación y coordinación de distintos sistemas de representación (incluyendo diagramas de fase y de bifurcación) y la formulación de predicciones justificadas acerca del comportamiento de las funciones solución. En una investigación más reciente, Guerrero, Camacho y Mejía (2010) analizan la forma en que los estudiantes utilizan sus conocimientos matemáticos para representar el campo de direcciones asociado a una EDO, observando que no logran articular correctamente los sistemas de representación gráfico y algebraico, lo que les dificulta el análisis de las soluciones de una EDO cuando no disponen de su expresión algebraica.

Ante estas dificultades han surgido distintas propuestas de modificación del modelo de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera de ellas fue formulada por Artigue (1987) y su característica principal es que potencia el uso de los sistemas de representación gráfico y algebraico para la enseñanza de las EDO. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes que participaron en ella tuvieron éxito en la resolución de determinadas actividades en las que se simultaneaban los dos registros (p.e. relacionar diferentes ecuaciones diferenciales con las gráficas de distintas funciones o estudiar la monotonía de las soluciones analizando el signo de la primera derivada), sin embargo presentaron dificultades con el tratamiento gráfico de las funciones. Habre (2000) y Guerra-Cáceres (2003) comprobaron que, aún considerando distintos sistemas de representación en el tratamiento de las EDO, los estudiantes siguen relacionando el concepto con un conjunto de estrategias para la clasificación de las ecuaciones y una serie de métodos algebraicos para la resolución de cada uno de los tipos de EDO.

Otro modelo de enseñanza propuesto en el ámbito de la investigación en Educación Matemática es el realizado en el marco del proyecto *Inquiry-Oriented Differential Equation* (IO-DE), en el que se interpreta el concepto de EDO como una expresión que indica la evolución de una función en el tiempo (Rasmussen y Kwon, 2007). Los estudiantes que participan en este proyecto trabajan en un ambiente en el que se promueve la discusión, el planteamiento de conjeturas, la justificación de las ideas y la creación de métodos de resolución propios (Rasmussen y Blumenfeld, 2007). Distintas investigaciones han mostrado que estos estudiantes obtienen mejores resultados que otros grupos que no participaron en este proyecto, sobre todo en actividades relacionadas con la modelización y el análisis del comportamiento de las soluciones de una ecuación (Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle y Burtch, 2006), además de tener una mayor capacidad de retención de sus conocimientos y habilidades matemáticas (Kwon, Rasmussen y Allen, 2005).

En este artículo se conjugan los dos tipos de investigación mencionados: por una parte se analiza la red de significados que un grupo de estudiantes ha construido en torno al concepto de ecuación diferencial ordinaria y cómo los utilizan para resolver problemas (sección 3) y, posteriormente, se diseña e implementa un Módulo de Enseñanza en el que se introduce el concepto de EDO en un primer curso de universidad, en un ambiente de resolución de problemas en el que se promueve la interacción entre estudiantes y el uso de tecnología (sección 4).

3. Red de significados construida en torno al concepto de EDO en un ambiente de enseñanza tradicional

Para analizar, en relación con la primera pregunta de investigación, qué conocimientos matemáticos utilizan los estudiantes para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las ecuaciones diferenciales ordinarias, de qué forma lo hacen y cómo interpretan y emplean los conceptos de solución y campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial, se diseñaron un cuestionario y unas entrevistas dirigidas a un grupo de alumnos que estaban en pleno proceso de aprendizaje del concepto.

En esta sección describiremos el contexto en que se desarrolló esta primera etapa de la investigación, los estudiantes con los que se realizó y los instrumentos que se utilizaron para recopilar la información necesaria.

3.1 Participantes y contexto

En esta fase de la investigación participaron 21 estudiantes de las licenciaturas en Física y Matemáticas que estaban tomando su primer curso de ecuaciones diferenciales. En ambas licenciaturas, la introducción de las EDO se realizaba partiendo de la definición formal del concepto y continuando con actividades centradas en la clasificación de las ecuaciones en distintos tipos y la presentación de métodos algebraicos específicos para resolver cada uno de esos tipos. Los problemas con un contexto no matemático (los llamados problemas de aplicaciones) aparecían al final de cada tópico y, en general, se trataba de actividades similares a otras resueltas previamente por el profesor de la materia.

Los profesores de cada uno de los grupos eran completamente ajenos a la investigación. Las sesiones de clase eran de tipo magistral, jugando el papel central el profesor; a los estudiantes se les entregaba una serie de actividades y problemas que debían resolver y que servían de preparación para el examen final de la materia. En general, durante el proceso de enseñanza, no se hizo uso de ningún tipo de herramienta tecnológica. En el momento que se realizó esta primera fase de la investigación estos estudiantes habían cubierto aproximadamente la mitad de los contenidos de la asignatura, lo que incluye las EDO de primer orden de variables separadas, homogéneas, lineales, de Bernouilli, Ricatti y las ecuaciones exactas.

3.2 El cuestionario y las entrevistas

El interés principal de esta fase de la investigación era analizar la red de significados y conceptos matemáticos que los estudiantes utilizaban para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las ecuaciones diferenciales ordinarias, sus soluciones y el campo de direcciones asociado a una ecuación particular. Para ello se diseñaron un cuestionario y una entrevista basada en tareas (Goldin, 2000) que nos permitieran indagar en los recursos utilizados por los estudiantes y dar respuesta a la pregunta de investigación correspondiente a esta primera etapa.

El cuestionario consta de once actividades (entre preguntas y problemas) que provienen de diferentes fuentes[2]: libros de texto, trabajos de investigación relacionados con el nuestro (Brodetsky, 1919;1920; Habre, 2000) y otras tareas que fueron diseñadas por el equipo de investigación para alcanzar algunos objetivos concretos.

El diseño de las entrevistas se realizó a partir de un primer análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario, en el que se detectaron ciertos patrones de comportamiento en los que era necesario profundizar. En las entrevistas se utilizaron algunas de las preguntas del cuestionario y se incluyeron otras cuatro (Tabla 1). En total, en esta fase de la investigación se emplearon quince actividades, que pueden consultarse en Perdomo-Díaz (2010)[3], donde también se incluye el escenario en que se usaron (cuestionario, entrevista o ambos) así como los objetivos que se perseguían con la inclusión de cada una de ellas.

Pregunta	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15
Cuestionario															
Entrevista															

Tabla 1. Escenario en que se utilizaron cada una de las 15 preguntas de la primera fase

Las actividades propuestas a los estudiantes se clasificaron en cuatro tipos, de cada uno de los cuales mostramos un ejemplo a continuación. En esos ejemplos podrá observarse que, excepto en las actividades relacionadas con el concepto de solución de una EDO, las ecuaciones diferenciales planteadas pueden ser resueltas sin el conocimiento de métodos específicos de resolución de ecuaciones diferenciales. Se tomó la decisión de que así fuera con el objetivo de poder observar los recursos que los estudiantes utilizaban para resolver los problemas, sin que el desconocimiento o el olvido de los métodos de resolución supusieran un impedimento al proceso de solución.

