

Geometría analítica plana con *Geogebra*

María Esther Santana Zerpa (Instituto de Educación Secundaria Telesforo Bravo. Puerto de la Cruz)

Resumen

En este artículo se describe una experiencia desarrollada con alumnos de 1.º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología (16 y 17 años) durante el curso escolar 2009/10, con el objetivo de trabajar los problemas métricos de geometría analítica plana, utilizando las nuevas tecnologías. En concreto se utiliza el programa *Geogebra*, la plataforma digital de formación *Moodle* y la *pizarra digital interactiva* (PDI). El programa *Geogebra* nos ayuda a estudiar gráficamente los problemas, además de comprobar sus resultados analíticos; con la plataforma *Moodle* se consigue que el alumnado dedique de forma efectiva más tiempo al estudio mientras está fuera del centro y la PDI les permite visualizar la resolución gráfica e interactuar en su corrección. En el artículo se describe el contexto en el que se desarrolla la experiencia, el alumnado a quién va dirigida, los objetivos que se pretenden, un ejemplo de problema desarrollado en el aula y otro por los alumnos en sus casas. Finalmente se valora la experiencia y los resultados.

Palabras clave

Geometría analítica plana, nuevas tecnologías, bachillerato, *Geogebra*.

Abstract

In this article, an experience developed with pupils aged 16 and 17 is described; this experiment involved students who are studying year 12, specifically Science and Technology related subjects, during this academic year 2009-2010. The aim was to work with metric problems about plane analytic geometry by using the programme *Geogebra*, the digital training platform *Moodle* and the digital interactive whiteboard (PDI). The programme *Geogebra* helps us study the problems graphically and also check their analytic results; with the platform *Moodle* the students are expected to achieve more out of their study time when they are out of school and the PDI makes them visualize the Graphic solution easily and also interact when checking. In this article the context where the experience is developed is described, the students on whom this experience is based, the goals which are pursued, an example of a problem studied in the classroom and another one worked by pupils at home. Finally, the experience and the results are analysed.

Keywords

Plane analytic geometry, new technologies, *Geogebra*.

1. Introducción

Para poder comprender la Geometría se necesita una cierta capacidad de abstracción, que la mayoría de nuestros alumnos no han conseguido desarrollar a lo largo de la enseñanza secundaria obligatoria (12 a 16 años); esto se ve reflejado, en general, en la resolución de problemas métricos de 1.º de bachillerato.

Muchas investigaciones¹ indican las ventajas de la utilización de procesadores geométricos para la enseñanza de esta disciplina, ya que permiten abordar la geometría de una forma dinámica e

¹ Véase por ejemplo, <http://www.uib.es/depart/gte/gte/edutec-e/revelec19/Villarreal.htm> (2005) y actas de jornadas en 2005 en Andalucía, http://thales.cica.es/sites/thales.cica.es/granada/files/jornadas/2005/Actas_2005.pdf, entre otras.



interactiva, posibilitando a los alumnos la visualización de contenidos matemáticos desde diferentes perspectivas, apoyando la retroalimentación, y facilitando al docente más opciones de instrucción, de acuerdo con las necesidades de los alumnos.

Además, la legislación vigente (BOC, 2008) hace referencia a la importancia de adquirir la *competencia digital* por parte del alumnado y a que el profesorado observe que la metodología didáctica los debe ayudar a adquirir esa competencia básica, que consiste en disponer de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información, y para transformarla en conocimiento.

Todo lo anteriormente expuesto, nos ha llevado a diseñar la unidad “Geometría analítica en el plano” para primero de bachillerato, con una metodología que incorpora diferentes herramientas informáticas (la *Pizarra digital interactiva* –PDI–, la plataforma digital *Moodle* y el programa interactivo de geometría dinámica *Geogebra*).

2. Características de las herramientas informáticas utilizadas

Geogebra está diseñado para interactuar dinámicamente en un ámbito en que se reúnen la Geometría, el Algebra y el Análisis o Cálculo. Además permite otros usos didácticos:

- Soporte para las explicaciones del profesor.
- Soporte para la resolución de problemas por los alumnos.
- Herramienta para que el alumno realice investigaciones.
- Utilidad para la creación de actividades interactivas.
- Herramienta para realizar construcciones y observar propiedades y características.
- Realización de construcciones geométricas planas complicadas.
- Cálculo y resolución de problemas.

