

NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 76, marzo de 2011, páginas 31–46

Matemáticas¹

Carlos Vinuesa del Río (Universidad de Cambridge²)*Artículo solicitado al autor por la revista*

Resumen	Motivados por la afición de Martin Gardner a la magia matemática, mostramos cómo algunos principios matemáticos pueden emplearse para hacer juegos de magia. En particular nos detenemos en el principio de paridad, el principio de Gilbreath y coincidencias del estilo de la paradoja de los cumpleaños.
Palabras clave	Martin, Gardner, magia, matemagia, paridad, Gilbreath, paradoja, cumpleaños.
Abstract	Motivated by Martin Gardner's liking for mathematical magic, we show how some mathematical principles can be employed in magic tricks. In particular we go over the parity principle, Gilbreath's principle and coincidences with the flavour of the birthday paradox.
Keywords	Martin, Gardner, magic, mathemagic, parity, Gilbreath, paradox, birthday.

1. Introducción

Antes de nada, una pregunta para ir pensando en algo: ¿Puede un caballo de ajedrez ir de una esquina del tablero a la diagonalmente opuesta pasando por cada casilla exactamente una vez?

Martin Gardner tuvo tantas inquietudes que sería muy difícil resumirlas aquí. Pero para dar una idea del tipo de cosas que le gustaba hacer, nada mejor que las palabras de Ronald Graham: “Martin ha transformado a miles de niños en matemáticos y a miles de matemáticos en niños”. Escribió más de 70 libros y ha sido posiblemente el divulgador matemático más famoso de la historia. Sus puzzles y problemas favoritos eran aquellos que requerían de una inspiración repentina que a él le gustaba llamar el momento *jajá!* Otra cosa que sin duda le apasionaba era la magia matemática; de hecho podríamos parafrasear la cita anterior y asegurar sin miedo a equivocarnos que Martin interesó a muchos magos en las matemáticas y a muchos matemáticos en la magia.

En las páginas siguientes trataremos de dar una visión variada y amena de este mundo del que tantas veces nos habló Martin donde conviven las matemáticas y la magia.

¹ Las letras mayúsculas MG son las iniciales de Martin Gardner.

² El autor agradece a la Fundación Ramón Areces la concesión de la beca postdoctoral de la que disfruta en la actualidad.



2. Paridad

Todos sabemos que existen números pares e impares. Aparentemente es una idea sencilla. Sin embargo hay literalmente cientos de excelentes y engañosísimos juegos de magia basados en este inocente principio.

2.1. Las monedas

Tenemos cuatro monedas³ sobre la mesa. Pedimos a un espectador que, mientras estamos vueltos de espaldas, realice 7 volteos (un volteo es coger una moneda que está cara arriba y ponerla cara abajo o viceversa) y después tape una de las monedas con su mano. Al girarnos, adivinamos si la moneda tapada muestra su cara o su dorso.

Introducimos una nueva moneda. Decimos al espectador que ahora puede realizar tantos volteos como quiera, con la única condición de decir “vuelta” cada vez que haga uno, y que tape una moneda al final. Pese a ello y a que hemos estado girados durante los volteos, adivinamos de nuevo si la moneda tapada muestra su cara o su dorso.

Un nuevo espectador entra en juego. Ahora, un espectador realiza un volteo y el otro le responde con otro volteo, como si estuvieran jugando “una partida”, hasta que finalmente, tras “mover” el segundo jugador, tapan una moneda. Pese a que no dicen cuántos movimientos realizan y a que estamos vueltos durante todo el proceso, de nuevo adivinamos si la moneda tapada muestra su cara o su dorso.

Pese a lo difícil que pueda parecer a simple vista, el juego anterior es muy sencillo de realizar. La clave para explicármolo es la siguiente observación: *un volteo altera la paridad del número de monedas que muestran su cara*. Imaginemos que hay unas cuantas monedas sobre la mesa (el número no es muy importante). Supongamos que el número de monedas cara arriba es par. Si se realiza un volteo sólo hay dos posibilidades:

- O bien volteamos una moneda que estaba cara arriba, teniendo una cara menos tras el volteo.
- O bien volteamos una moneda que estaba cara abajo, teniendo una cara más tras el volteo.

Así, en cualquier caso, tras el volteo el número de caras será impar. Y tras un nuevo volteo volverá a ser par. Y así sucesivamente: impar, par, impar, par, impar, par...

¡Ya sabemos cómo realizar el juego! Para la primera fase basta con que observemos la paridad del número de monedas cara arriba antes de girarnos. Como el espectador realiza 7 volteos, la paridad del número de caras cambiará tras los mismos. Así, si había un número par de caras ahora habrá un número impar y viceversa. Mirando las monedas que han quedado a la vista podremos saber si la que se oculta bajo la mano del espectador muestra su cara o su dorso.

En cuanto a la segunda fase, como ya sabemos, introducir una nueva moneda no complica las cosas aunque a ojos del espectador pueda hacerlo más difícil. Basta con que nos fijemos en la paridad del número de caras antes de girarnos, paridad que irá cambiando con cada “vuelta” que diga el

³ Si realizas este juego para pocas personas que están muy cerca puedes usar monedas cualesquiera. Sin embargo, si vas a realizar este juego para bastantes espectadores (por ejemplo en una clase) y dado que a cierta distancia es muy difícil distinguir si una moneda muestra su cara, te recomiendo que construyas pequeños discos de cartón que por un lado sean de un color y por el contrario de otro.

espectador. Una sencilla forma de no perdernos a la hora de controlar la paridad consiste en que nos giremos con el puño cerrado si el número de caras es par o bien con el pulgar extendido (“gesto de OK”) si es impar. Con cada “vuelta” cambiamos de una posición a otra y al final sólo tenemos que mirar nuestro dedo...

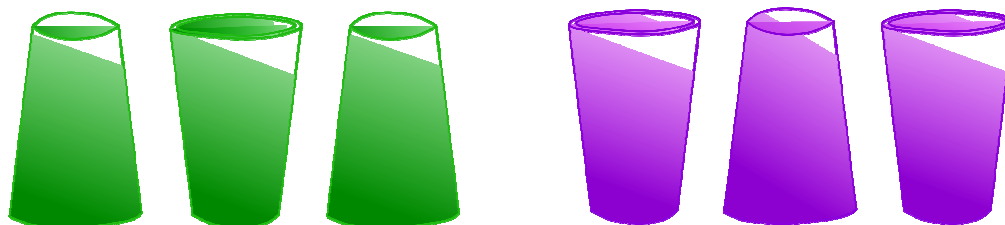
Por último, la introducción de un nuevo espectador y el hecho de plantear los volteos por pares (el segundo espectador responde siempre al movimiento del primero) hace que todo sea facilísimo, pues sabemos que el número de volteos será par y por lo tanto la paridad del número de monedas que muestran su cara no variará. Pese a que a ojos de los espectadores podría parecer más difícil que la segunda fase en realidad es mucho más fácil. Dicho sea de paso, esto es algo que ocurre con frecuencia en magia.

