**NÚMEROS**
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 77, julio de 2011, páginas 137–149

# Soluciones de Gardner, además de tangos, fósiles, fantasmas y otras cosas

**José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz** (Club Matemático[1])

**Resumen**

Soluciones a los ejercicios propuestos en el anterior NÚMEROS, con especial incidencia en la metodología de su resolución. Comentarios sobre problemas anteriores. Martin Gardner y sus soluciones. Breve estudio de las soluciones dadas por 450 alumnos de 2º de la ESO a una variante de uno de los problemas propuestos anteriormente. Nueva propuesta de problemas para resolver.

**Palabras clave**

Resolución de problemas; Metodología; Martin Gardner; Estrategias; Investigaciones en el aula; Omniheurística. Problemas de abuelos.

**Abstract**

Solutions to the exercises in the previous issue, with special emphasis on the methodology of its resolution. Comments on previous issues. Martin Gardner and solutions. Brief study of the solutions given by 450 students of 2º ESO a variant of one of the problems posed above. New proposal to solve problems.

**Keywords**

Problem solving methodology, Martin Gardner, Strategies, Research in the classroom; Omniheurística. Grandparent Issues.

En los artículos anteriores se ha suscitado una interesante controversia acerca del problema CINCO AMIGOS Y UNA PESA. Como final de la misma hemos recibido una comunicación de nuestro compañero, el profesor Alexánder Hernández (Tenerife. España) que dice así:

> Estimados profesores:
> Me comunico con ustedes en relación al problema **Cinco amigos y una pesa,** cuya respuesta comenté en el número 75 y me rebatió la profesora Nora Ferreyra en el último número, con mucha razón y acierto por cierto. Aunque mi error me ha hecho pensar que el método propuesto en el número 73, sigue sin ser del todo eficaz. Así que haciendo las modificaciones pertinentes propongo un problema similar a ése que sí puede servir para abrir un debate más interesante en clase.
> **Cinco amigos y una pesa (II)**
> **Cinco chicos se pesan de dos en dos, de todas las maneras posibles. Los pesos de las parejas son: 92, 97, 98, 101, 102, 104, 109, 110, 113 y 114 kilos.**
> **El peso conjunto de los cinco es: __**

En el artículo anterior, al hablar del admirado Martin Gardner, dimos una pequeñísima muestra de los problemas que trató en sus artículos y libros.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

**Sociedad Canaria *Isaac Newton***
**de Profesores de Matemáticas**

El primero que presentamos, sacado de ***"Comunicación extraterrestres y otros pasatiempos matemáticos"*** (Cátedra, 1986), que constituye la sexta recopilación de sus artículos, en el capítulo 12 del mismo, y bajo el nombre de ***"El viaje alrededor de la luna y otros siete problemas"*** decía lo siguiente:

## Las monedas del reino

En Estados Unidos, hacen falta al menos ocho monedas para obtener la suma de 99 centavos: medio dólar, un cuarto de dólar, dos monedas de diez centavos y cuatro de un centavo. Imagínese el lector como el dirigente de una pequeña nación recientemente independizada. Tiene la tarea de establecer un sistema monetario basado en el centavo, como unidad más pequeña. Su objetivo es acuñar el número más pequeño posible de monedas diferentes que permitan construir cualquier valor desde 1 hasta 100 centavos (ambos inclusive) con no más de dos monedas.

Por ejemplo, el objetivo se satisface fácilmente con 18 monedas de los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20,30, 40, 50, 60, 70, 80,90. ¿Puede hacerlo mejor el lector? Todo valor debe obtenerse mediante una moneda o como suma de dos monedas. Por supuesto, las dos monedas no necesitan tener diferentes valores.

La solución aparece descrita en la página 186 del libro, y dice así:

"Se puede expresar cualquier valor desde un centavo a cien centavos como suma de no más de dos monedas con un número tan reducido como 16 monedas diferentes. Las monedas son: 1, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 25, 30, 34, 39, 41, 46, 47, 49, 50. Esta solución aparece, sin demostración de que sea mínima, en el problema 19 de "Recreation in Mathematics", de Roland Sprague, traducido del alemán por T. H. O'Beirne (Londres, Blackie and Son, 1963).