Actividades de tipo 1: Requieren del conocimiento del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria. Se trata de comprobar si una expresión algebraica es solución particular o general de una EDO o utilizar el hecho de que lo sea y en analizar algunas propiedades generales de las soluciones de una ecuación en función de los términos de la misma (P3, P4, P5 y P11).

[2] El cuestionario completo puede consultarse en Camacho, Perdomo y Santos-Trigo (2007).

[3] Pendiente de publicación. Puede consultarse en: http://dl.dropbox.com/u/26255014/JosefaPerdomo-TESIS.pdf

P3. Contesta, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) La función $y = e^{\int e^{t^2} dt}$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dt} = 4e^{t^2}y$

(b) Las funciones $y = f(x)$ que cumplen que $-x^3 + 3y - y^3 = C$ son soluciones de la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$

Actividades de tipo 2: Su resolución se puede abordar haciendo uso de conocimientos matemáticos estudiados con anterioridad o empleando métodos algebraicos sencillos (P1, P2 y P12). Conllevan la representación gráfica de funciones elementales, pero no se ven involucrados ni la construcción o interpretación del campo de direcciones ni la interpretación de datos desde y hacia un contexto matemático. En estas actividades se pide a los estudiantes representar gráficamente algunas soluciones de determinadas ecuaciones que pueden ser clasificadas como de variables separadas pero que también pueden resolverse utilizando únicamente el concepto de derivada de una función.

P1. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{dy}{dx} = 0; \quad x \in [0, 2]$

b) $\frac{dy}{dx} = cosx$

Actividades de tipo 3: Cuestiones para cuya completa resolución es necesaria la representación y/o interpretación del campo de direcciones asociado a una EDO (P6, P8, P10, P14 y P15). En algunas de estas actividades se trata de que los estudiantes representen el campo de direcciones asociado a determinadas EDO y una solución particular; en otras, los alumnos deben interpretar la información dada por un campo de direcciones ya representado.

P6. Resuelve la ecuación diferencial $y'(t) = \frac{1}{t}$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $t = -1$.

Actividades de tipo 4: Preguntas en las que es necesario interpretar información proporcionada en términos algebraicos o gráficos, en un contexto o viceversa (P7, P9 y P13). Se trata de establecer relaciones entre el contexto matemático y contextos no matemáticos.

P7. Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = K, \ K>0.$$

Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

A continuación resumiremos brevemente los aspectos más relevantes observados en las respuestas de los estudiantes a las preguntas del cuestionario y las entrevistas.

3.3 Características principales observadas en las respuestas de los estudiantes

Un primer análisis de las respuestas de los estudiantes de Física y Matemáticas al cuestionario permitió observar que no existían diferencias que justificaran la presentación de los resultados de ambos grupos por separado (Camacho y Perdomo, 2005a; 2005b). Por tanto, las observaciones presentadas en esta sección hacen referencia al conjunto de los 21 participantes, sin distinguir entre aquellos que estudiaban la licenciatura en Física o en Matemáticas.

En relación con el conjunto de soluciones de una EDO, se pueden considerar dos procesos asociados a dicho concepto (Raychadhuri, 2008): el proceso de definición, que consiste en derivar la expresión de la función candidata a solución y sustituir la expresión obtenida en la ecuación, y el proceso de generación, por el que se obtiene la expresión de las soluciones a partir de la resolución de la ecuación.

En las respuestas de los alumnos a las preguntas de Tipo 1 se observó que la mayoría consideraba únicamente uno de estos procesos, los estudiantes que trataban de responder a alguna de las cuestiones con uno de los métodos (derivando ó resolviendo la EDO) y no lo conseguían, no trataban de hacerlo empleando el otro proceso válido, mostrando así limitaciones en cuanto a heurísticas y una construcción débil del concepto de solución de una ecuación diferencial.

En cuanto a la interpretación y la construcción del campo de direcciones asociado a una EDO (actividades de tipo 3), se constató que la mayoría de los participantes tenían dificultades con estos procesos y no relacionaban el concepto de campo de direcciones con la conexión que existe entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto. Más de la mitad de los estudiantes no responde a los problemas de Tipo 3, aún cuando han estudiado los elementos necesarios para abordar este tipo de cuestiones.

En líneas generales, la tendencia de los alumnos es buscar un algoritmo que les permita resolver las ecuaciones presentes en cada actividad. La tercera parte de los estudiantes no utiliza el concepto de derivada o significados asociados al mismo para analizar y responder a cuestiones relacionadas con las EDO. La siguiente imagen (Figura 1) muestra un ejemplo de cómo un estudiante utiliza el método de separación de variables para obtener las soluciones de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$.

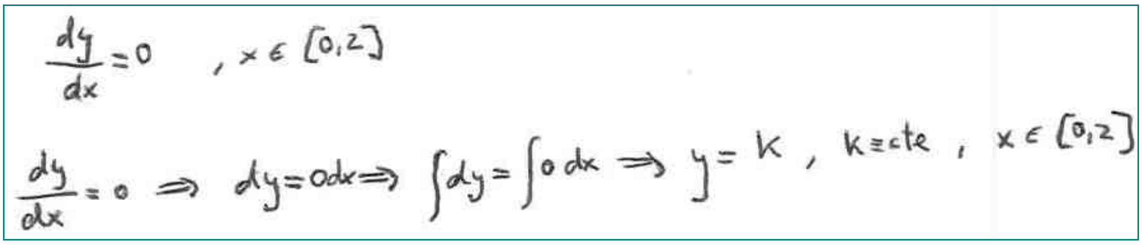


Figura 1. Respuesta de Jordan que muestra su tendencia al uso de algoritmos de resolución

En cuanto a los problemas planteados en un contexto no matemático (Tipo 4), pudimos observar que un número considerable de estudiantes no respondía a este tipo de actividades y que las respuestas de otros alumnos presentaban características diferentes a las mostradas en otro tipo de actividades. Por ejemplo, en la siguiente imagen incluimos las respuestas de Edna a tres preguntas del cuestionario clasificadas en grupos diferentes (Tipo 2, Tipo 3 y Tipo 4, respectivamente). En ella puede observarse que plantea las dos primeras ecuaciones como problemas de valores iniciales y utiliza una expresión general para las soluciones de las EDO de primer orden lineales, mientras que en el problema P7, cuyo enunciado hace referencia a una población, hace uso de sus conocimientos acerca de la derivada de una función, cometiendo el error de no considerar la constante de integración correspondiente, lo que le hace resolver el problema de manera incorrecta.