2.2. Los vasos

Este juego de las monedas recuerda a una curiosa apuesta con vasos que nos puede hacer ganar alguna que otra invitación⁴.

Se colocan tres vasos en línea, de manera que quedan alternados boca arriba y boca abajo. El movimiento permitido es coger dos vasos adyacentes y voltearlos sin cambiarlos de sitio. Mostramos cómo se pueden dejar los 3 vasos boca arriba y decimos que no es tan sencillo, retando al espectador a que haga lo mismo. El espectador es incapaz de hacerlo.

El secreto es tan simple que puede incluso que no engañe a nadie y te toque invitar a ti⁵. Al comienzo tú colocas los vasos como muestra la figura de la izquierda: boca abajo, boca arriba y boca abajo. Por supuesto, pondrías poner todos boca arriba en dos movimientos, pero conviene alargarlo un poco y no dejar los tres vasos boca arriba hasta que llevemos ya unos cuantos movimientos.



Después colocas los vasos como muestra la figura de la derecha: boca arriba, boca abajo y boca arriba. Es suficientemente parecido como para que pueda colar que estaban así al principio (aquí cuentan mucho tus dotes de actor para hacerlo con convencimiento y sin sentirte culpable). Como el movimiento permitido no cambia la paridad del número de vasos boca arriba (si se voltean dos vasos o bien habrá dos vasos más boca arriba si los dos estaban boca abajo, o bien dos menos si los dos estaban boca arriba, o bien los mismos si uno estaba boca abajo y otro boca arriba), el espectador no conseguirá poner todos los vasos boca arriba.

⁴ De hecho, si te fijas, tanto el juego anterior de las monedas como la mayoría del resto de los juegos de magia se pueden presentar también como apuestas. Si decides hacerlo así recuerda mandar siempre un 10% de lo que ganes a quienquiera que sea el autor del artículo donde lo leíste.

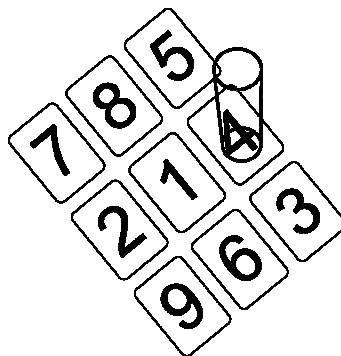
⁵ En este caso no es necesario que mandes el 10% de la factura a nadie.



Observa que tanto el hecho de que los vasos que se voltean tengan que ser adyacentes como el de que no se cambien de sitio son condiciones que no afectan a nada de lo que hemos dicho. Pero el hecho de poner esas condiciones despista un poco más al primo que pagará la siguiente ronda...

2.3. La mansión embrujada

Colocamos sobre la mesa 9 cartas cara arriba formando un “cuadrado” de 3 x 3 cartas.



Sacamos un sobre, explicando al espectador que dentro del mismo hay una tarjeta con instrucciones que hemos escrito basándonos en las decisiones que creemos que va a tomar en un momento. Le pedimos que coloque un vaso (o cualquier otro objeto, pero es bonito que sea un objeto transparente) sobre la carta que más le guste de todas. Cuando lo hace (imaginemos que coloca el vaso sobre el 4 como en la figura) le decimos “Ya lo sabía”. Le decimos que un “movimiento” consiste en desplazar el vaso de una carta a otra contigua en vertical o en horizontal (¡en diagonal no vale!) y le entregamos la tarjeta con instrucciones que hay dentro del sobre, donde puede leer:

1. Retira el 3 y mueve 3 veces.
2. Retira el 6 y el 8 y mueve 5 veces.
3. Retira el 7 y el 9 y mueve o bien 7 veces o bien 9 veces.
4. Retira el 2 y mueve tantas veces como el número que prefieras de los que quedan sobre la mesa.
5. Mueve tantas veces como el número sobre el que te encuentras y retira el 5 y el 1. Estás sobre el 4.

El nombre de este juego procede de que a veces se presenta diciendo que las nueve cartas son las estancias de una mansión embrujada en la que las habitaciones desaparecen. Aunque, como estarás pensando (el título de la sección ayuda bastante), este juego está basando en la paridad, seguro que hay algo que todavía no te cuadra... ¿Y si hubieras puesto el vaso sobre el 3 en lugar de sobre el 4? Bueno... digamos que hay una parte del secreto “no tan matemática”... La tarjeta donde están escritas las instrucciones tiene dos caras y en la otra cara pone:

1. Retira el 6 y mueve 5 veces.
2. Retira el 7 y el 9 y mueve 8 veces.
3. Retira el 5 y mueve 5 veces.
4. Retira el 8 y el 2 y mueve tantas veces como el número que prefieras de los que quedan sobre la mesa.
5. Mueve tantas veces como el número sobre el que te encuentras y retira el 1 y el 3. Estás sobre el 4.

Así que si el espectador comienza sobre una carta par sacamos y le ofreceremos la tarjeta mostrando las otras instrucciones y si comienza sobre una carta impar se la ofreceremos mostrando estas últimas. ¡Vaya argucias tienen estos magos! Poco más hay que explicar. Como las cartas pares e impares están alternadas como las casillas blancas y negras de un tablero de ajedrez⁶, en cada movimiento se cambia de paridad. Las instrucciones siempre dicen que se retire una carta de la paridad contraria a aquella en la que se encuentra el espectador. Además, y esto es lo que utilizamos al final, si el espectador mueve tantas veces como el número sobre el que se encuentra entonces siempre terminará en una carta par (par + par = par e impar + impar = par).

En realidad, si cambiamos un poquito el inicio, el juego se presta a que muchos espectadores lo realicen a la vez, moviéndose “mentalmente” sobre las cartas, lo que hará que el efecto sea distinto y mucho más fuerte. La primera instrucción podría ser, por ejemplo, que cada espectador se sitúe sobre la carta que quiera y mueva tantas veces como indica su valor. Así, sabemos que todo el mundo está sobre una carta par y podemos seguir nuestra lista de instrucciones (ahora sólo hay una lista para todo el mundo), o bien con las primeras que hemos escrito o bien con otras de nuestra invención, pues ahora que entendemos el secreto podemos jugar y hacer nuevas versiones del juego. De hecho, para que veas que se puede hacer, el conocido ilusionista David Copperfield presentó una versión de este juego por televisión⁷, invitando a los espectadores a participar desde sus casas.

2.4. El tapiz del señor Kolo

El siguiente juego está basado en una idea antigua de la que no se conoce al autor original. Richard Vollmer (Vollmer, 1991, pp. 53 y siguientes) lo llama *La tapisserie de Mr. King* y en español (Giobbi, 2004, pp. 77-81) se conoce como *El tapiz del señor Kolo*. La historia es la siguiente:

Se explica que el millonario señor Kolo mandó realizar un carísimo tapiz de vivos colores, que se representa con las doce figuras y los cuatro dieces de la baraja (pues son las cartas con más color), formando un “cuadrado” de 4 x 4 cartas. En la figura de la página siguiente se muestra el tapiz desde el punto de vista del mago, el público estaría situado en frente.