La solución de Sprague abarca sólo hasta el cien. Una solución de 16 enteros con un rango superior, 104, fue obtenida por Peter Wegner, de la universidad de Londres: 1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 47, 48, 49, 51, 52."

Como ven, un ejemplo muy claro de la manera de trabajar de Gardner. Siempre mencionando las aportaciones ajenas y documentándolas. Siempre con nombres muy conocidos. Y, además, sin cerrar el problema definitivamente, con lo cual, cualquiera que se sienta atraído por el reto puede intentar mejorar la solución presentada, bien buscando otra solución mejor, bien demostrando que la aportada es mínima.

Veamos ahora el segundo problema. Fue extraído de los libros recopilatorios de artículos publicados en la revista ***"Isaac Asimov's Science Fiction Magazine"***, concretamente del segundo de esta serie, bajo el título ***"Juegos y enigmas de otros mundos"*** (Gedisa, 1987), y decía así:

## Tania al tuntún

El coronel Renald, Couth, jefe científico de la computadora de la nave espacial *Bagel*, acababa de recibir información desde la Tierra sobre las nuevas órdenes para la nave.

- ¿Cuál es la misión, papá? – preguntó Tania, su hija de doce años.
- Se acaba de descubrir un nuevo sistema solar cerca del extremo de la galaxia. Vamos en camino para investigar.
- ¿Existen formas de vida en alguno de los planetas?

- Sí, me dijeron que tres de los cinco primeros planetas de la estrella central tienen cierta forma de vida.
- ¿Cuál exploramos primero?
- El quinto.

Tania aplaudió.

- ¡Qué emocionante! Me pregunto si la vida se basa en el carbono.

El coronel Couth alzó las cejas.

- ¿Cómo sabes que el quinto planeta no es uno de los dos estériles?
- El coronel se rió cuando Tania se lo explicó. ¿Qué le dijo?

La solución aparece descrita en las páginas 120/121 del mencionado libro:

- Porque, tonto –dijo Tania-, no hubieras dicho tres de los primeros cinco planetas tienen formas de vida a menos que el quinto fuera uno de ellos. Si el quinto fuera estéril, hubieras dicho tres de los primeros cuatro.

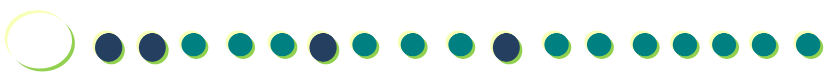
Y, después de dar la solución a la pregunta planteada, continúa el relato con una nueva propuesta de problema así:

- ¿Sabes cuántos planetas hay en total?
- Sí –el coronel asintió con la cabeza-. Y sé también cuánto te gustan los acertijos, entonces déjame decirlo de esta manera. Hay más de siete planetas.
- Continúa –dijo Tania, que había encontrado un lápiz y un pedazo de papel en la consola de la computadora.
- Contando desde la estrella, el primero, el segundo y el sexto planeta son estériles.

Tania lo anotó, luego levantó la vista.

- El octavo planeta, contando al revés, desde el planeta más alejado a la estrella es estéril.
- Y… -dijo Tania, sosteniendo el lápiz.
- Y entre el sexto planeta desde la estrella, y el octavo planeta desde el otro extremo, hay tres planetas. Los tres tienen formas de vida.

Tania hizo el dibujo que muestra la figura y sombreó cada planeta que suponía estéril.



- Es muy simple –dijo-. Obviamente hay diecisiete planetas. Sé que cuatro son estériles y seis tienen vida, pero aún no me dijiste nada sobre los siete externos.

El coronel Couth soltó una risita.

- Tu respuesta es incorrecta, querida –dijo-. Pero no te dije una cosa más. Hay menos de quince planetas en el sistema.
- Eso es imposible –exclamó la niña.
- No –dijo el padre-. Pero tendrás que pensarlo un poco más.

Tania buscó la solución en el diagrama durante diez minutos más o menos antes de encontrar el ¡ajá! de la intuición. ¿Cuántos planetas hay en el sistema?

Nuestros lectores tienen la posibilidad de resolver, como Tania esta extensión del problema. Y no olviden que no termina así. En las páginas 182 y 226 del mismo libro podrá encontrar una ampliación más y su solución correspondiente.