Para tener visión más clara de los usos y posibilidades didácticas de *Geogebra*, puede consultarse el material de apoyo a la conferencia “*Geogebra – The Mathematician’s Tool*”, del profesor Mark Dawes, en esta dirección:

http://geometriadinamica.es/gg_day/Salamanca%20Plenary%20-%20Mark%20Dawes.zip

La plataforma de teleformación *Moodle* permite que el alumnado pueda trabajar desde sus casas realizando problemas propuestos y preguntando en los foros las dudas que puedan surgir. Con ello, además, se consigue que dediquen más tiempo al estudio ya que incluso los fines de semana realizan ejercicios para remitirlos a la profesora a través de este medio. La integración de *Geogebra* en *Moodle* ofrece muchísimas posibilidades didácticas. Aunque no es el objetivo del presente artículo, puede verse un ejemplo de esto en la plataforma *Moodle* del IES Sánchez Cantón, de Pontevedra, en el “Taller de *Moodle* con *Geogebra* y unas pinceladas de *Wiris*” (se puede entrar como “invitado”), en la siguiente dirección:

<http://centros.edu.xunta.es/iessanchezcanton/moodle/course/view.php?id=171>

La PDI permite a todo el grupo visualizar gráficamente la resolución de problemas y participar de forma dinámica en la corrección de los mismos (Marques, 2008).

3. Objetivos

La finalidad fundamental de la experiencia fue conseguir que el alumnado fuera capaz de resolver problemas métricos, visualizándolos previamente y comprobando posteriormente la solución obtenida. Para ello se plantearon los siguientes objetivos principales:

- * Reforzar gráficamente los conceptos de Geometría analítica.
- * Desarrollar la capacidad de abstracción en la resolución de problemas métricos.
- * Desarrollar la autonomía personal utilizando los recursos que las nuevas tecnologías ponen a nuestra disposición.
- * Aplicar programas informáticos como ayuda gráfica en la resolución de problemas.
- * Utilizar una plataforma digital como un medio de formación y comunicación continua.

De esta manera, se abordan aspectos de los siguientes objetivos específicos del currículo de bachillerato (BOC, 2008):

- * Comprender y aplicar los conceptos, estrategias y procedimientos matemáticos (...) en la resolución razonada de problemas, (...)
- * Aprender a apreciar las argumentaciones razonadas y las demostraciones rigurosas (...) y utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, (...)
- * Servirse de los medios tecnológicos para obtener y procesar información, ayudar en la comprensión de fenómenos dinámicos, desarrollar o rechazar intuiciones usándolos con sentido crítico, (...)
- * Analizar y valorar la información procedente de fuentes diversas, utilizando herramientas matemáticas, (...)
- * Expresarse oralmente, por escrito y de forma gráfica en situaciones susceptibles de tratamiento matemático, comprendiendo y manejando términos, notaciones, representaciones matemáticas y recursos tecnológicos.

4. Metodología

La experiencia se desarrolló con un grupo de 30 alumnos de 1.º de bachillerato de Ciencias y Tecnología (16 y 17 años), debido a que es el nivel educativo en el que se trabajan los problemas métricos en la unidad didáctica “Geometría analítica”. Por tanto, se pueden aprovechar al máximo los recursos que nos ofrece el programa *Geogebra*.

El aula en la que se llevó a cabo la experiencia estaba dotada de una pizarra tradicional (tiza o tinta), una PDI y un ordenador con acceso a internet (y por tanto a la plataforma *Moodle*), en el que se encontraba instalado *Geogebra*.

Los alumnos ya tenían conocimientos previos acerca de la plataforma *Moodle*, ya que a lo largo del primer trimestre se les había iniciado en su utilización, y todos disponían de ordenador y conexión a internet en sus casas.