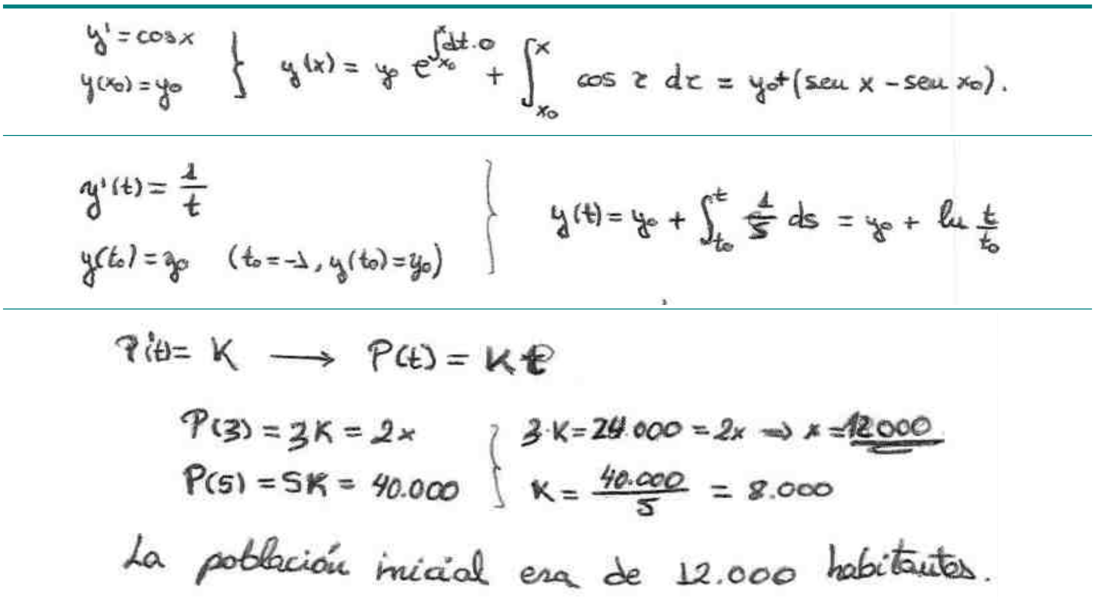


Figura 2. Respuestas de Edna a las preguntas P1b, P6 y P7, respectivamente

En resumen, los resultados de esta primera fase de la investigación reflejaron que, con una enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias basada en su clasificación y resolución algebraica, puede que los estudiantes consigan disponer de los recursos conceptuales necesarios para resolver los problemas planteados en el aula (derivación, integración, algoritmos de resolución de distintos tipos de EDO...) pero no acceden a ellos ni los utilizan de manera eficiente ante situaciones a las que no se han enfrentado con anterioridad.

El aprendizaje de conceptos matemáticos requiere que los estudiantes desarrollen estrategias y habilidades para resolver problemas en distintos contextos, reflexionando, seleccionando y discriminando, de su catálogo de recursos, las herramientas necesarias en cada momento (Kilpatrick et al., 2009). El análisis que se acaba de mostrar refleja que los estudiantes no han logrado desarrollar estas competencias.

4. Diseño e implementación de un Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO en un ambiente de resolución de problemas

El objetivo principal de la segunda fase de la investigación era tratar de dar respuesta a esas dificultades de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias detectadas en la etapa anterior y que se acaban de describir. Para ello, nos planteamos diseñar y desarrollar en el aula una ruta de enseñanza y aprendizaje que promoviera la construcción del concepto de EDO de forma integrada con el concepto de derivada y en la que los estudiantes trabajaran inmersos en un ambiente de resolución de problemas (pregunta de investigación 2).

Para tratar de dar respuesta a esta cuestión debemos tener en cuenta que, los resultados de la primera fase de la investigación muestran que, tal y como señalan Kilpatrick et al. (2009), el aprendizaje de las matemáticas no debe limitarse al uso de definiciones, procedimientos y algoritmos sino que conlleva el desarrollo de habilidades y capacidades entre las que se encuentran:

- *Comprensión conceptual:* comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones entre ellos.
- *Fluidez con los procedimientos:* habilidad en la ejecución de procedimientos de forma flexible, precisa, eficiente y correcta.
- C*ompetencia estratégica:* habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
- *Razonamiento adaptativo:* capacidad para pensar de forma lógica, reflexionar, explicar y justificar.
- *Predisposición productiva:* inclinación para ver las matemáticas como prácticas, útiles y valiosas; confianza en la propia eficacia y diligencia.

Para promover el desarrollo de estas capacidades y habilidades optamos por plantear un modelo de enseñanza para la introducción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en el que los estudiantes tuvieran la oportunidad de reflexionar y discutir acerca de sus propios conocimientos. En el diseño del Módulo de Enseñanza se conjugan tres elementos que contribuyen a la creación de un ambiente de discusión y reflexión: la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción entre estudiantes. Como herramienta tecnológica se optó por el uso de la calculadora Voyage™200 que, entre sus múltiples opciones, cuenta con un sistema de álgebra computacional y un sistema de representación gráfica que pueden ser presentados de forma simultánea en la pantalla, lo que facilita el análisis de los fenómenos.

En esta sección describimos el Módulo de Enseñanza, así como las características del grupo de estudiantes con los que se implementó y del escenario en el que se desarrollaron las actividades.

4.1 Diseño del Módulo de Enseñanza

El Módulo de Enseñanza está compuesto por tres problemas cuyos enunciados se adaptaron de situaciones que tradicionalmente se plantean a los estudiantes como ejemplos de aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias: descomposición de elementos químicos, problemas de mezclas y de dinámica de poblaciones. Dichos problemas se han denominado *Desintegración del uranio*, *Contaminación de mercurio* y *Dinámica de poblaciones*, respectivamente.

Los tres problemas diseñados tienen en común que tratan el concepto de EDO partiendo de su relación con el concepto de derivada de una función, considerándolo como un significado más a añadir en la lista de interpretaciones que Thurston (1994) asocia con el concepto de derivada de una función. Con el primer problema se introduce el concepto de EDO partiendo del significado simbólico de la derivada de una función (*la derivada de* x^n *es* nx^{n-1}*, la derivada de sin x es cos x*...Thurston, 1994, p. 3). En el segundo problema, se utiliza el concepto de derivada para indicar variación y construir una EDO a partir de dicho significado, mientras que en el tercero se estudia la monotonía de las funciones solución de una EDO analizando el signo de su derivada a partir de la expresión de la ecuación diferencial.

De esta forma se trata de facilitar el aprendizaje partiendo de las dificultades que los participantes en la primera fase de la investigación mostraron al tratar de resolver problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias: el establecimiento de relaciones entre distintos conceptos matemáticos, en particular las EDO y la derivada de una función.

La tabla 2 muestra un esquema de las características principales de cada uno de los problemas del Módulo de Enseñanza: número de sesiones en las que se trabaja cada problema, contexto en el que se plantea el enunciado, estructura general del problema y descripción general de su contenido.