Dado el desorbitado precio del tapiz, el señor Kolo decidió que sería buena idea marcar el mismo con su inicial, la letra K, pues así en caso de robo podría reconocerlo de nuevo. La marca se realiza volteando algunas de las cartas, como muestra la figura (recuérdese que la figura muestra el punto de vista del mago, así que los espectadores verán algo parecido a una letra K mayúscula.



⁶ Recuerda que todavía tenemos pendiente una pregunta sobre un caballo de ajedrez...

⁷ Puedes verla aquí: <http://www.youtube.com/watch?v=OZ1WTRkTjcA>.



Cierto día, el señor Kolo se fue de viaje y unos ladrones entraron a robar el tapiz. Para llevárselo tuvieron que doblarlo. El tapiz de cartas se va doblando por las líneas horizontales o verticales que los espectadores deseen, hasta que ocupa sólo el tamaño de una carta (todas las cartas terminan en un montón).

Se cuenta cómo el Señor Kolo, tiempo después, creyó reconocer su tapiz en una tienda de antigüedades. Mandó que lo extendieran y se pudo comprobar que era el suyo, pues su inicial estaba allí por cuadruplicado: al extender las cartas sobre la mesa, todas están cara abajo, excepto los cuatro reyes, que están cara arriba.



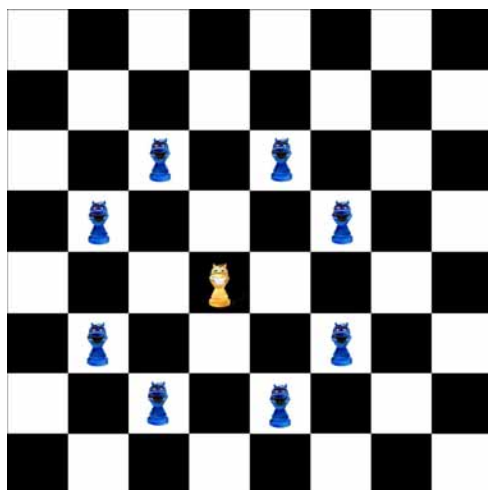
El juego se basa de nuevo en la paridad, concretamente en el que es conocido como principio de plegado de Henry Dudeney. Para entenderlo, pensemos en la siguiente situación: si disponemos las cartas cara arriba y cara abajo alternándolas como si fueran las casillas blancas y negras de un tablero de ajedrez, cualquier plegado terminará dejando todas las cartas en el mismo sentido (todas cara arriba si terminan sobre una de las cartas que estaba cara arriba originalmente y todas cara abajo si lo hacen sobre una de las cartas que estaba cara abajo originalmente). Piénsalo, es muy sencillo.

Una vez entendido eso, si queremos que una carta termine tras el plegado en sentido contrario al resto, partiendo de la configuración de “tablero de ajedrez”, bastará con que volteemos la carta deseada. Si lo que queremos es que los cuatro reyes terminen en sentido contrario al resto de las cartas, bastará con colocar todas las cartas en la configuración de “tablero de ajedrez” y voltear ahora los cuatro reyes. Coloquemos los reyes (desde nuestra perspectiva) en las dos posiciones situadas más a la derecha de la fila más cercana al público y en las dos posiciones situadas más a la izquierda y más a la derecha respectivamente de la segunda fila más cercana a nosotros, como mostraba la primera figura. Pues bien, si ahora volteamos las cartas necesarias para llegar a la configuración de “tablero de ajedrez” comenzando por la carta situada más a la izquierda de la fila más cercana al público, y a continuación cambiamos de sentido los cuatro reyes (independientemente del sentido en que se hayan), obtendremos la configuración de “K del señor Kolo”. Así, al principio, las posiciones en que colocamos los reyes son cruciales, pero como las posiciones de todas las cartas restantes no importan es muy fácil colocar los reyes sin levantar sospechas. Por cierto, si te estás preguntando qué hacer en caso de que tras el plegado queden todas las cartas cara arriba y los cuatro reyes cara abajo, es muy sencillo: cuando se termine el plegado del tapiz, coge el montón de cartas (como para mostrarlo) y voltéalo sin dar más explicaciones. Si no le das importancia, nadie se la dará.

El principio de plegado es muy flexible y podrás crear nuevos juegos basados en él (coloca las cartas de manera que las que muestran su dorso formen tu dibujo favorito y mira a ver cuántas cartas tienes que voltear para llegar a la disposición en “tablero de ajedrez”). De hecho, la forma de plegar no tiene por qué imitar a la de una tela real, podemos coger por ejemplo una sola carta y doblarla hacia el lado que queramos. Las posibilidades son muchas ¡juega con ellas!

2.5. El caballo

Para terminar esta sección, retomemos la pregunta del comienzo del artículo: ¿Puede un caballo de ajedrez ir de una esquina del tablero a la diagonalmente opuesta pasando por cada casilla exactamente una vez? El ataque más directo quizá sería tratar de encontrar uno de esos caminos (infructuosamente). Sin embargo, podemos dar una respuesta negativa de modo mucho más elegante, basándonos de nuevo en la paridad.



¡Ajá! Cuando un caballo de ajedrez realiza un movimiento, siempre cambia de color (o bien pasa de una casilla negra a una blanca como en la figura, o bien al contrario). Es decir, si un caballo parte de una esquina blanca, los colores de las casillas que pisará serán blanco (B), negro (N), B, N, B, N, B... Si queremos que el caballo termine en la esquina diagonalmente opuesta, la lista tendrá que comenzar y terminar en B. Pero el caballo tiene que dar exactamente 63 saltos para pisar las 64 casillas, una cada vez. Y por lo tanto, si empieza en una casilla B, tras los 63 saltos terminará en una casilla N, lo cual es una contradicción.

3. Orden en el caos

Mezclar la baraja en una partida de cartas es la garantía que tienen los jugadores de que nadie posee información sobre las cartas que se reparten. ¿Y si pese a la mezcla pudiéramos saber mucho de las cartas? Bienvenidos al mundo del principio de Gilbreath.