El desarrollo de la experiencia se realizó durante tres semanas de clase (12 horas, entre el 11 de enero y el 1 de febrero de 2010), más el tiempo dedicado por los alumnos por las tardes en sus casas. El reparto del tiempo se realizó de la siguiente forma:

- Una semana (4 horas de clase) para la explicación de todos los contenidos correspondientes a la unidad de Geometría analítica, utilizando *Geogebra* y la PDI por parte de la profesora.



- Dos semanas (8 horas de clase) para la práctica de la resolución de problemas métricos.

La metodología ha sido expositiva mientras se explicaban los contenidos de la unidad (primera semana), y participativa mientras se realizaba la parte práctica de resolución de problemas (segunda y tercera semana), además de interactiva, gracias al uso de las nuevas tecnologías.

El grupo de alumnos era especialmente bueno. En otro caso estimamos que se debería realizar la experiencia en cinco semanas, es decir, 20 horas de clase.

5. Desarrollo de la experiencia

Durante la primera semana la profesora explicó todos los conceptos correspondientes a Geometría analítica (anexo I); poniendo ejemplos en cada caso: primero analíticamente en la pizarra tradicional y, posteriormente, de manera gráfica utilizando *Geogebra* y la PDI.

En el anexo II se muestran una serie de ejercicios utilizados durante la primera semana como ejemplos de los contenidos explicados. Estos ejercicios fueron resueltos por la profesora, tanto analíticamente como con *Geogebra* en la PDI.

Durante las dos semanas siguientes se realizó la fase práctica para el alumnado de la siguiente forma:

- * La profesora plantea un problema métrico y los alumnos lo resuelven en su cuaderno.
- * Posteriormente dos alumnos salen a resolverlo simultáneamente; uno en la pizarra tradicional de forma analítica y el otro en la PDI con *Geogebra* de manera gráfica y algebraica (*Geogebra* va calculando y mostrando las ecuaciones de los elementos con los que se trabaja). De esta manera, los alumnos que están resolviendo el problema, saben si está bien o necesitan corregirlo. Por otra parte, la resolución gráfica en la PDI, observable por todos los alumnos de la clase, permite a aquellos alumnos con menor capacidad espacial visualizar lo que necesitan calcular, así como conseguir una mayor comprensión del problema.
- * Por último, la profesora plantea un problema para que los alumnos lo realicen en sus casas utilizando *Geogebra* y envíen la solución a través de la plataforma *Moodle*. Además deben resolverlo analíticamente en su cuaderno.

A continuación se describe la actuación de dos alumnos ante un problema planteado en clase:

Los puntos $A(2, 2)$ y $B(-10, -2)$ son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro vértice está sobre la recta $a: \left. \begin{array}{l} x = 1 - 6t \\ y = 1 + 2t \end{array} \right\}$. **Determinar el vértice no dado y hallar el área del triángulo correspondiente.**

Los alumnos tendrán un tiempo para realizar el problema en su cuaderno de clase. Cuando la profesora estime que se puede empezar a corregir (porque ya la mayoría de los alumnos lo tienen resuelto) llamará a un alumno a la pizarra tradicional (de tiza) para resolverlo de forma analítica y a otro para que lo resuelva en la PDI utilizando *Geogebra*:

El alumno en la pizarra de tiza lo resolvió de la siguiente forma:

El tercer vértice $C(x, y)$ está sobre la recta dada; por lo tanto debe verificar la ecuación $x + 3y - 4 = 0$. Por ser isósceles, la distancia de A a C debe ser igual que la distancia de B a C , es decir, $d(A, C) = d(B, C)$. Por lo tanto:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+10)^2 + (y+2)^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 20x + 100 + y^2 + 4y + 4,$$

$$\text{Es decir: } -24x - 8y - 96 = 0.$$

Entonces, para hallar el vértice C hay que resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -24x - 8y - 96 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{array} \right\}, \text{ de donde se obtiene la solución } C(-5, 3)$$

Para calcular el área del triángulo: $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{d(A, B) \cdot d(C, b)}{2}$, siendo b la recta que pasa por A y B .