Y ahí seguirá siempre Martin Gardner. Cada relectura de cualquiera de sus libros nos volverá a hacer sentir las matemáticas recreativas como él quería, como una auténtica "vuelta a su creación" (re-crear). Nunca le estaremos lo suficientemente agradecidos.

Ahora toca el turno del problema extraído de la revista portuguesa "**Educaçao e Matemática**", sección **"O problema do trimestre"**, nº 48 de la revista, correspondiente a mayo/junio de 1988. Como ambientación del problema le sugerimos que pulse y oiga, mientras lee y piensa, este magnífico tango "muy matemático", por cierto, en la siguiente dirección:

http://www.corocarpediem.com/audio/uno.mp3

## Bailando el tango

El otro día fui a un club de danza. Estaban allí siete parejas ensayando para los próximos campeonatos de tango. Cada uno de los bailarines tenía su número en la espalda. Números todos diferentes, claro, y que iban de 1 a 14.

En el primer baile reparé en un hecho curioso: en cada pareja, la suma de los dos números era un cuadrado perfecto.

Para el segundo baile hubo un cambio de parejas y se dio una nueva coincidencia. Todas las parejas tenían una suma que era un número primo. Y además: en las tres parejas que estaban al lado izquierdo la suma era la misma, las tres que estaban a la derecha tenían sumas iguales, y el par que danzaba en el centro tenía una suma diferente de las anteriores.

Isabel tenía el número 1 en la espalda.

¿Cuáles son los números de las otras seis bailarinas?

La respuesta está extraída, aunque reelaborada, de la que presentan varios lectores de dicha revista, publicadas en el número 49 de la misma:

### Comprender

Hay que buscar DATOS, OBJETIVO y RELACIÓN.

DATOS

- 14 bailarines, 7 chicos y 7 chicas
- un número diferente en la espalda, desde el 1 al 14

- Isabel tiene el número 1
- bailan dos tangos, cambiando las parejas

OBJETIVO

- ¿Qué números tienen las otras seis bailarinas?

RELACIÓN

- En el primer tango, la suma de cada pareja era un cuadrado perfecto.
- En el segundo tango, la suma de cada pareja era un número primo.
- Y, además, la suma de las tres parejas de la izquierda era la misma, la suma de las tres de la derecha era la misma, la pareja central tenía una suma diferente a ambas.

### Pensar

La mejor estrategia debe ser ORGANIZAR LA INFORMACIÓN, y como hay demasiada será interesante utilizarla de forma ordenada y exhaustiva, utilizando una tabla para cada una de ellas.

### Ejecutar

Para el **primer tango** se podrán formar 49 parejas diferentes, de las cuales sólo nos interesan aquellas que tengan como valor de la suma de sus componentes un cuadrado perfecto. No podrá haber pareja con suma 1 ni tampoco con suma 36 (la pareja mayor será 14 + 14 = 28).

Por tanto, busquemos ordenadamente las parejas que sumen 4, 9, 16 o 25.

**Tabla 1**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma 4 | 1 + 3 | | | | | |
| Suma 9 | **1 + 8** | 2 + 7 | 3 + 6 | 4 + 5 | | |
| Suma 16 | 2 +14 | 3 + 13 | 4 + 12 | 5 + 11 | **6 + 10** | **7 + 9** |
| Suma 25 | 11 + 14 | 12 + 13 | | | | |

Aparecen trece parejas y sólo pueden estar siete. En el proceso de eliminación hemos de reparar primero en los bailarines que aparecen una sola vez. Son el 8, el 9 y el 10, por ello las hemos señalado en **color y negrita**. Los demás aparecen varias veces.

Estas tres parejas no pueden ser separadas, lo cual implica que los bailarines que aparecen con 8, 9 y 10 no pueden estar duplicados. La primera eliminación consistirá en buscar las otras parejas donde aparezcan 1, 6, 7 y prescindir de ellas.

**Tabla 2**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma 4 | ~~1 + 3~~ | | | | | |
| Suma 9 | **1 + 8** | ~~2 + 7~~ | ~~3 + 6~~ | 4 + 5 | | |
| Suma 16 | 2 +14 | 3 + 13 | 4 + 12 | 5 + 11 | **6 + 10** | **7 + 9** |
| Suma 25 | 11 + 14 | 12 + 13 | | | | |

Nos quedan aún diez parejas posibles.