3.1. El principio de Gilbreath

Lo primero que hay que decir es que, pese a la sugerente introducción, es difícil que puedas sacar provecho de todo lo que sigue en una partida de cartas. Sin embargo sí que podrás realizar algunos sorprendentes juegos de magia. Por ejemplo:

Entregamos una baraja⁸ a un espectador que va repartiendo cartas sobre la mesa hasta que él desea para formar dos montones (el que queda sobre la mesa y el que queda

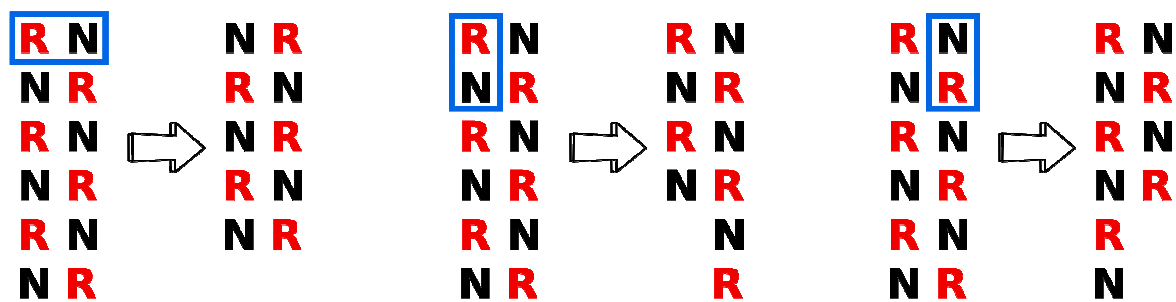
⁸ Al igual que en el juego del tapiz del señor Kolo y en todos los demás que aparecerán en el artículo, siempre que nos refiramos a una baraja será una baraja de póquer sin comodines, es decir las 52 cartas: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q y K de picas, corazones, tréboles y diamantes.



en su mano). El propio espectador mezcla a la americana⁹ los dos paquetes formados. Cogemos la baraja recién mezclada por el espectador y sin mirar ninguna carta la llevamos a nuestra espalda o debajo de la mesa. Utilizando tan sólo nuestro tacto podremos encontrar tantos pares de cartas de diferente color como se nos pida.

Como has adivinado, el juego funciona por el principio de Gilbreath. Ahora sólo falta saber qué es el principio de Gilbreath. Antes de nada coge una baraja y ordena sus cartas de manera que se alternen las cartas de ambos colores: roja, negra, roja, negra, roja, negra... Reparte en un montón sobre la mesa cara abajo y de una en una aproximadamente la mitad de la baraja. Mezcla a la americana el montón que acabas de formar sobre la mesa con el que tienes en tu mano. Comienza a sacar pares de cartas o bien de arriba o bien de abajo y comprueba que absolutamente todos están formados por una carta de cada color.

La explicación de por qué sucede lo anterior es sencilla. Si tenemos un montón en el que las cartas se alternan R, N, R, N, R, N... y otro en el que se alternan N, R, N, R, N, R... y los mezclamos a la americana, podemos analizar de qué paquete proceden las dos cartas que quedarán como cartas superiores tras la mezcla. Si cada una procede de un paquete, entonces serán de distinto color y además, olvidándonos de ellas, tendremos la misma situación (ahora con los colores cambiados de lado) para continuar este “análisis hacia atrás de la mezcla”. La columna izquierda del siguiente esquema muestra esto de un modo más gráfico.



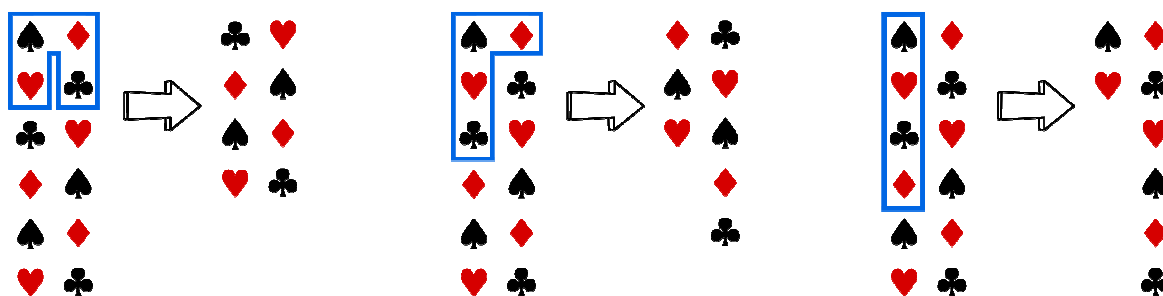
Si son las dos del mismo paquete, entonces también serán de distinto color y además, olvidándonos de ellas, tendremos la misma situación (esta vez exactamente) para continuar nuestro análisis (ver las otras dos columnas del esquema anterior). Repitiendo este razonamiento, podemos ver muy fácilmente por qué todas las parejas de cartas estarán formadas por un naipe de cada color. Si te preocupa qué pasará cuando se llegue a la parte de abajo de los montones, simplemente piensa que puedes hacer el análisis desde la parte de abajo del mazo, la mezcla es igual vista desde abajo que desde arriba (eso sí, es importante que la baraja esté completa o, en este caso, que tenga un número par de cartas).

Pero el principio de Gilbreath¹⁰ es mucho más general. Si en lugar de colocar en un montón R, N, R, N, R, N... y en el otro N, R, N, R, N, R... Colocamos en un montón pica, corazón, trébol, diamante, pica, corazón, trébol, diamante... y en el otro diamante, trébol, corazón, pica, diamante, trébol, corazón, pica... tras la mezcla tendremos que en cada grupo de cuatro cartas que cojamos de arriba o de abajo habrá una de cada palo. El siguiente esquema muestra lo que ocurre en este caso si

⁹ La mezcla por hojear en la mesa o mezcla a la americana consiste en, una vez formados los dos paquetes a mezclar, utilizar los pulgares en el canto de sus respectivos paquetes para ir dejando caer sobre la mesa las cartas de un montón y otro intercaladas.

¹⁰ El principio de Gilbreath y su uso en el juego anterior fueron descritos por primera vez por Norman Gilbreath en el artículo *Magnetic Colors* (Gilbreath, 1958, p. 60). Desde entonces han aparecido decenas de ingeniosas variantes y juegos basados en él.

las cuatro cartas superiores tras la mezcla provinieran dos de cada montón, tres de uno y una de otro o las cuatro del mismo montón (las simétricas de las dos últimas posibilidades serían completamente análogas).



El maestro Juan Tamariz me contó una forma sencilla y visual de ilustrar este principio. Consiste en colocar nuestras manos frente a nosotros, una con su palma hacia nuestro cuerpo y la otra con su dorso hacia nuestro cuerpo y emplear nuestros dedos índices, corazones, anulares y meñiques (a modo de cartas) para realizar una mezcla. Sea cual sea la forma en que la realicemos, siempre habrá cuatro dedos de nombres distintos arriba y otros cuatro abajo.

No vamos a realizar otro esquema, pero lo mismo funciona para grupos de 13 cartas. Si colocamos las cartas de un montón A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K y las del otro K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, A entonces tras mezclar ambos montones a la americana tendremos una carta de cada valor en cada uno de los cuartos de la baraja.

Observemos (porque dentro de un momento será algo importante) que ninguna de las mezclas americanas que hemos considerado hasta ahora tiene que ser perfecta o tener regularidad alguna. De hecho, en el caso extremo, todo lo anterior funciona si primero caen todas las cartas de un paquete y luego todas las del otro, es decir, si “la mezcla” consiste simplemente en poner un montón sobre el otro.

3.2. El principio de Fulves

Karl Fulves (Fulves, 1984, pp. 48-49) propone la siguiente variación del principio de Gilbreath en el juego *ESP + MATH*.