Tomamos como vector director $\overrightarrow{AB} = (-10, -2) - (2, 2) = (-12, -4)$ y como punto $A(2, 2)$. La ecuación de la recta será: $\frac{x-2}{-12} = \frac{y-2}{-4}$, que en forma general es: $-x + 3y - 4 = 0$.

Como la distancia $d(C, b) = \frac{|5 + 3 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y la base del triángulo mide $d(A, B) = \sqrt{(2+10)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$ unidades,

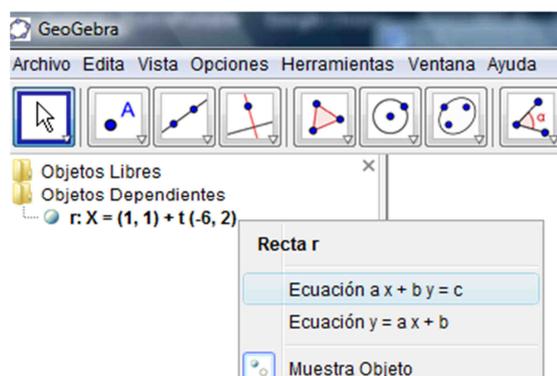
$$\text{finalmente obtenemos: } A = \frac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{1600}}{2} = 20 \text{ unidades de área.}$$

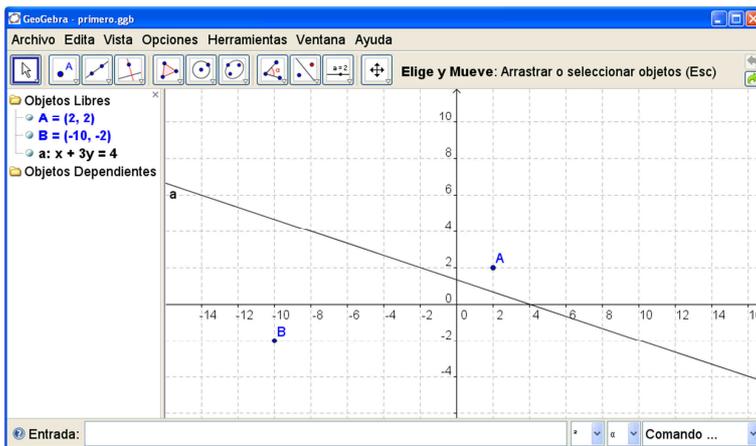
Resolución del mismo problema en la PDI por parte de otro alumno:

1.º) Se dibujan los datos del problema introduciendo en la barra de entrada del programa los dos puntos y la ecuación de la recta en forma paramétrica, así:

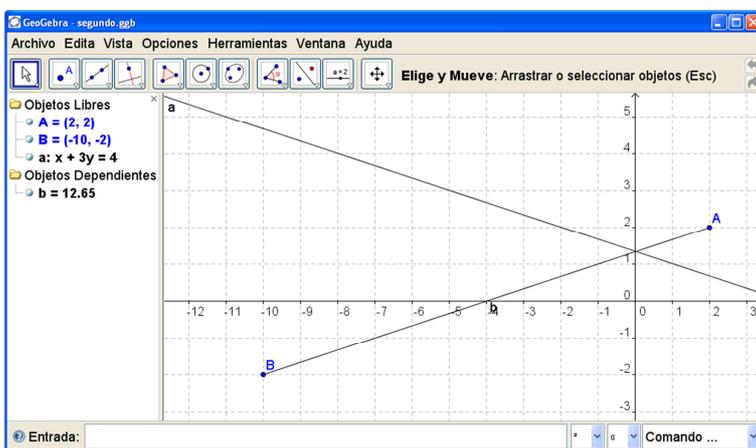
$$a: X = (1, 1) + t(-6, 2).$$

Geogebra puede transformar la misma ecuación a las formas implícita o punto-pendiente, indicándolo en el menú contextual (clic en el botón derecho sobre la ecuación).