Como la (2,14) hay que tomarla (el 2 no aparece en ninguna otra), consecuentemente ha de eliminarse la otra pareja donde aparece 14, es decir la (11,14). Ahora, el 11 sólo está en la pareja

(5,11), lo cual nos indica que ha de eliminarse la otra pareja con el 5, es decir la (4,5). Y esto nos conduce a preservar la pareja (4,12) y eliminar la (12,13).

**Tabla 3**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma 4 | | | | | | |
| Suma 9 | **1 + 8** | | | ~~4 + 5~~ | | |
| Suma 16 | 2 +14 | 3 + 13 | 4 + 12 | 5 + 11 | **6 + 10** | **7 + 9** |
| Suma 25 | ~~11 + 14~~ | ~~12 + 13~~ | | | | |

Con lo cual ya tenemos las siete parejas que bailaron el primer tango.

**Tabla 4**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma 4 | | | | | | |
| Suma 9 | **1 + 8** | | | | | |
| Suma 16 | **2 +14** | **3 + 13** | **4 + 12** | **5 + 11** | **6 + 10** | **7 + 9** |
| Suma 25 | | | | | | |

Para el **segundo tango** tendríamos que hacer una tabla similar a la anterior, pero con sumas de resultado números primos: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23 (recordemos que la pareja de suma mayor daría 28).

Aquí la exhaustividad es posible y llevaría, sin duda a la solución. Pero organizar la información es también acotar los resultados.

La suma de todos los números de los bailarines es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105.$$

Como las sumas de las parejas de cada lado de la pista son iguales, llamaremos I a la suma de cada pareja del lado izquierdo, C a la de la pareja central y D a la de las que están a la derecha.

Entonces: $$3\,I + C + 3\,D = 105$$

Como el número 105 es divisible por 3, también los es la suma $3\,I + C + 3\,D$.

Para ello, es necesario que C sea múltiplo de 3, pero como C es primo como condición del problema, tenemos obligatoriamente que ha de ser $C = 3$.

Como consecuencia, la pareja central es (**1**, **2**).

Y de aquí se obtiene

$$3\,I + 3\,D = 102 \qquad \text{e} \qquad I + D = 34.$$

Necesitamos, pues, dos números primos diferentes de la lista inicial que sumen 34.

Eso sólo es posible para 11 y 23.

La tabla de posibilidades, ahora, (recordemos que 1 y 2 no deben aparecer) es:

**Tabla 5**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Suma 11 | 3 + 8 | 4 + 7 | 5 + 6 |
| Suma 23 | 9 +14 | 10 + 13 | 11 + 12 |

Justamente las seis que nos faltaban. Con lo cual ya tenemos las siete parejas que bailaron el segundo tango.

**Tabla 6**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Suma 3 | **1 + 2** | | |
| Suma 11 | **3 + 8** | **4 + 7** | **5 + 6** |
| Suma 23 | **9 + 14** | **10 + 13** | **11 + 12** |

## Responder

¿Qué números tienen las bailarinas?

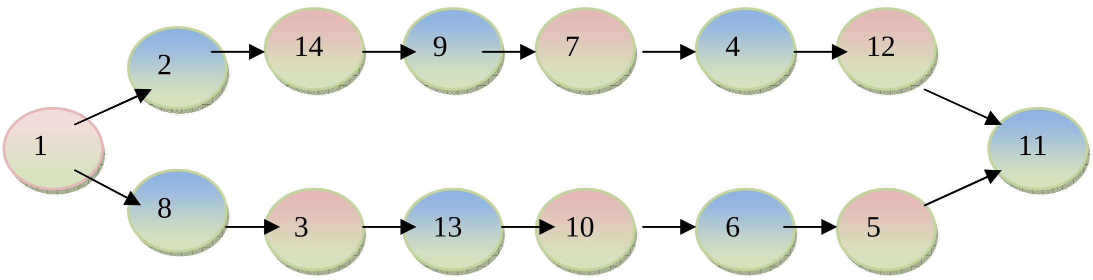
**Isabel tiene el número 1.**

Quien bailó con ella es chico: el 8 en el primer tango y el 2 en el segundo.