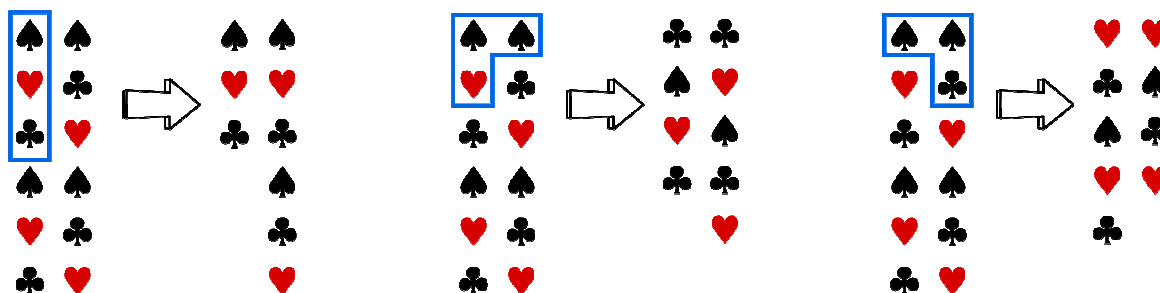
El espectador mezcla entre sí dos paquetes de cartas. A continuación, toma las tres cartas superiores, las mira y si se repite algún palo entonces se las entrega al mago que sin mirarlas adivina el palo repetido y voltea una de las cartas de dicho palo. Si no se repite ningún palo entonces las tres cartas se desechan. La adivinación del palo repetido y la localización de una de las cartas de dicho palo se realizan con éxito tantas veces como se quiera.

En esta interesante variante no sólo sabemos algo sobre las cartas de cada grupo de tres (qué palo aparece dos veces en caso de aparecer alguno) sino que además sabemos dónde va a estar una de las cartas cuyo palo se repite. Para realizar el juego, empleamos sólo cartas de tres palos (digamos que descartamos los diamantes). En un montón colocamos las cartas en la secuencia pica, corazón, trébol... y en el otro en la secuencia pica, trébol, corazón, pica, trébol, corazón... Tras la mezcla, de haber un palo repetido en el primer trío, será picas. Si no lo hubiera, de haber un palo repetido en el segundo trío, será picas. Y así sucesivamente hasta que haya un palo repetido. Cuando lo haya, no sólo sabemos que es picas sino que la carta superior del trío es de picas. Además, ahora



miraremos el palo que no aparece en esas tres cartas. Ése será el palo que se repita en el próximo trío en el que haya un palo repetido, siendo la carta superior de dicho palo.

Para convencernos de que esto es así siempre, podemos realizar un análisis inverso de la mezcla, al igual que hacíamos con el principio de Gilbreath. La primera columna del esquema muestra que si las tres cartas superiores provienen del mismo paquete entonces no se repite ningún palo en el primer trío y las restantes cartas quedan en la misma configuración que teníamos (por supuesto, si las cartas provinieran del montón de la derecha, la figura y el razonamiento serían completamente análogos). Las otras dos columnas muestran por qué siempre que las cartas provengan de los dos paquetes se repiten picas y el palo que no aparece en el trío es el próximo que se repetirá, pues la nueva configuración es análoga a la que había pero con este palo ocupando el lugar de las picas.

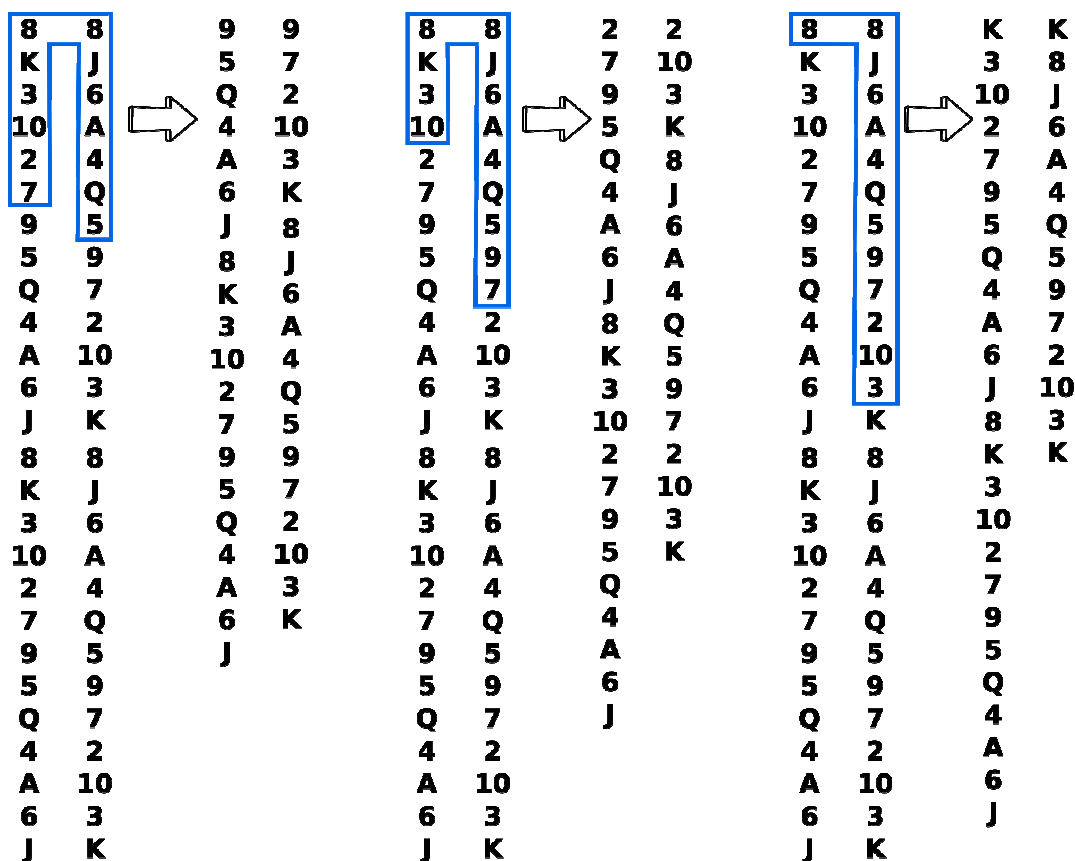


Es cierto que es un poco “feo” que cuando ningún palo se repite tenga que ser el espectador quien nos lo diga. Para que siempre hubiera repetición de palo tendría que cumplirse la condición de que en cada trío hubiera cartas que provienen de los dos paquetes. Eso exige una mezcla muy regular. Pensando en estas cosas, se me ocurrió lo siguiente.

Cortamos una baraja por la mitad y el espectador mezcla los dos paquetes de cartas. A continuación, repartimos las cartas a cuatro personas sin mirarlas por sus caras y les decimos que lo normal es que algún valor se repita entre sus cartas. Que las pongan en abanico frente a ellos y que de alguno de los valores que se repiten saquen una carta del centro (que no sea la de arriba del todo sino una que esté más centrada). Los espectadores así lo hacen y después nosotros sacamos una carta de cada uno de los cuatro paquetes (sin mirar las caras de las cartas). Finalmente, se comprueba que las cuatro cartas coinciden en valor con las cuatro escogidas por los espectadores.