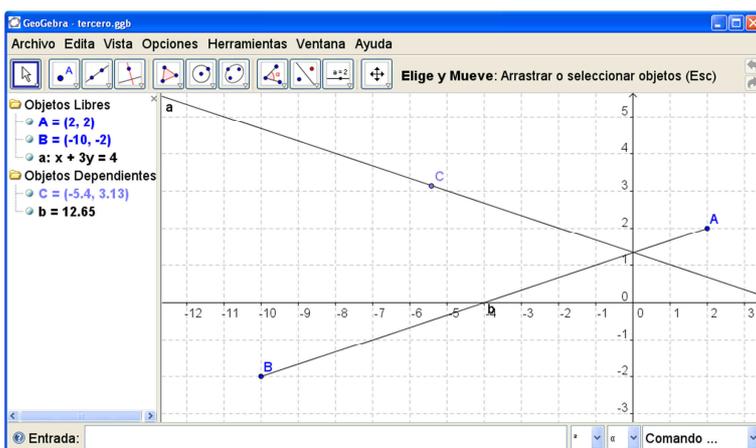




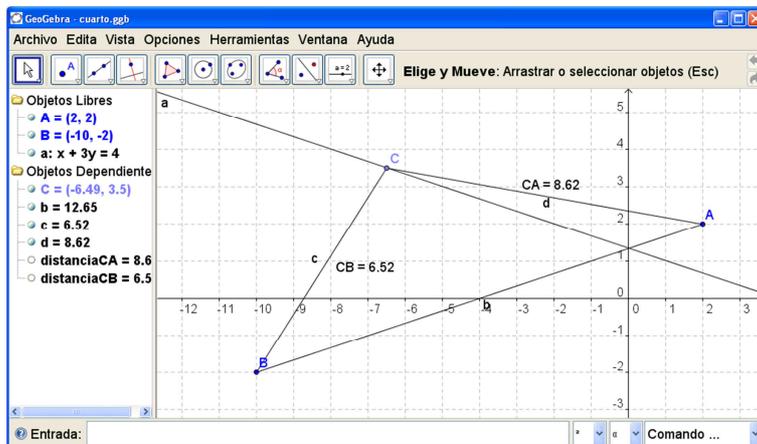
2.º Se dibuja el lado desigual AB:



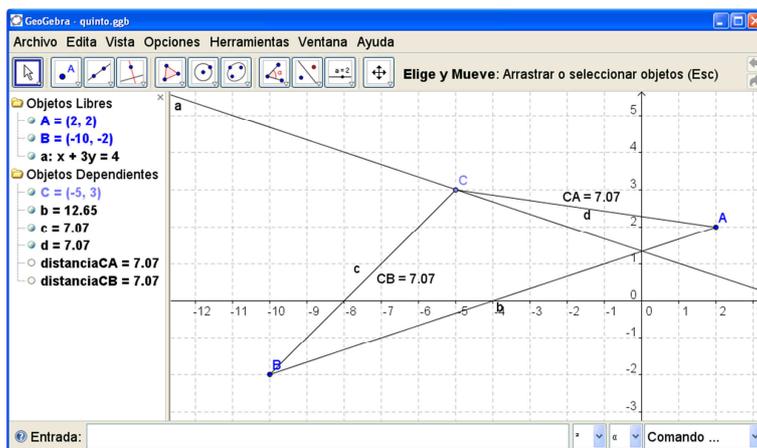
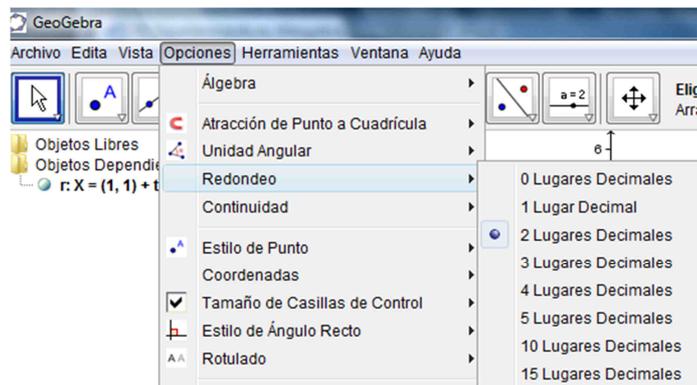
3.º Se sitúa un punto móvil C sobre la recta dada, en la que está el tercer vértice. Este punto será dicho vértice, una vez que encontremos su posición exacta:



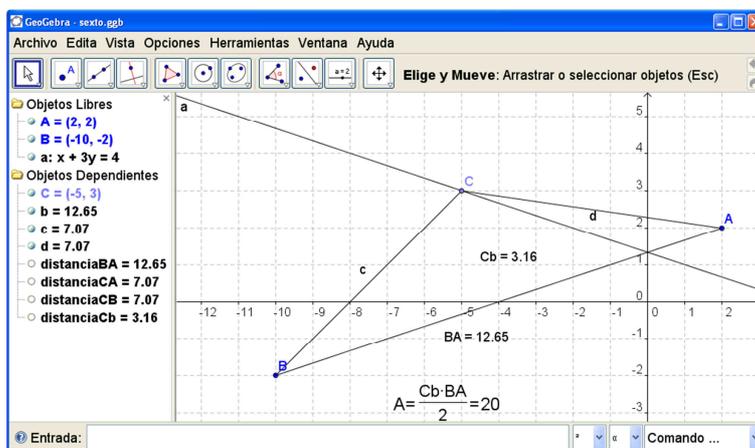
4.º Se une C a los puntos A y B y se calcula las distancias de C a A y a B , respectivamente:



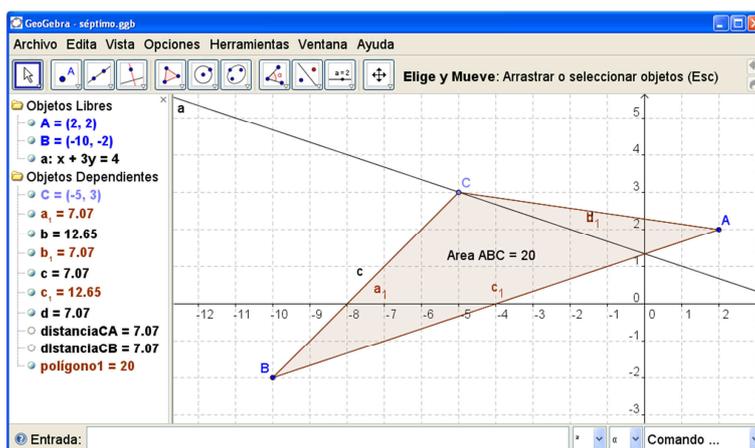
5.º Se desplaza “a mano” el punto C sobre la recta hasta observar que coinciden las distancias que se van calculando. Este “ajuste manual” está sujeto a la inexactitud provocada por la precisión con que se trabaja. *Geogebra* ofrece la posibilidad de definir el número de decimales que se quiere usar.



6.º) Se calcula la distancia de A a B y la distancia de C a la recta que pasa por A y B , para poder calcular el área:



7.º) *Geogebra* permite calcular directamente el área de un polígono (sin más que indicarle cuáles son sus vértices), con lo que se comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior:



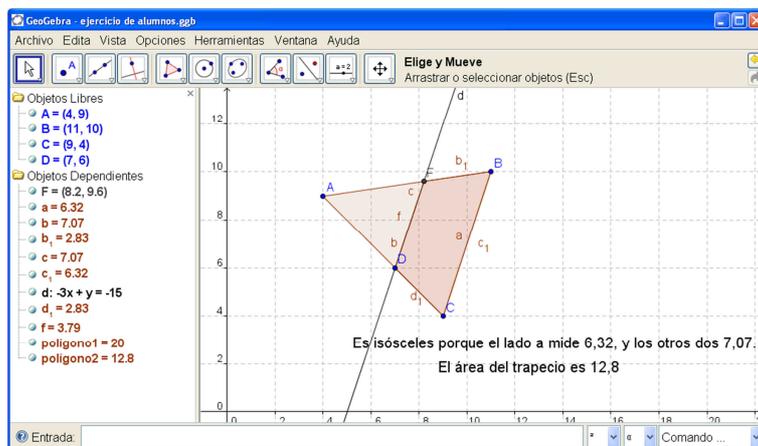
En el ejemplo anterior se han mostrado ambas resoluciones (gráfica y analítica) de forma correcta, pero en ocasiones hay que corregir al alumno que está haciéndolo analíticamente en la pizarra tradicional. Este alumno, gracias a la representación en la PDI y a los resultados obtenidos con *Geogebra*, es capaz de encontrar y reconocer sus errores y aprender de ellos.