Quienes bailaron con ellos son chicas:

Con el 8 bailó el 3 en el segundo tango. Con el 2 bailó el 14 en el primero.


Podemos seguir el proceso con el siguiente esquema:




Todo este proceso se puede organizar también en una tabla que enfrente a las parejas de cada tango. Coloreando sucesivamente de un color o de otro según sepamos que es chico (azul) o chica (rojo), tendremos rápidamente la solución:

**Tabla 7**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primer tango | **1 – 8** | **2 – 14** | 3 – 13 | 4 – 12 | 5 – 11 | 6 – 10 | 7 – 9 |
| Segundo tango | **1 – 2** | **3 – 8** | 4 – 7 | 5 – 6 | 9 – 14 | 10 – 13 | 11 – 12 |

**Los bailarines 3 y 14 son chicas.**

Quienes bailaron con ellas son chicos: el 13 en el primer tango, el 9 en el segundo.

Éstos, a su vez, bailaron con las chicas siguientes: el 7 en el primer tango, 10 en el segundo.

**Tabla 8**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primer tango | 1 – 8 | 2 – 14 | 3 – 13 | 4 – 12 | 5 – 11 | 6 – 10 | 7 – 9 |
| Segundo tango | 1 – 2 | 3 – 8 | 4 – 7 | 5 – 6 | 9 – 14 | 10 – 13 | 11 – 12 |

**Los bailarines 7 y 10 son chicas.**

Quienes bailaron con ellas son chicos: el 6 en el primer tango, el 4 en el segundo.

Éstos, a su vez, bailaron con las únicas chicas que quedan por determinar: el 12 en el primer tango, el 5 en el segundo.

**Tabla 9**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primer tango | 1 – 8 | 2 – 14 | 3 – 13 | 4 – 12 | 5 – 11 | 6 – 10 | 7 – 9 |
| Segundo tango | 1 – 2 | 3 – 8 | 4 – 7 | 5 – 6 | 9 – 14 | 10 – 13 | 11 – 12 |

**Los bailarines 5 y 12 son chicas.**

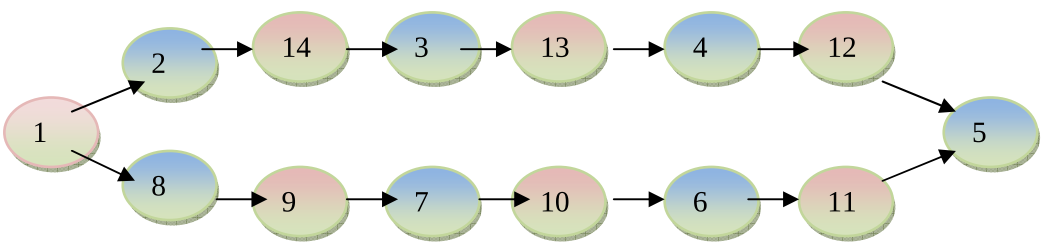
Es curioso que la comprobación se realiza en el último paso, cuando al determinar las dos últimas bailarinas vemos que ambas han bailado en cada tango con el único chico que quedaba por determinar, el 11.

**Respuesta: Las bailarinas tenían los números 1, 3, 5, 7, 10, 12 y 14.**

Claro que también, con la misma información inicial, podríamos decir que necesitamos dos números primos iguales (¿por qué no?) de la lista inicial que sumen 34. Y nos llevaría al valor 17. En este caso, procediendo de igual manera, la solución nos llevaría de forma encadenada, hasta el final:

**Tabla 10**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primer tango | 1 – 8 | 2 – 14 | 3 – 13 | 4 – 12 | 5 – 11 | 6 – 10 | 7 – 9 |
| Segundo tango | 1 – 2 | 3 – 14 | 4 – 13 | 5 – 12 | 6 – 11 | 7 – 10 | 8 – 9 |




Y la solución sería ésta:

**Segunda Respuesta: Las bailarinas tenían los números 1, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.**

El tango que han escuchado (suponemos) lleva por título “UNO”, letra de Enrique Santos Discépolo, música de Mariano Mores y arreglo coral de Dante Andreo. Está interpretado por el Coro “Carpe Diem” de La Laguna (Tenerife) (www.corocarpediem.com), bajo la dirección de Luis Correa. Esta pieza, junto a otras catorce, está incluida en su disco “Como un árbol” de muy reciente estreno.