El secreto no es más que una generalización del principio anterior. Si colocamos las cartas de un paquete repitiendo la secuencia A, B, C, D, ..., X, Y, Z y en el otro repitiendo la secuencia A, Z, X, Y, ..., D, C, B entonces tras la mezcla, en el primer grupo que se repita algo se repetirá una A y la carta superior del grupo será una A. En el siguiente grupo que se repita algo, se repetirá justamente la que no ha salido en el anterior grupo en el que había repetición.

Si hacemos nuestros grupos de 13 cartas, además, es casi imposible que el espectador mezcle tan irregularmente como para no incluir cartas de ambos montones en todos los grupos de 13. Es decir, basta con elegir una ordenación de los valores de la baraja, por ejemplo 8, K, 3, 10, 2, 7, 9, 5, Q, 4, A, 6, J, y colocarla dos veces seguida, para a continuación colocar otras dos veces la ordenación 8, J, 6, A, 4, Q, 5, 9, 7, 2, 10, 3, K. Cuando vayamos a hacer el juego, cortaremos nosotros mismos por la mitad exacta (entre la J y el 8) y ofreceremos los dos montones al espectador para que los mezcle a la americana. Concluida la mezcla, entregaremos las 13 primeras cartas a un espectador, las 13 siguientes a otro y así sucesivamente. En cada montón habrá un sólo valor repetido que será el de la carta de la posición superior. El esquema muestra algunos ejemplos de lo que ocurre y por qué en el siguiente grupo se repetirá la carta que no está en el primero.



4. ¿Qué coincidencia!

¿Recuerdas aquella vez que conociste a alguien en un viaje y descubristeis que una amiga tuya conocía a su hermana? Pues no, no fue una gran coincidencia. Por ejemplo, un estudio realizado en los Estados Unidos, mostraba que la probabilidad de que dos estadounidenses elegidos al azar tuvieran un amigo en común era algo así como el 1%, mientras que la de que quedaran unidos por una cadena de dos intermediarios ¡era superior al 99%! (Gardner, 1983, p. 119).

4.1. La paradoja de los cumpleaños

Una deliciosa “paradoja” (no es una contradicción lógica, sino algo contrario a la intuición de la mayoría de las personas) similar a la anterior es la conocida como “paradoja de los cumpleaños”:

En una reunión de 23 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es superior al 50%. Si en la reunión hay más de 60 personas la probabilidad es mayor que el 99%.

Pese a lo sorprendente de la afirmación anterior, podemos hacer unos sencillos cálculos para convencernos de la veracidad de la misma. Vamos a calcular la probabilidad aproximada (desechamos los años bisiestos y asumimos independencia entre los cumpleaños de los asistentes, es decir, no estamos en una fiesta llena de gemelos, por ejemplo) de que no haya dos personas con el mismo cumpleaños en la reunión. Ordenemos a las 23 personas en una fila. La probabilidad de que el segundo no tenga el mismo cumpleaños que el primero es 364/365. La probabilidad de que el tercero no tenga el mismo cumpleaños que alguno de los otros dos (supuestos ya con distinto cumpleaños) es 363/365.



Siguiendo este razonamiento, tenemos que la probabilidad de que no haya dos personas con el mismo cumpleaños entre las 23 es el producto de 22 fracciones:

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{343}{365}$$

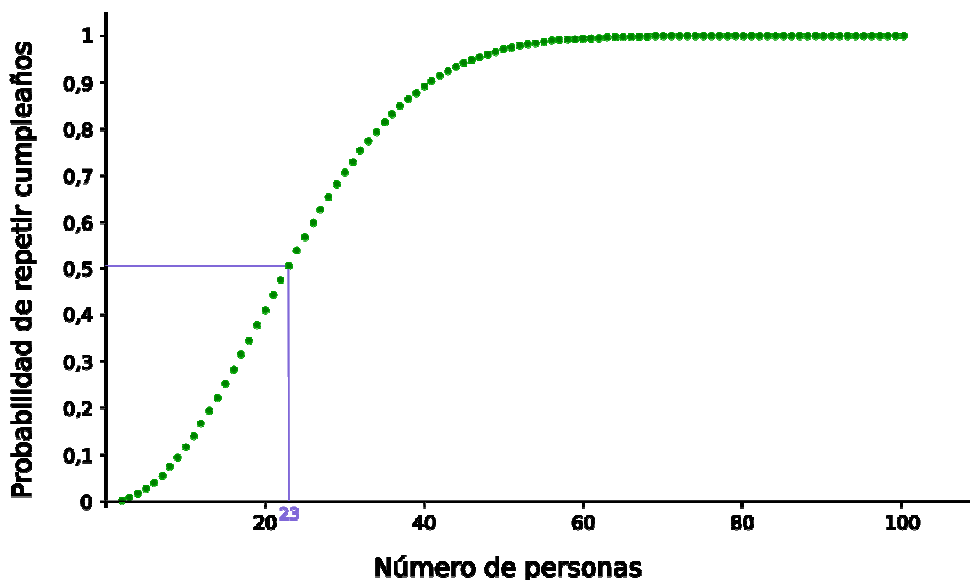
¿Y eso cuánto es? Uno podría ayudarse de una calculadora usual y teclear mucho o incluso de un ordenador, pero podemos hacer un regate para calcular aproximadamente esta cantidad. Para x pequeño, sabemos que $\exp(-x)$ es como $1 - x$, pues el polinomio de Taylor de $\exp(-x)$ en torno a 0 es $1 - x + x^2/2 - x^3/6 + \dots$. Así, el producto anterior es

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \left(1 - \frac{3}{365}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{22}{365}\right) \approx \exp\left(-\frac{1+2+3+\dots+22}{365}\right)$$

Usando el truco de Gauss¹¹ para sumar los elementos de una progresión aritmética, esto es

$$\exp\left(-\frac{22 \cdot (22+1)}{2 \cdot 365}\right) = \exp\left(-\frac{253}{365}\right) = 0,499\dots$$

Así, la probabilidad de que sí haya dos personas que cumplen los años el mismo día será aproximadamente $1 - 0,499$, es decir, rondará el 50%. El resultado realizando las cuentas exactamente sería 0,507..., ligeramente superior a al 50%, como decíamos antes. Cálculos muy similares nos convencerán de que con el doble de personas en la reunión es muy probable que dos tengan el mismo cumpleaños. Podemos hacer una gráfica de la probabilidad de que dos personas compartan cumpleaños dependiendo del número de personas en la reunión. Tendría esta pinta:



¹¹ El pequeño Gauss nos enseñó que hacer la suma $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ dos veces es más fácil que hacerla una sola vez. Así, agrupando convenientemente los sumandos,

$$2 \cdot S = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \dots + (n+1) = n(n+1).$$