Problema	***Desintegración del uranio*** **(1 sesión)**	***Contaminación de mercurio*** **(5 sesiones)**	***Dinámica de poblaciones*** **(4 sesiones)**
Contexto	Descomposición de elementos químicos	Mezcla de sustancias	Población de peces
Estructura	Planteamiento de una situación general, seguido de una serie de cuestiones.	Planteamiento de una situación concreta, seguido de seis etapas de resolución en las que se incluyen diferentes cuestiones y actividades.	Planteamiento de una situación concreta, seguido de cinco etapas de resolución en las que se incluyen diferentes cuestiones y actividades.
Descripción	Se analizan diferentes situaciones de variación y sus representaciones en lenguaje matemático. Finaliza con la introducción del concepto de EDO, orden y solución de la misma. No requiere del uso de tecnología.	Se obtiene la expresión de una EDO partiendo de una situación de variación. Se analizan las representaciones gráfica y algebraica de la función solución. Se generaliza la situación. Se utilizan los entornos algebraico y gráfico de la calculadora.	Se obtiene la expresión de una EDO partiendo de una situación de variación. Se analiza el comportamiento de la función solución a través de la EDO. Se generaliza la situación. Se utilizan los entornos algebraico y gráfico de la calculadora.

Tabla 2. Esquema descriptivo del Módulo de Enseñanza

A continuación realizaremos una descripción más detallada de cada uno de los tres problemas del Módulo, presentando algunos ejemplos de las cuestiones y actividades planteadas a los estudiantes.

4.1.1 Problema 1: Desintegración del uranio

Esta actividad está basada en el fenómeno de la descomposición de elementos químicos; su enunciado comienza con una situación general que varía a medida que los estudiantes van respondiendo a una serie de cuestiones. El objetivo principal de este problema es estimular que los alumnos establezcan relaciones entre distintas situaciones reales y diferentes expresiones matemáticas, relacionadas siempre con el concepto de derivada. La actividad finaliza con una parte centrada en el contexto matemático, no relacionada de forma explícita con la situación planteada inicialmente, que se utiliza para introducir los conceptos de EDO, orden y solución de la misma.

El problema comienza de la siguiente forma:

> *Muchos minerales contienen uranio 238 en su composición. El uranio es una sustancia radiactiva, lo que significa que emite una cierta energía que hace que se vaya transformando en otras sustancias a medida que pasa el tiempo. Por ejemplo, el uranio 238 se va modificando hasta convertirse en plomo 206.*

Situación planteada en el problema 1 del Módulo de Enseñanza

Una vez presentada la situación general, se formula a los estudiantes una serie de cuestiones, atendiendo a unos objetivos principales, que se enumeran a continuación, junto con algunos ejemplos de las cuestiones que se les planteaban para cada uno de los objetivos.

Preguntas: *Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?, ¿se te ocurre alguna otra posibilidad?, ¿cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio va disminuyendo?*

El objetivo de estas cuestiones es promover que los estudiantes se ejerciten en el proceso de representación de información en términos matemáticos (del contexto de la situación planteada al contexto matemático).

Preguntas: *¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta. ¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?, ¿puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t^2?Indica al menos otras dos posibilidades para la expresión de u'(t).*

Con estas preguntas se persigue que los estudiantes reflexionen sobre posibles expresiones matemáticas que permitan modelar la situación real planteada (del contexto matemático al contexto de la situación planteada).

Preguntas: *¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t)=-2?,¿qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-t?*

Este tipo de preguntas se formularon con el fin de promover que los estudiantes establezcan relaciones entre diferentes variaciones de la situación general y distintas expresiones algebraicas (interrelación entre el contexto matemático y el contexto de la situación planteada).

Preguntas: *Completa la siguiente tabla escribiendo una función cuya derivada satisfaga lo indicado en cada fila:*

u'(t)	u(t)	u'(t)	u(t)
-1		-t	
-2		$-t^2$	
-3		$\frac{-t}{2}$	

¿Hay alguna otra función que cumpla que su derivada es la que aparece en cada fila de la tabla anterior? Escribe al menos otras dos funciones que satisfagan cada uno de los apartados.

Esta actividad se utiliza para introducir la definición formal de los conceptos de ecuación diferencial ordinaria, orden y solución de la misma (contexto matemático).

Los otros dos problemas del Módulo de Enseñanza presentan una estructura diferente al primero. En ellos se distinguen diferentes etapas de resolución y en cada una de esas etapas se incluye una serie de cuestiones y actividades que guían a los estudiantes en el proceso de construcción, análisis y generalización del modelo matemático.

4.1.2 Problema 2: Contaminación de mercurio

Se trata de un problema de mezcla de sustancias, en el que se plantea una situación concreta. Su enunciado es el siguiente:

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias

Acabamos de recibir el último informe del Ministerio de Sanidad y Consumo sobre la calidad del agua que proviene de nuestros estanques de tratamiento. Uno de ellos, el más antiguo, no cumple con los estándares recomendados.
En el estanque hay 10.000 litros de agua y estamos introduciendo en él una solución que contiene 0'1 gramos de mercurio por litro, a razón de tres litros por minuto. Con esta operación, hemos contaminado el agua del depósito, la cuál sale del estanque también a una velocidad de tres litros por minuto.
A partir del informe del Ministerio, hemos reducido la cantidad de mercurio que bombeamos en el estanque, pero me temo que no la hemos reducido lo suficiente puesto que la concentración actual es de 0'7 gramos por litro. Necesito un modelo que me permita calcular cuánto mercurio hay en el estanque en cada momento, para poder así controlar la contaminación.

Situación planteada en el problema 2 del Módulo de Enseñanza

Los principales aspectos conceptuales considerados en este problema son la clasificación de las EDO de primer orden, la presentación del método algebraico de resolución de ecuaciones de variables separadas y la definición de las condiciones iniciales y el problema de Cauchy.

Esta actividad fue diseñada atendiendo a dos objetivos principales: (i) que los estudiantes reconocieran distintas etapas en el proceso de resolución de problemas e identificaran las características generales de cada una de ellas y (ii) promover el desarrollo de procesos del pensamiento matemático avanzado, como la abstracción o la generalización, y de aspectos relacionados con la competencia estratégica y el razonamiento adaptativo como la habilidad para representar y resolver problemas o la capacidad para reflexionar, explicar y abstraer (Kilpatrick et al., 2009).

Estos objetivos marcaron la estructura del problema en el que se distinguieron seis etapas de resolución: una actividad inicial, seguido de las etapas de comprensión y análisis de la situación, la solución del caso particular, el planteamiento y la resolución de casos generales y un análisis retrospectivo del proceso de resolución. Además, algunas de las actividades propuestas en este problema fueron planteadas para ser realizadas utilizando la calculadora Voyage™200. Esta herramienta tecnológica se utilizó para resolver ecuaciones diferenciales, representar funciones gráficamente, calcular límites, etc.