Y, por último, nuestra debilidad, los problemas de abuelos. Éstas son sus soluciones:

## El abuelo y su nieto

El abuelo dice: “Cuando yo tenía un tercio de mi edad actual, nació mi hija mayor. Cuando ella tenía 2/3 de su edad actual, con menos de treinta años, tuvo a mi primer nieto, que ahora tiene un tercio de la edad de su madre”.

¿Cuáles son sus edades, todas ellas números enteros?

En estos problemas de redacción complicada con relaciones de múltiplos y factores entre los datos, donde interviene el pasado y el presente (y a veces el futuro), puede resultar valioso el ordenar estos datos, bien tabulándolos, bien en forma arbórea, como solemos hacer en nuestros artículos.

Si llamamos $x$ a la edad actual del abuelo e $y$ a la de la madre, podemos resumir los datos como sigue:

**Tabla 11**

| Época | Abuelo | Madre | Nieto |
|---|---|---|---|
| Cuando nace la hija | $\frac{x}{3}$ | 0 | *No existe* |
| Cuando nace el nieto | | $\frac{2}{3}y$ | 0 |
| Actualmente | $x$ | $y$ | $\frac{1}{3}y$ |

Pero poco podemos sacar de estas expresiones, aunque sí podemos deducir por la información dada que **y<30**; **x** e **y** son múltiplos de 3; y que $x = \frac{2}{3}y$ .

Actuaremos ahora por tanteo:

**Tabla 12**

| Y < 30 | $y = \dot{3}$ | $x = \frac{2}{3}y = \dot{3}$ | $y = \frac{1}{3}x$ | $\frac{1}{3}y$ |
|---|---|---|---|---|
| 29 | - | - | - | - |
| 28 | 42 | 63 | 21 | 14 |
| 27 | - | - | - | - |
| 26 | 39 | - | - | - |
| 25 | - | - | - | - |
| 24 | 36 | 54 | 18 | 12 |
| 23 | - | - | - | - |
| 22 | 33 | - | - | - |
| 21 | - | - | - | - |
| 20 | 30 | 45 | 15 | 10 |
| 19 | - | - | - | - |
| 18 | 27 | - | - | - |
| 17 | - | - | - | - |
| 16 | 24 | 36 | 12 | 8 |

Observamos que son soluciones las ternas (63, 42,14), (54, 36, 12), (45, 30, 10), (36, 24, 8)… y de ellas nos parecen un poco "prematuras" las que suponen una paternidad a los 12 o 15 años. Así que nuestra solución es: 63años el abuelo, 42 la hija y 14 años el nieto.

Hemos cometido la pequeña audacia de proponer este problema, ligeramente modificado, a la Comisión que crea las pruebas para el Torneo de Matemáticas para 2º de la ESO, de la Sociedad Isaac Newton.

(Puede verse la totalidad de los problemas propuestos en la siguiente dirección:

http://www.sinewton.org/cms/images/torneo/torneo27/torneo27problemas.pdf)

## Problema nº 4. El abuelo y su nieto

*Mi abuelo dice que mi madre, que me parió cuando ella tenía 24 años, tiene la mitad de su edad. Pero yo tengo un tercio de la edad de mi madre. ¿Cuáles son las edades de mi madre, de mi abuelo y la mía? Todas ellas son números enteros*

Y lo propusieron en la primera fase del mismo, donde participaron unos 450 alumnos de toda la Comunidad Canaria. De sus respuestas es posible deducir algunas cuestiones interesantes.

Solo dos alumnos que lo dejan en blanco, y entre el resto nos encontramos varios enfoques, correctos e incorrectos. Estos enfoques los podemos agrupar en varios apartados.