Como ves, a partir de unas 60 personas es casi seguro que dos de ellas tienen el mismo cumpleaños, y a partir de unas 40 yo ya me apostaría una *Coca-Cola*. Es divertido hacer el experimento en una clase, pidiendo a los alumnos que vayan diciendo su día de nacimiento (comenzando por los nacidos en enero y avanzando de mes en mes) hasta que aparece una coincidencia. Si en una clase hay unos 30 alumnos y no sabes si arriesgarte a realizarlo, ten en cuenta tres cosas:

1. El hecho de que no funcionara también sería instructivo; enseña que aunque algo sea bastante probable no tiene por qué ocurrir.
2. Si eres el profesor es muy probable que tengas acceso a las fechas de nacimiento de los alumnos y puedes comprobar si el experimento va a funcionar con antelación (si lo haces, comprueba que los alumnos cuyas fechas coinciden estén en clase el día que realizas el experimento). Por supuesto siempre debes negar que miraste las fechas de nacimiento de los alumnos, al igual que yo negaré que te he dicho esto.
3. Si no tienes posibilidad de hacer lo que dice el punto 2, siempre queda el miserable e innoble recurso (que me encanta) de, una vez que todos hayan dicho sus fechas de cumpleaños, decir como despreocupadamente que la tuya es el “x de y”, donde el “x de y” es la fecha de nacimiento de alguno de los pobrecillos que acaban de decirla. El elemento en cuestión dirá “¡Ésa es la mía!” y tú dirás “Anda, no bromees, que no ha salido, pues no ha salido...”, a lo que él contestará “Que sí, que sí que es...”. Al terminar la clase, apunta esta fecha en tu agenda y prepárate a recibir algunas felicitaciones o regalos en dicha fecha por parte de tus alumnos. Si haces esto en todos los cursos en los que des clase, dentro de unos cuantos años te felicitarán cada día...

4.2. Coincidencia en dos barajas

Hablando de coincidencias, sería bonito poder aplicar algo del estilo de lo anterior a un juego de cartas. Pues se puede hacer. Lo siguiente es cierto:

La probabilidad de que al mezclar dos mazos de cartas (da igual españolas que de póquer o que mezclemos dos paquetes iguales de 13 cartas) tengamos alguna carta en la misma posición en los dos mazos es muy cercana a $1 - 1/e = 0,632...$

De hecho, es cierto el siguiente

Teorema: Dados dos mazos de n cartas mezclados, la probabilidad de que alguna carta esté en la misma posición en los dos mazos es

$$1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Observemos que como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} = 0,367...$ y $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{1}{(n+1)!}$ (pues tenemos una

serie alternada con términos que disminuyen en valor absoluto) entonces el teorema nos dice que la probabilidad de coincidencia es $1-1/e$ con un error más pequeño que $1/(n+1)!$ Luego para n “grande” (digamos a partir de 10, por ejemplo) la probabilidad de que alguna carta coincida en la misma posición es $1-1/e$ con un error pequeñísimo, no dependiendo la probabilidad apenas de n (el número de cartas de cada mazo). Es curiosa la frecuencia con la que aparece el número e en contextos inesperados.



Vamos a demostrar el teorema. Una vez mezclados los dos mazos, decimos que el orden de las cartas del primero de ellos es “el bueno”. La primera carta es la carta 1, la segunda es la carta 2 y así sucesivamente. Entonces, considerando las cartas del otro mazo con esta numeración, es como si hubiéramos mezclado un mazo con cartas numeradas 1, 2, 3,... , n y nos preguntáramos si habrá alguna carta en la posición que coincide con su número de orden.

Una permutación que no deja fijo ningún elemento se llama desbarajuste. El número de permutaciones de n elementos es $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Por el principio de inclusión-exclusión¹², es fácil calcular el número de desbarajustes de n elementos.

Si llamamos A_j al conjunto de las permutaciones de n elementos con el número j en la posición j , el número de desbarajustes de n elementos será

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

El tamaño de cualquiera de los A_j es $(n-1)!$, pues “el j ” ya está fijo y los otros $n-1$ podemos ordenarlos de cualquier manera. Hay $\binom{n}{2}$ intersecciones 2 a 2 y cada una de ellas tiene tamaño $(n-2)!$ y así sucesivamente. Luego, el principio de inclusión-exclusión nos dice que D_n es:

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots \pm \binom{n}{n}(n-n)! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (n-j)! (-1)^j = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Luego la probabilidad de que una permutación sea un desbarajuste es $\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$ que es lo que queríamos probar.

Ya sé lo que te estás preguntando: ¿Y si llamo a dos amigos, les digo que mezclen cada uno una baraja y después de repartir a la vez una a una las cartas cara arriba resulta que ninguna coincide? Bueno, para eso hay una herramienta de extremada utilidad llamada “jeta”. Puedes plantear el experimento de la siguiente manera: “Mirad, a continuación cada uno vais a mezclar una baraja [les haces gestos para que mezclen] y pese a las mezclas, vais a repartir sobre la mesa una a una cara arriba las cartas y habrá una carta que coincida en la misma posición en las dos barajas... [les haces gestos de que comiencen a repartir y mientras siguen repartiendo continúas hablando] Y mirad que es difícil... Es bastante complicado... Porque los dos habéis mezclado a fondo... Y claro, en estas condiciones sería casi un milagro... Una posibilidad entre millones... [sí, está permitido decir algunas mentirijillas... Y en el momento en que aparezca la carta que coincide cambias el tono y la actitud] ¡Y sin embargo ahí está! ¡Efectivamente una carta coincide! ¡Enhorabuena a los dos!”. Pues bien, 63 de cada 100 veces la cosa terminará así, pero si siguen repartiendo y las cartas se terminan sin coincidencia, sigues con el mismo tono: “Por lo tanto, como podéis comprobar y como ya os anunciaba, pese a que os esforcéis es difícilísimo que dos cartas coincidan. Hoy, como digo, vamos a intentarlo gracias a la magia. Mezclad, ahora sí (¡como si antes no hubieran mezclado!), las barajas a fondo y vamos a ello [lo dices todo con el tono de que lo anterior era sólo una prueba para comprobar la dificultad de la

¹² El principio de inclusión-exclusión (abreviado con las graciosas siglas PIE) no es otra cosa que la generalización del hecho de que el número de elementos de la unión de A y B es el número de elementos de A más el número de elementos de B menos el número de elementos de la intersección de A y B (como la intersección se cuenta dos veces al sumar los elementos de A y B , hay que restarla una vez).

hazaña] ¡Comenzad a repartir!”. La probabilidad de que en ninguno de los dos repartos coincidan dos cartas en la misma posición es $1/e^2=0,13\dots$, es decir, 87 de cada 100 veces estamos salvados. ¿Y en el improbable caso de que no haya coincidencia la segunda vez? Bueno, podemos continuar con nuestra actuación estelar: “Y no coinciden... ¿no coinciden? ¿Cómo que no coinciden? Ah, espera, no me digas más, iban a coincidir gracias a la magia... ¿habéis dicho las palabras mágicas? Entonces ¿cómo esperáis que coincidan, por azar¹³?”. Así que toca decir las palabras mágicas y rezar para que tras esta tercera mezcla, y dado que en el 95% de los casos tienen que coincidir dos cartas iguales en la misma posición, no estemos en el 5% de los “casos malos”. Ya ¿y si somos muy desafortunados e incluso a la tercera no coincide nada? Entonces (y como cuatro repartos no hay quien los aguante) lo mejor que puedes hacer es, mientras los espectadores miran atentos a las últimas cartas que están repartiendo, desaparecer de allí... (por supuesto, si mientras huyes ves que alguna de las últimas cartas coincide, volverás con aire triunfante y defendiendo que gracias a tus palabras mágicas en las que tanto confiabas se ha conseguido semejante proeza...).