- Etapa 0: Actividad inicial

Se pide a los estudiantes que elaboren un informe en el que expliquen de qué trata el problema, cuáles son los datos relevantes para su resolución y qué procedimientos seguirían para resolverlo. Con esta actividad se pretende que los alumnos reflexionen acerca de la situación planteada y las posibles vías de resolución, antes de comenzar con la ruta establecida.

- Etapa 1. Comprensión de la situación

En esta etapa se incluyen preguntas como *¿qué cantidad de mercurio entra en el estanque por cada litro de agua introducido?, el mercurio que entra en el depósito, ¿permanece siempre en él?, ¿a qué velocidad sale la disolución del estanque?...* El objetivo de estas cuestiones es que los estudiantes identifiquen la información relevante para la resolución del problema.

- Etapa 2. Análisis de la situación

Durante esta etapa se guía a los estudiantes en el proceso de representación de la información en términos matemáticos. Siendo $p(t)$ la cantidad de mercurio que hay dentro del depósito en cualquier instante de tiempo, se pide a los alumnos expresar en términos matemáticos la cantidad de mercurio que entra y sale del depósito por unidad de tiempo y relacionar dichas expresiones para indicar cómo varía la cantidad de mercurio que hay en el depósito. Esta etapa concluye con la expresión de la EDO que modela la situación, $\frac{dp}{dt} = 0'3 - 0'0003p$.

- Etapa 3. Solución del caso particular

Esta etapa comienza planteando a los estudiantes una serie de cuestiones cuyo objetivo es que reflexionen acerca de los contenidos matemáticos introducidos hasta el momento (definición de ecuación diferencial ordinaria y orden), relacionándolos con la expresión obtenida al final de la etapa anterior. Algunas de dichas cuestiones son: *la expresión que has obtenido al final de la etapa anterior, ¿es una EDO?, ¿de qué orden?, ¿qué elementos aparecen en la ecuación que hacen afirmar que se trata de una EDO y que ese es su orden?*

A continuación, el profesor presenta a todo el grupo la clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y el método algebraico de resolución de las EDO de variables separables. Los alumnos clasifican y resuelven la EDO obtenida en la etapa anterior de dos formas: empleando el método algebraico y utilizando la VoyageTM200 y comparando los resultados obtenidos en ambos casos. Esta etapa finaliza con la representación gráfica de la solución del caso particular, correspondiente al dato inicial $p(0) = 0$ (Figura 3), y su análisis a partir de preguntas como *¿crees que hay una cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito?, ¿cuál es esa cantidad?; El cliente te ha dicho en su mensaje que, en este momento, la concentración de mercurio que hay en el depósito es de 0'7 gramos por litro. ¿Es eso posible?*

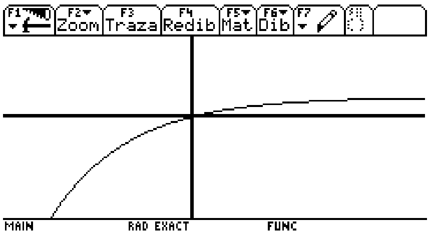


Figura 3. Representación gráfica de la solución

- Etapa 4. Planteamiento y solución de casos generales

En esta etapa del proceso de resolución del problema se persigue que los estudiantes reflexionen acerca del significado de cada uno de los términos de la EDO en relación con la situación planteada, al igual que con la interpretación de la solución general y particular de dicha ecuación. Está formada por cuatro apartados análogos, en cada uno de los cuales se van considerando y generalizando determinados elementos que influyen en la situación planteada: la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque (m), la velocidad a la que entra y sale la disolución (v), el volumen del depósito (V) y la cantidad inicial de mercurio que hay en el estanque (P_0). Cada uno de estos apartados comienza con una tabla que los estudiantes deben cumplimentar y en la que figuran las EDO, soluciones generales y particulares correspondientes a distintos valores del parámetro a generalizar (Figura 4).

Cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (gr/l)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO	Función que modela la situación real $p(0)=0$	Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito
0.1	$\frac{dp}{dt}=0.3-0.0003p(t)$	$p(t)=C\cdot e^{-0.0003t}+1000$	$p(t)=-1000\cdot e^{-0.0003t}+1000$	1000 gr
0.2				
0.3				
0.4				
...				
m				

Figura 4. Primer apartado de la etapa 4

Cada uno de los cuatro apartados termina planteando a los estudiantes una serie de cuestiones cuyo objetivo es el análisis del modelo parcialmente generalizado que se acaba de obtener. Por ejemplo, en el primer apartado, donde se consideran diferentes valores para la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito, se formulan preguntas como: *La función que modela la situación, ¿depende de m?, ¿Y la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito? Representa gráficamente, en una misma pantalla, las funciones que modelan la situación para los casos en los que se introducen 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 gramos de mercurio por litro de solución. En un instante de tiempo determinado, ¿en cuál de los casos se alcanza una mayor concentración de mercurio en el depósito? ¿Qué cantidad de mercurio debemos introducir para que la concentración máxima que se alcance sea de 0'7 gramos por litro?*

La etapa 4 concluye proponiendo a los estudiantes una actividad en la que se comparan dos depósitos y cuyo objetivo es establecer si interrelacionan los dos contextos y han contestado a las cuestiones anteriores de forma razonada. El enunciado de dicha actividad es el siguiente:

Supongamos que tenemos dos depósitos, el primero con un volumen de 60.000 litros en el que introduce una solución con 0’2 gramos de mercurio por litro, y el segundo con un volumen de 45.000 litros en el que se introduce una solución con 0’6 gramos de mercurio por litro.
Si en cada depósito tenemos una cantidad inicial de 250 gramos de mercurio y las soluciones entran y salen de ambos depósitos a una velocidad de 3 litros por minuto, ¿En cuál de los depósitos se alcanza antes una concentración de mercurio de 0’1gr/l? ¿En qué instante de tiempo se alcanza?

- Etapa 5. Análisis retrospectivo

En esta última etapa se pide a los estudiantes que realicen un informe en el que figuren aspectos como: *cuál es la función que permite calcular la cantidad de mercurio que hay en el depósito en cada instante, qué información se puede obtener de dicha función, por qué no es posible que el depósito que se está considerando en el caso particular tenga una concentración de mercurio de 0’7 gr/l. Cómo has resuelto el problema planteado por el cliente, indicando por qué has necesitado utilizar una EDO para modelar la situación. Cómo has encontrado una solución más general y cuál es su utilidad*. El objetivo es que los estudiantes reflexionen sobre el proceso de resolución seguido, desde la propuesta inicial que hicieron hasta el planteamiento y la resolución de situaciones más generales.

4.1.3 Problema 3: Dinámica de poblaciones

La estructura general de este problema es similar a la del anterior, en el sentido de que se explicitan diferentes etapas de resolución que contemplan la comprensión, análisis y resolución de un problema concreto, el planteamiento y resolución de casos más generales y un análisis retrospectivo del proceso de resolución. Una de las diferencias más significativas que existen entre este problema y los anteriores es que en él hay una mayor presencia del sistema de representación gráfico, jugando un papel fundamental el uso de la calculadora Voyage™200.