Antes de finalizar la clase se les indica que en casa deben resolver el siguiente problema utilizando *Geogebra* y también de forma analítica. La resolución del mismo, desarrollada con *Geogebra*, deben enviarla a través de la plataforma *Moodle*, utilizando el foro si tienen dudas. La resolución analítica deben escribirla en su cuaderno de clase. En esta experiencia el problema fue el siguiente:

Tenemos un triángulo de vértices $A(4, 9)$, $B(11, 10)$ y $C(9, 4)$:

- Comprueba que es un triángulo isósceles.
- Trazamos una recta paralela al lado desigual, pasando por $(7, 6)$, y se forma un trapecio isósceles. Determina los vértices del trapecio y su área.

En la siguiente figura se muestra el resultado final enviado por uno de los alumnos:



Además, los alumnos lo realizaron de forma analítica en sus cuadernos y comprobaron los resultados. En la siguiente clase dos alumnos realizaron simultáneamente las correcciones: uno en la pizarra tradicional y otro en la PDI con *Geogebra*.

6. Resultados

Antes de comenzar la experiencia se detectó que 3 de los 30 alumnos ya disponía de estrategias para resolver este tipo de problemas; los 27 restantes presentaban dificultades de visualización geométrica, lo que les impedía afrontarlos desde su inicio y sólo realizaban los problemas mecánicos o aquellos de los que ya tenían un modelo.

Al finalizar la experiencia la mayoría del alumnado, 24 de los 30 alumnos, eran capaces de plantear gráficamente los problemas y si cometían errores en su resolución gráfica eran capaces de corregirlos. El resto del alumnado no consiguió los objetivos, fundamentalmente por carencia de trabajo diario; aún así, uno de ellos fue capaz de plantear gráficamente los problemas, es decir, realizar el dibujo inicial de acuerdo con el enunciado utilizando *Geogebra*.

La unidad se evaluó mediante un examen (anexo III) que los alumnos realizaron de forma analítica (en papel) y gráficamente utilizando el ordenador. De los 30 alumnos, 24 aprobaron la prueba correspondiente a esta unidad y 6 no la aprobaron aunque 3 de ellos fueron capaces trabajar algunos de los ejercicios del examen.

7. Conclusiones

Con esta experiencia se alcanzaron los siguientes objetivos:

1. Familiarizar al alumnado con las nuevas tecnologías como herramientas en el estudio.
2. Mejorar la capacidad de representación gráfica en diferentes situaciones.
3. Buscar la mejor estrategia, una vez visualizado el problema métrico.
4. Utilizar una plataforma digital de formación como un estímulo para dedicar más tiempo al estudio.

La valoración por parte de la profesora es muy positiva, ya que estas herramientas han sido de



gran ayuda para poder explicar mejor y para alentar a un mayor número de alumnos a resolver problemas de una forma más atractiva y dinámica.

Evidentemente, el entusiasmo y los resultados tan satisfactorios se obtuvieron por el excelente *caldo de cultivo* que supuso la aptitud y actitud mostrada por el alumnado.

Por parte del alumnado, la valoración fue muy buena: estaban siempre dispuestos a trabajar, se esforzaban por plantear los problemas, primero solamente en el cuaderno, y luego con *Geogebra*, comprobando los resultados y corrigiendo errores, si los había. Además, demostraron su interés y entusiasmo solicitando, cada viernes, nuevos ejercicios a través de la plataforma *Moodle* para trabajarlos durante el fin de semana.