4.3. La coincidencia del 9

¿Harto de tener que celebrar cumpleaños falsos por fallar reiteradamente haciendo el experimento de la paradoja de los cumpleaños? ¿Cansado de huir mientras tus amigos reparten las cartas de dos barajas esperando que alguna coincida en la misma posición? No te preocupes, tengo la solución para ti: ¡la paradoja de los famosos! El propio Martin Gardner la relataba ya hace años (Gardner, 1983, p. 38):

¿Sabía usted que el número 9 está escondido tras el natalicio de toda persona famosa? Fijémonos en la fecha de nacimiento de George Washington, que fue el 22 de febrero de 1732. Escribamos tal fecha con un sólo número: 22021732. Ahora reordenamos las cifras y formamos con ellas otro número distinto cualquiera. Restemos el menor del mayor (por ejemplo $22021732 - 12723022 = 9298710$). Sumemos todas las cifras de la diferencia. En este caso la suma es 36. ¡Y 3 más 6 son 9! Haciendo lo mismo con el natalicio de John F. Kennedy (29 de mayo de 1917) o de Charles de Gaulle (22 de noviembre de 1890) o de cualquier otro hombre o mujer famoso, siempre se obtiene 9. ¿Habrá alguna curiosa relación entre el 9 y los natalicios de las personas famosas? ¿Ha probado el lector con su propia fecha de nacimiento?

Vale, no sólo funciona con las fechas de nacimiento de los famosos ¡pero eso es bueno! Como funciona siempre, nunca te va a fallar. El principio por el que funciona es sencillo: al sumar repetidamente las cifras de un número hasta quedarnos con una sólo, obtenemos el resto que se obtiene al dividir el número entre 9 o bien obtenemos 9 si el número es múltiplo de 9. Así, dos números con las mismas cifras en distinto orden dejan el mismo resto al dividirlos entre 9, por lo que su diferencia es múltiplo de 9 y por lo tanto al sumar las cifras de la diferencia obtenemos el ubicuo número 9.

Hemos hecho dos afirmaciones en el párrafo anterior. La de que la diferencia de dos números que dejan el mismo resto al dividirlos entre 9 da como resultado un múltiplo de 9 es muy sencilla, pues $9a + r - (9b + r) = 9(a - b)$. La de que la suma de las cifras de un número da el resto de dividirlo entre 9 o bien da 9 si el número es múltiplo de 9, es consecuencia de que $9 = 10 - 1$, donde 10 es la base¹⁴ en la que solemos escribir los números. Es decir, el número $abcde$ es

$$10.000a + 1.000b + 100c + 10d + e = 9999a + 999b + 99c + 9d + (a + b + c + d + e).$$

¹³ Ya vas entendiendo por qué he llamado “jeta” a este recurso ¿no?

¹⁴ Por cierto, hablando de bases de numeración y magia. Si te interesa el tema y te has quedado con ganas de más, puedes consultar el artículo *Matemagia “básica”* que escribí recientemente para la Gaceta de la RSME (Vinuesa, 2011, El diablo de los números).



Y esto efectivamente significa que la suma de las cifras del número y el propio número dan el mismo resto al dividirlos entre 9, pues 9, 99, 999, 9999... son múltiplos de 9.

4.4. Una divertida secuencia

Se me ocurre que juntando las tres últimas ideas, puedes preparar una secuencia de efectos mágicos relacionados con la coincidencia. Escribe en un papel lo siguiente y mételo en un sobre:

Hoy, 20 de enero de 2011 (o la fecha en la que estés, casi mejor), **se comprobará que dos personas de esta sala comparten la misma fecha de cumpleaños. Estas dos personas, tras mezclar cada una un mazo de cartas, y pese a que al principio parezca que no, harán coincidir la misma carta en la misma posición en ambas barajas. Sin embargo, lo más sorprendente para mí será que las operaciones que realizarán con su día y mes de nacimiento, obtenidas con sus decisiones sobre cómo recolocar dichas cifras, les llevarán hasta el número 9.**

Pocas explicaciones hay que dar a quien haya leído todo lo anterior: dale el sobre a alguien antes de comenzar y que lo abra y lo lea al final. El detalle de escribir “pese a que al principio parezca que no” te permite que si la coincidencia en las dos barajas se produce a la segunda o a la tercera le puedas sacar partido después. Y ten por seguro que nadie se quejará de que eso esté escrito aunque la coincidencia se produzca bien pronto (de hecho, ¡claro que parece que no vaya a pasar!, ¿cómo van a coincidir dos cartas en la misma posición después de mezclar ambas barajas?).

¡Suerte, y a disfrutar con las matemáticas y con la magia!

Bibliografía

- Álvarez, V., Fernández, P., y Márquez, M. A. (2002). Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos, *La Gaceta de la RSME*, vol. 5, no. 3, 711-735.
- Blasco, F. (2007). *Matemagia*. Temas de hoy.
- Fulves, K. (1984). *More Self-Working Card Tricks*. Dover Publications.
- Gardner, M. (1982). *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Alianza editorial.
- Gardner, M. (1983). *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*. Editorial Labor.
- Gardner, M. (1988). *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*. Editorial Labor.
- Gilbreath, N. (1958) Magnetic Colors, *The Linking Ring*, vol. 38, no. 5, 60.
- Giobbi, R. (2004). *Roberto Extra Light, Juegos de Magia con Cartas*. Editorial Páginas.
- Vinuesa, C. (2011). Matemagia “básica”. *La Gaceta de la RSME*, vol. 14, no. 1.
- Vollmer, R. (1991). *Petite Anthologie des Tours de Cartes Vol. 5*. Editions du spectacle, Estrasburgo.

Carlos Vinuesa del Río, becario de la Fundación Ramón Areces, Universidad de Cambridge. Nacido en Madrid en 1982, cursó los estudios de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid (UAM). Durante su doctorado ha trabajado además en Montreal, Barcelona y Budapest. En 2010 defendió su tesis doctoral en la UAM, en la que también ha impartido clases como ayudante durante tres años. Es un gran aficionado a la magia y en 2010 fue galardonado con el Premio Ascanio, “mago del año” en la especialidad de magia de cerca. En la actualidad disfruta de una beca postdoctoral de la Fundación Ramón Areces en la Universidad de Cambridge.
Correo electrónico: carlosvinesadelrio@gmail.com