En cuanto a los aspectos de tipo conceptual, la característica que distingue a este problema del Módulo de Enseñanza es que se utiliza la expresión de la EDO que modeliza la situación planteada para describir la monotonía de la función solución, ante la dificultad para analizar la expresión algebraica de la misma. De esta forma se presenta a los estudiantes una nueva interpretación del concepto de EDO, relacionada directamente con el significado geométrico de la derivada.

En relación con los procesos, en el diseño de este problema se incluye un grupo de cuestiones relacionadas con el proceso de verificación. La decisión de incluir este tipo de preguntas está fundamentada en la observación, durante el desarrollo de los problemas anteriores, de que los estudiantes en general no se planteaban si los procedimientos utilizados o las soluciones obtenidas eran correctas.

El problema se enuncia presentando una situación hipotética en un contexto real para el estudiante. Dicha situación es la siguiente:

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias

La piscifactoría "La mar de bueno" solicita sus servicios para buscar una manera sencilla de comunicar a sus inversores cómo varía la cantidad de peces que hay en uno de los recintos que utilizan para la cría de doradas.
Los últimos recuentos del número de peces que hay en uno de los recintos han mostrado que el número de peces está disminuyendo considerablemente. Los técnicos de nutrición y de epidemiología no han detectado ningún problema relacionado con la alimentación o alguna enfermedad, pero me apuntan que quizás el problema esté en la cantidad de peces que hay dentro del recinto.
Necesito que realice un estudio sobre cómo varía el número de peces que hay en el recinto a lo largo del tiempo y que analice cuál puede ser el problema.Para presentar el informe a los inversores, sería conveniente que este se presentara en un formato de fácil comprensión como, por ejemplo, una representación gráfica que refleje cuál es la situación en cualquier instante de tiempo.
Le adjunto cierta información recogida por nuestros trabajadores que podrían serle de utilidad en su trabajo: la tasa de nacimiento de doradas es de 410 por cada mil, cada año y la tasa de mortalidad de doradas es de 220 por cada mil, cada año.

Situación planteada en el problema 3 del Módulo de Enseñanza

- Etapa 1: Comprensión de la situación

Las primeras cuestiones que se plantean a los estudiantes tienen como objetivo promover la reflexión acerca de la situación planteada y del significado de expresiones que aparecen en el enunciado. Algunas de las preguntas formuladas fueron: *¿qué significa que la tasa de nacimiento sea 410 peces por cada mil?; en la situación planteada, ¿qué está cambiando?*

- Etapa 2: Análisis de la situación

En esta etapa, los estudiantes analizan la situación a partir del estudio de casos particulares, para finalizar indicando la expresión de la EDO que modeliza la situación: $P'(t) = 0'19P(t)$.

- Etapa 3: Solución de casos particulares

En esta etapa del problema, los estudiantes resuelven la EDO anterior y analizan la expresión de la solución en función de la situación planteada. Para ello se les formulan cuestiones como: *¿la constante de integración puede ser negativa?, ¿qué necesitarías conocer para poder obtener el valor de dicha constante?, el número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante?* A continuación se introduce el término de competición, los alumnos reescriben la EDO que modeliza la situación ($P' = 0'19P - bP^2$) y estudian el comportamiento de la función solución con cuestiones como: *Analiza para qué valores de P la población (a) aumenta, (b) disminuye y (c) se mantiene constante; ¿qué sucede con la población a lo largo del tiempo?*

Posteriormente se pide a los estudiantes que representen gráficamente funciones solución correspondientes a distintos datos iniciales, tomando $b = 0.001$. El objetivo de estas actividades es que los estudiantes analicen si las representaciones gráficas que han obtenido se corresponden con las respuestas que han dado a las cuestiones anteriores.

Esta etapa finaliza con una serie de preguntas planteadas con el objetivo de que los estudiantes formulen conjeturas y las verifiquen. Algunas de ellas son: *¿qué ocurre con el valor límite de la población si el término de competición aumenta? ¿y si disminuye?*

- Etapa 4: Planteamiento y solución de casos generales

En esta etapa se hace un análisis de la situación similar a la de la fase anterior, pero considerando la tasa de crecimiento como un parámetro, a. Se estudia qué ocurre cuando dicho parámetro es positivo, negativo o nulo. Se plantean preguntas como: *¿qué significa, en términos de los nacimientos y las muertes de los peces, que la tasa de crecimiento sea negativa?, ¿qué ocurriría en ese caso con la población de peces a medida que pase el tiempo?... Supongamos que a es un valor negativo. Calcula el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo. Representa gráficamente la función que indica el número de peces que hay en el recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto inicialmente había 280 peces, la tasa de crecimiento de dicha especie es -0'19 y el término de competencia es 0'001.*

- Etapa 5: Análisis retrospectivo del proceso de solución

Al igual que en el problema anterior, en esta última etapa los estudiantes realizan un informe cuyo objetivo es que reflexionen y expongan el proceso de resolución que han seguido. En dicho informe se les pide indicar qué factores influyen en la situación, por qué han surgido diferentes ecuaciones diferenciales, qué ocurre con el comportamiento de las funciones solución en el infinito.

4.2 Implementación del Módulo de Enseñanza: participantes y contexto de desarrollo

El Módulo de Enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias se implementó con un grupo de 15 estudiantes de primer curso de la licenciatura en Química que ya habían cursado las materias correspondientes al cálculo en una y varias variables. Para el desarrollo del Módulo se dispuso de un total de 10 sesiones de clase, de una hora de duración cada una. Durante estas sesiones los estudiantes se agruparon formando seis parejas y un trío (tabla 3), conforme a sus propios criterios de selección de compañeros.

Trío 1	Pareja 2	Pareja 3	Pareja 4	Pareja 5	Pareja 6	Pareja 7
Sonia Alberto Juan	Manuel Ginés	Milagros Silvia	Nicanor Mar	Virginia Carmen	Alexis Zoraida	Nieves Naomi

Tabla 3. Participantes en la segunda fase de la investigación

Ninguno de los estudiantes del grupo conocía la herramienta tecnológica elegida para el desarrollo del Módulo de Enseñanza, la calculadora Voyage^{TM}200, por lo que se decidió dedicar una sesión de clase a mostrar su funcionamiento a los alumnos. Además se les entregó un manual, diseñado por el grupo de investigación, para que pudieran consultar dudas sobre el manejo de la calculadora durante las diez sesiones de trabajo.