- Una mayoría de los que contestan equivocadamente lo hace porque entienden que *"…yo tengo un tercio de la edad de mi madre"*, hace referencia, pese al tiempo del verbo, a la edad que ***tenía*** su madre cuando el nació y lo resuelven de esta manera:

*Edad del nieto:* $\mathbf{\frac{24}{3} = 8}$ ; *edad de la madre:* **24+8=32** ; *edad del abuelo:* **32 · 2=64**

Otro parece entender que al tener su madre la mitad de la edad del abuelo, este debe tener dos veces la edad de la madre sumada a la que el nieto tiene:

*Edad del nieto:* $\mathbf{\frac{24}{3} = 8}$ ; *edad de la madre:* **24+8=32** ; *edad del abuelo:* **2 · 24+8=56**

Que constituye una de las respuestas erróneas más frecuente. En la misma línea (aparente) de razonamientos, otros alumnos piensan que si la madre tiene o tenía 24, el abuelo tiene o tenía 48, derivando luego hacia diferentes formas de calcular la edad del nieto.

- En otros casos entienden que la madre tiene ahora el doble de la edad que aparece en el enunciado: 48 años, o que *"… tiene la mitad…"* equivale a "tenía la mitad" y da el resultado de 48 años para la edad del abuelo. O confunde quién tiene la mitad de edad y hace: 24/2 = 12; 24 + 12 = 36;  36/2 = 18; 36 + 18 = 54. Terminando con una interpretación de las que vuelven locos a los correctores: Sol: 32, 54, 8.

Alguno fue más allá y suma a la supuesta edad de la madre, que ha calculado es 34, su mitad; y da para la edad del abuelo: 34 + 17 = 51. Un padre joven, pero un resultado posible, no como un par de respuestas que podríamos considerar disparatadas: un abuelo con 144 años o unas edades de -12, -48 y -72 años (¿?sí, valores negativos, pero al fin y al cabo, enteros).

- Otro apartado lo constituye el grupo de participantes que intenta resolverlo por medio de tanteos. Por ejemplo,

*Fracciones enteras:"* $\frac{25}{3} = \mathbf{8.\overline{33}}$, *no"*, (escribe el autor), "$\frac{30}{3} = \mathbf{10}$, *puede ser"; "* $\frac{27}{3} = \mathbf{9}$ *puede ser";* etc.

Formando pares (edad madre, edad nieto), hasta encontrar uno coherente con la relación de ser un tercio: (24, 0), (25, 1), (26, 2),… (35, 11), **(36, 12)** y duplicando la edad de la madre obtienen la del abuelo, aunque en la mayoría de los casos no comprueban esta respuesta. Otros ya colocan la posible edad del abuelo formando ternas: (24, 0, 48), (25, 1, 50),…, hasta llegar a la solución **(36, 12, 72).**

Un participante busca cantidades que puedan ser la edad del abuelo comprobando si un sexto de la edad es un número entero que pueda ser la edad del nieto. Así llega a 84, 42 y 14 y, como la inmensa mayoría, no comprueba los resultados.

Otro deduce que la edad que tenía la madre es 2/3 de la edad que tiene actualmente, de donde la edad del niño es 1/3 que equivale a 12 años, y luego calcula correctamente las edades.

Otros acuden a los múltiplos de: 24/3 = 8; 27/3 = 9, así que la edad será 27 para la madre y 54 para el abuelo. Nueva interpretación de "*…yo tengo un tercio de la edad de mi madre…*".

Alguno más busca múltiplos de 3 mayores que 24, pues se da cuenta de que si tiene un tercio, debe ser un múltiplo de tres. Pero lo razona.

- En otro grupo pondríamos a los que plantean ecuaciones para dar con la solución.

Plantean, por ejemplo: 2x+24+x+x+24 como un polinomio, que "resuelve" y llega a 4x = -48.

O 6x +3x = 2(x + 24) + x + 24, y resuelve obteniendo que x (la edad del nieto) es 12, siendo por tanto 6x la edad del abuelo y 3x la de la madre.

Y en otros casos plantean que 24+x=3x… También intentan plantear un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

Todo lo anterior nos induce a pensar que muchas veces la complejidad de un problema o un ejercicio está más en la mente y forma de razonar de los alumnos que en el ejercicio en si, objetivamente hablando.

En los archivos de la sociedad se conservan las pruebas realizadas por los alumnos desde los primeros Torneos, anónimas, esperando ser objeto de un análisis que nos parece enriquecería el campo de la Didáctica de las Matemáticas en estos niveles, alimentando de datos alguna tesis sobre el tema.