Bibliografía

- BOC (Boletín Oficial de Canarias) (2008), Decreto 202/2008, de 30 de septiembre, por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. (pp. 19814-19824). Boletín Oficial de Canarias núm. 204, viernes 10 de octubre de 2008. <http://www.gobiernodecanarias.org/boc/2008/204/001.html>
- Marques, P. (2008). *La pizarra digital interactiva*. Recuperado el 20 de junio de 2010, de <http://peremarques.pangea.org/pdigital/es/pizinteractiva.htm>
- Página web oficial de *Geogebra*: <http://www.geogebra.org/>
- Página web oficial de *Moodle*: <http://moodle.org/>

María Esther Santana Zerpa es profesora de Enseñanza Secundaria de la especialidad de Matemáticas en el Instituto de Educación Secundaria Puerto de la Cruz – Telesforo Bravo, Tenerife, Islas Canarias, España.

ANEXO I

CONTENIDOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

- * Sistemas de referencia.
- * Puntos en el plano.
- * Vectores en el plano.
- * Punto medio de un segmento.
- * Distancia entre dos puntos.
- * Simétrico de un punto respecto de otro
- * Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétrica, continua, implícita o general, explícita y punto-pendiente.
- * Incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
- * Ángulo entre dos rectas.
- * Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas.
- * Elementos notables del triángulo.

ANEXO II

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ejercicios utilizados para ilustrar las explicaciones de la 1ª semana. Se resolvieron tanto analíticamente como con *Geogebra* en la PDI. Para todos los ejercicios se solicitó la colaboración de algunos alumnos ya que era un grupo muy participativo.

1. Dados los puntos $A(-2, 5)$ y $A(1, -7)$.

a) Halla la ecuación de la recta (en todas las formas que conozcas) que pasa por esos dos puntos. Representala.

b) Halla la ecuación, en forma general, de la recta que pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} y es perpendicular a la recta hallada en el apartado anterior.

2. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-3}{5} = \frac{5-y}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -3+t \\ y = 5-4t \end{cases}$. En el caso de que sean secantes, halla las coordenadas del punto en el que se cortan.

3. Calcula el ángulo que forman las siguientes rectas:

$$r: 3x + 7y - 4 = 0 \text{ y } s: (y - 3) = -2(x - 5)$$

4. Dada la recta $r: -x + 2y = 8$ y el punto $A(-3, -1)$.

a) ¿Pertenece el punto A a la recta r ?

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a r .

c) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a r .

5. Los puntos $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$ y $C(2, -3)$ forman un triángulo.

a) Halla las ecuaciones de las rectas en las que se encuentran sus lados.

b) Según sus lados, ¿qué tipo de triángulo es?

c) Según sus ángulos, ¿qué tipo de triángulo es?

d) Halla el ortocentro.

6. Dados los vectores $\vec{u}(-2, 1)$ y $\vec{v} = (3, a)$. Halla “a” para que:

a) Los dos vectores sean perpendiculares.

b) Los dos vectores sean paralelos.



c) El módulo de \vec{v} sea $\sqrt{10}$.

d) Formen un ángulo de 45° .

7. Halla el punto simétrico de $A(-1, 2)$ respecto a la recta $r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-5}{2}$.

8. Halla el área del triángulo que determinan los puntos $A(0, 0)$, $B(8, 1)$ y $C(4, 5)$.

9. Calcula las coordenadas del vértice C de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual es el segmento de extremos $A(-1, 5)$ y $B(9, 3)$, sabiendo que la altura sobre \overline{AB} es de 4 cm.

ANEXO III

EXAMEN DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1.º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

1. Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 + t \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa y, en su caso, halla su punto de corte.

b) Halla el ángulo que forman.

c) Halla la distancia del punto del apartado b) a la recta $2x - 7y = -9$.

2. Encuentra el valor de "m" para que $y - 3 = m(x + 4)$ forme un ángulo de 45° con $\frac{x-4}{-5} = \frac{y+3}{2}$.

3. Los vértices de un triángulo son $A(3, -5)$, $B(-1, 1)$ y $C(0, -4)$.

a) Halla el circuncentro.

b) Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo dado. Representa dicha circunferencia.

4. Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $3x + y = 2$ y uno de sus vértices es el punto $(6, 0)$. Halla los otros vértices.

5. Un punto P , que es equidistante de los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, 5)$, dista el doble del eje de ordenadas que del eje de abscisas. ¿Cuáles son las coordenadas de P ?