Cada sesión de clase comenzaba con un breve resumen, por parte del profesor, de las actividades realizadas durante la sesión anterior. A continuación se entregaba a cada grupo una calculadora y la documentación correspondiente a la etapa del problema que se fuera a resolver durante esa sesión y estos se ponían a trabajar en ella. La figura del profesor es la de asesor ante situaciones de duda, asistiendo a los estudiantes cuando estos lo requerían y guiándoles en el trabajo que estaban realizando, además de provocar discusiones y situaciones de reflexión El profesor realizaba otras intervenciones, dirigidas a todo el grupo de estudiantes, cuyo objetivo era el de formalizar los conceptos matemáticos que iban surgiendo.

5. Aspectos cognitivos observados durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza e influencia de los elementos introducidos en el proceso de aprendizaje

El análisis de los procesos cognitivos mostrados por los estudiantes durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza (pregunta de investigación 3) y de la influencia, en el proceso de aprendizaje, del uso de un ambiente de resolución de problemas, en el que se utiliza tecnología y se promueve la interacción entre estudiantes (pregunta de investigación 4) se realiza mediante un minucioso proceso de revisión de grabaciones (de audio, vídeo y de las producciones en la calculadora Voyage™200) y de la documentación escrita por los estudiantes. Un ejemplo de cómo se realizó este proceso puede encontrarse en Camacho Machín et al. (por aparecer), donde se presenta el análisis de los aspectos observados durante el desarrollo del problema 2 del Módulo, *Contaminación de mercurio*.

La primera parte de la sesión dedicada a la resolución del primer problema se puede caracterizar como un proceso de asimilación, por parte de los estudiantes, de una nueva forma de concebir las matemáticas, modificando la creencia de que todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos en un corto espacio de tiempo y con expresiones de las soluciones que pueden ser únicamente valores numéricos o expresiones algebraicas cerradas (Schoenfeld, 1992).

El análisis del trabajo diario de cada uno de los grupos de estudiantes que participaron en la segunda fase de esta investigación refleja que, en lo relativo a aspectos de tipo conceptual, el Módulo de Enseñanza promovió la reflexión sobre:

- El uso del concepto de función para indicar dependencia del tiempo; la relación entre tipos de dependencia y distintas funciones; el reconocimiento de asíntotas en representaciones gráficas y algebraicas; interpretaciones del concepto de límite de una función; identificación de las variables en el sistema de representación gráfico; la representación gráfica y las propiedades de la función exponencial y la función cuadrática.
- El uso de la derivada de una función para expresar dependencia del tiempo, aumento o disminución de cierta cantidad, velocidad de cambio, variación, monotonía...la existencia de infinitas funciones cuya derivada coincide y las relaciones entre ellas.
- Uso del concepto de inecuaciones como elemento para el análisis del signo; comparación entre x^2 y x.
- El uso de una ecuación diferencial para expresar situaciones de variación y analizar el comportamiento de las funciones solución; la relación entre la constante de integración y un problema de valores iniciales. Interpretación de una EDO como la expresión de la derivada como función de la variable dependiente[4].

---

[4] En las EDO no autónomas de la forma $\frac{dy}{dt} = f(y,t)$, la derivada es una función que depende de dos variables, una de ellas una función. En el caso de ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dt} = f(y)$, al representar gráficamente la función derivada frente a y, la que inicialmente era la variable dependiente (en este caso y) se convierte en la variable independiente. Esto provoca dificultades como han mostrado Rasmussen (2001) y Guerrero et al. (2010).

El hecho de introducir el concepto de ecuación diferencial ordinaria a partir de su relación con el concepto de derivada de una función estableció un puente entre ambos conceptos, contribuyendo así a que los estudiantes establecieran relaciones entre distintos conceptos matemáticos. Por otra parte, el hecho de considerar diferentes significados asociados al concepto de derivada de una función en el diseño de los problemas del Módulo de Enseñanza contribuyó a que los alumnos fortalecieran la red de significados asociados a dicho concepto matemático, desarrollando así su comprensión conceptual. De esta forma, la imagen que los estudiantes muestran del concepto de derivada de una función se transforma de un conjunto de algoritmos a un concepto que aporta información y de resultado de un proceso (el de derivación) a formar parte de los recursos que los estudiantes utilizan para resolver problemas.

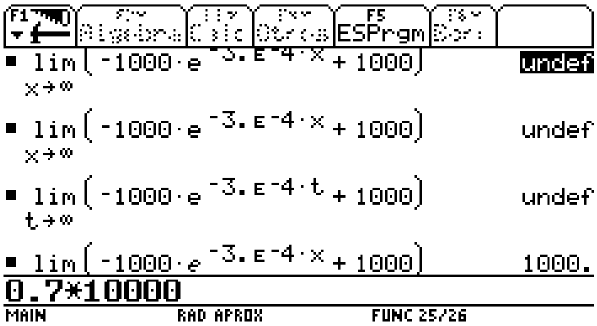
Dentro de los procesos cognitivos distinguimos entre procesos, procedimientos y heurísticas. Los procesos analizados incluyen la abstracción y la generalización; los procedimientos hacen referencia a métodos específicos, por ejemplo, de resolución de ecuaciones, reglas de derivación, etc. Por último, las heurísticas contemplan las diferentes maneras de buscar la solución a un determinado problema. Durante las diez sesiones de trabajo en la resolución de los problemas del Módulo se pudo observar el uso, por parte de los estudiantes, de los procesos de representación, interpretación, reflexión, abstracción, generalización, argumentación y verificación, todos ellos de gran importancia en el desarrollo de la competencia matemática (Kilpatrick et al., 2009).

En cuanto a las heurísticas pudimos observar el uso de métodos como *ensayo y error*, asociar términos lingüísticos con representaciones matemáticas, basarse en lo empírico, utilizar conocimientos adquiridos en otras asignaturas, considerar las unidades de medida como referente para realizar operaciones, comparar distintas preguntas y sus respuestas, analizar casos particulares y buscar patrones de comportamiento.

Finalmente, en relación con los procedimientos, se observó que la mayoría de los estudiantes mostraban fluidez en el uso de los procedimientos de derivación e integración, si bien algún alumno mostró dificultades con dichos procedimientos, especialmente con la aplicación de la propiedad $(f+C)' = f'$, siendo f una función derivable y C una constante cualquiera. Otros procedimientos matemáticos en los que los estudiantes tuvieron que mostrar su fluidez fueron el cálculo de límites, la clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias y la resolución de EDO de variables separadas.

En cuanto a la influencia que tuvieron en el proceso de aprendizaje los tres elementos introducidos en el Módulo de Enseñanza (resolución de problemas, uso de tecnología e interacción entre estudiantes) cabe destacar que la dinámica de trabajo en el aula favoreció la autonomía de los alumnos y creó un ambiente de colaboración en el que los alumnos se sentían cómodos al mostrar sus razonamientos y criticar los de sus compañeros, lo que permitió que reconsideraran ciertas ideas y concepciones matemáticas.