## El abuelo y su nieta

- Cuando yo tenía la edad que tu padre tiene hoy –dice el abuelo a su nieta-, él tenía la edad que tú tendrás cuando él llegue a mi edad y, por otra parte, cuando tú tengas la edad actual de tu padre yo tendré la edad que tendrá entonces tu padre más tu edad actual.
- Vaya abuelo, pensé que tenías 63 años.
- Pues no, soy algo mayor.

¿Cuáles son sus edades?

Como acostumbramos hacer, tabulemos los datos introduciendo las relaciones que el enunciado dice y las que se pueden deducir del mismo:

**Tabla 13**

| | Abuelo | Hijo | Nieto |
|---|---|---|---|
| Hace | H | N+A-H | - |
| Nace el hijo | A-H | 0 | - |
| Ahora | A | H | N |
| Nace la nieta | A-N | H-N | - |
| Tú tendrás… | - | A | N+A-H |
| Cuando tú tengas… | (2H-N)+N | 2H-N | H |

Donde *A, H* y *N* son las edades actuales de los tres protagonistas del problema, como puede deducirse.

Los años transcurridos desde el momento que nace el hijo hasta que el abuelo tiene la edad actual del hijo son los mismos para el abuelo (H-(A-H)) que para el hijo ((N+A-H)-0). Por tanto:

$$H - A + H = N + A \Longrightarrow 2H - A = N + A - H \Longrightarrow 3H = 2A + N \text{ (i)}$$

Por otro lado, cuando la nieta tenga la edad actual del padre, la edad del abuelo ((2H-N)+N) es la edad de la nieta en ese momento más la edad que tenía el abuelo cuando ella nació ((A-N)+H). Igualando:

$$2H - N + N = A - N + H \Longrightarrow 2H = A - N + H \Longrightarrow H = A - N \text{ (ii)}$$

Resolviendo el sistema formado por (i) y (ii), $\begin{cases} 3H = 2A + N \\ H = A - N \end{cases}$

obtenemos que A = 4N y que H = 3N.

Así que la edad del abuelo debe ser múltiplo de 4 y la del hijo múltiplo de 3. Con estas condiciones y siendo algo mayor de 63 años el abuelo, el primer múltiplo de 4 que sigue, 64, cumple las condiciones. Damos pues esta solución: Abuelo con 64 años, hijo de 48 años y el nieto con 16 años.

Para 68, siguiente múltiplo de 4, el hijo tendría 51 y la nieta 17, etc. Pero 64 es el valor "*algo mayor*" que enuncia el problema.

Y bien, ahora es el turno de presentar algunos problemas nuevos para que nuestros lectores traten de resolverlos y nos envíen sus soluciones, para comentarlas aquí mismo, en esta revista y en esta sección de la misma.

## El fósil de un número

(Procedencia: Fase provincial de Alicante de la **XIX Olimpiada Matemática**, 2008)

Dado un número natural N, se multiplican todas sus cifras. Se repite el proceso con el resultado obtenido, hasta obtener un número de una cifra únicamente; a ese número se le llama el fósil de N. Por ejemplo, el fósil de 327 es 8. Hallar el mayor número natural, con todas sus cifras distintas, cuyo fósil sea impar.

## El fantasma de un número

Otra versión del mismo (Procedencia: **15° Olimpíada de Mayo, Olimpiada Matemática Argentina,** 9 de Mayo de 2009, Nivel: **3$^{er}$ Ciclo Primaria –1$^{er}$ Ciclo Secundaria**)

A cada número natural de dos cifras se le asigna un dígito de la siguiente manera: Se multiplican sus cifras. Si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. Si el resultado es un número de dos cifras se multiplican estas dos cifras, y si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. En caso contrario, se repite la operación. Por ejemplo el dígito asignado a 32 es el 6 pues $3 \times 2 = 6$; el dígito asignado a 93 es el 4 pues $9 \times 3 = 27$, $2 \times 7 = 14$, $1 \times 4 = 4$.

Halla todos los números de dos cifras a los que se les asigna el 8.

Y aquí quedamos hasta la próxima entrega. Pero insistimos una vez más: lean el artículo, resuelvan los problemas, úsenlos con sus alumnos, si es posible, aporten luego a nuestra revista sus comentarios, soluciones, propuestas o simplemente el rico anecdotario acerca del comportamiento de la clase al resolver uno de estos problemas o cualquier otro. Anímense.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**