El uso de la calculadora Voyage™200 actuó como activador de conocimientos latentes, permitiendo que los estudiantes indagaran, formularan conjeturas y las comprobaran. En la siguiente imagen, por ejemplo, puede observarse cómo Virginia y Carmen utilizan la calculadora para hallar el valor del límite de una función; después de varios intentos en los que cometieron errores de sintaxis, la herramienta les devuelve un valor que Virginia comprueba haciendo uso de sus conocimientos acerca de los procedimientos para el cálculo de límites (Figura 5).



Virginia: Mira, si esto era una chorrada [Haciéndolo ahora a mano] Esto da menos infinito… esto es cero y te queda 1000 ¿sabes?

Figura 5. Muestra del uso del proceso de verificación por parte de Virginia

Finalmente, el hecho de plantear el Módulo de Enseñanza en un ambiente de resolución de problemas contribuyó a desterrar en los estudiantes la idea de que los problemas matemáticos deben ser resueltos en un corto espacio de tiempo y los introdujo en un escenario en el que cuestionarse, reflexionar, conjeturar y verificar son procesos necesarios y útiles.

6. Implicaciones didácticas

El análisis de los datos obtenidos en la primera fase de la investigación, unido con la revisión de otros trabajos existentes en el campo de la Educación Matemática, relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, permitieron constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo, por parte de los estudiantes, de heurísticas que permitan plantear y resolver problemas enunciados en un contexto diferente al que se les presenta como ejemplos de aula, en especial aquellos cuyo enunciado se plantea en un contexto no matemático. En particular se observó que la mayoría de los estudiantes mostraban dificultades para establecer relaciones entre el concepto de EDO y el de derivada de una función, produciéndose una discontinuidad en el aprendizaje de las matemáticas que impide la realización de actividades cuando no se recuerda el método específico para resolverlas (Camacho et al., 2009). Se ha constatado que la tendencia de estos estudiantes es reducir el estudio de las EDO a la búsqueda de un algoritmo que resuelva tipos particulares de ecuaciones, limitando así sus posibilidades para abordar problemas contextualizados. Los resultados obtenidos en otras investigaciones (por ejemplo, Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000; Rasmussen & Whitehead, 2003) concuerdan con los nuestros.

El diseño y la implementación de un Módulo de Enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un escenario de resolución de problemas en los que se dedica especial atención a la relación entre el concepto de EDO y los distintos significados asociados al concepto de derivada de una función, permitió que la red de significados asociados al concepto de derivada se viera ampliada y fortalecida a medida que los estudiantes avanzaban en los problemas del Módulo. De esta forma, la introducción del concepto de EDO a partir de su relación con la derivada de una función establece un puente entre los dos conceptos, y, además de contribuir en la construcción de un concepto matemático nuevo, fortalece conceptos que ya se encontraban en la cognición de los estudiantes.

El uso de la herramienta tecnológica, la calculadora Voyage™200, y el modelo de trabajo en el aula dieron un mayor protagonismo al estudiante en su propio proceso de aprendizaje. El trabajo en un ambiente entre iguales, el diseño de los problemas y la facilidad de uso de la herramienta tecnológica elegida contribuyeron a crear un clima de indagación, reflexión, planteamiento de conjeturas y verificación. Así se conjugaron diferentes elementos fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas: comprensión conceptual, fluidez en el uso de procedimientos, habilidad para representar y resolver problemas, capacidad para reflexionar, explicar y justificar y confianza en la propia eficacia (Kilpatrick et al., 2009).

Bibliografía

Artigue, M. (1987). Ingenierie didactique a propos d'equations differentielles. En Bergeron, J., Herscovics, N. y Kieran, C. (eds.). *Proceedings of the eleventh international conference of Psychology of Mathematics Education*, 236-242, Montreal.

Brodetsky, S. (1919). The graphical treatment of differential equations (I). *The Mathematical Gazette*, 9, 377-382.

Brodetsky, S. (1920). The graphical treatment of differential equations (II). *The Mathematical Gazette*, 10, 3-8.

Brodetsky, S. (1920). The graphical treatment of differential equations (III). *The Mathematical Gazette*, 10, 35-38.

Brodetsky, S. (1920). The graphical treatment of differential equations (IV). *The Mathematical Gazette*, 10, 49-59.

Camacho, M. y Perdomo, J. (2005a). La comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias en estudiantes de primeros cursos universitarios: Un estudio preliminar. *XII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 879-884. FESPM: Albacete, España.

Camacho, M. y Perdomo, J. (2005b). Análisis de las respuestas de estudiantes universitarios a un cuestionario sobre el concepto de ecuación diferencial ordinaria. En Socas, M., Camacho, M., Morales, A. y Noda, A. (eds.). *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática* 7, 127-140. Ediciones "CAMPUS": España.

Camacho, M., Perdomo, J. & Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo & M. T. González (eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*, pp. 87-106. Tenerife.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. *PNA* 3(3), 123-133.

Camacho Machín, M., Perdomo Díaz, J. y Santos Trigo, M. (por aparecer). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias.*

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 517-545. Lawrence Erlbaum Associates: London.

Guerra-Cáceres, M. E. (2003). Esquemas del Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un Contexto Curricular Tradicional. *Matemática, Educación e Internet* [en línea], 4(1). Recuperado el 20 de enero de 2010, de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/index.htm

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp.341–352.

Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (4), 455-472.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (7th ed.), 115-155. National Academy Press: Washington, DC.

Kwon, O.N., Rasmussen, C. y Allen, K. (2006). Students' Retention of Mathematical Knowledge and Skills in Differential Equations. *School Science and Mathematics*, 105 (5), 1-13.

Perdomo-Díaz, J. (2010). *Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de Resolución de Problemas*. Tesis doctoral pendiente de publicación.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.

Rasmussen, C. y Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 195-210.

Rasmussen, C. y Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 189-194.

Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K. y Burtch, M. (2006). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 85-93.

Rasmussen, C. y Whitehead, K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. En Selden, A. & Selden, J. (eds.), *MAA Online Research Sampler* [en línea]. Recuperado el 20 de enero de 2010, de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html

Raychadhuri, D. (2008). Dynamics of a definition: a framework to analyse student construction of the concept of solution to a differential equation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2), 161-177.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 334-370.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Zandieh, M. y McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En Hitt, F. y Santos, M. (eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* OH:ERIC: Columbus.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación con referencia EDU 2008-05254 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i.

Josefa Perdomo Díaz. Licenciada y doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna, en Tenerife, España. Las líneas de investigación en las que trabaja están relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, principalmente en los últimos cursos del nivel secundario y en el nivel universitario, así como el uso de la resolución de problemas y la tecnología como elementos que promueven el desarrollo de la competencia matemática en estos niveles. Otros temas de interés son la modelización y la formación de profesorado. Ha impartido docencia en distintos centros de Enseñanza Secundaria (estudiantes entre 12 y 18 años) y Escuelas de Arte (mayores de 16 años) de Canarias.