NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 75, noviembre de 2010, páginas 5–20

Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos

María Teresa Rojano Ceballos (Cinvestav)

Fecha de recepción: 30 de septiembre de 2010
Artículo solicitado al autor por la revista

A P E R T U R A

Resumen

Se analizan resultados de un estudio con alumnos de secundaria, en el que se utiliza un modelo virtual de la balanza para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado. A diferencia del modelo concreto o diagramático, el modelo virtual es dinámico e interactivo y en su versión ampliada (balanza con poleas) incluye la representación y resolución de ecuaciones con sustracción de términos. Los resultados indican que al final del estudio, los alumnos logran extender el método algebraico de resolución a una variedad amplia de modalidades de ecuaciones y que de manera espontánea infieren el método de transposición de términos. Con el fin de investigar los procesos de producción de sentido y de construcción de significado, se adopta una perspectiva semiótica que incorpora al análisis las producciones sígnicas de los estudiantes, como parte de la interacción entre los sistemas de signos algebraico, aritmético y el sistema de signos del modelo.

Palabras clave

Sintaxis algebraica, modelación concreta, balanza virtual, ecuaciones lineales, sistemas matemáticos de signos.

Abstract

We analyze outcomes from a study carried out with secondary school pupils, in which a virtual balance model is used for the teaching of the solution method of linear equations. In contrast to the concrete or diagrammatic versions of the balance, the virtual model is dynamic and interactive and in its extended version (the pulley balance) it includes the representation and solution of equations with subtracted terms. The results suggest that at the end of the study, pupils are capable to extend the algebraic solution method to a broad variety of modes of equations and that they spontaneously infer the method of transposing terms. In order to probe the processes of sense production and construction of meaning, we adopt a semiotic perspective which incorporates the analysis of students' signic productions as part of the interaction between the sign systems of algebra, arithmetic and that of the model.

Keywords

Algebraic syntax, concrete modelling, virtual balance model, linear equations, mathematics sign systems

1. Introducción

En el libro *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach* se aborda el tema de la modelación concreta en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y de los procesos de abstracción que tienen lugar al transitar hacia el trabajo con el código algebraico (Filloy, Rojano, Puig, 2008, página 100). En el texto se enfatiza el hecho de que tales procesos implican a su vez procesos de generalización de las acciones al modelar nuevas situaciones y de discriminación entre los casos modelables y no-modelables. Estas precisiones moderan la sobrevaloración que suele atribuírseles a los acercamientos de enseñanza que parten de situaciones o modelos "concretos" con el fin de dotar de significados a los conceptos y propiedades matemáticos, así como a sus representaciones y a las transformaciones de éstas.

Entre los recursos de modelación concreta clásicos y tradicionales en la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado está el modelo de la balanza, en el cual se recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar la noción de igualdad algebraica restringida [1]. Una serie de estudios empíricos llevados a cabo con el uso de este modelo reportan resultados que muestran tanto las bondades didácticas del mismo como las dificultades que enfrentan los estudiantes al utilizarlo. J. Vlassis observó en su estudio que el uso del modelo de la balanza ayudó a los alumnos a aprender el método formal de aplicar la misma operación a los dos miembros de la ecuación y que las principales dificultades se presentaron al tratar de que los sujetos generalizaran dicho método a las ecuaciones con enteros negativos (Vlassis, 2002); Radford & Grenier (1996) por su parte, encontraron que la balanza ayuda a los alumnos a comprender la regla de eliminación de términos semejantes, cuando éstos se encuentran en miembros distintos de la ecuación; D. Godino et al (2004) realizaron una investigación con el uso de una balanza interactiva, en cuyos platillos es factible representar no sólo polinomios, sino también funciones algebraicas racionales y trascendentes, con lo cual, de acuerdo a estos autores, el tipo de ecuaciones, inecuaciones y funciones cuyos valores numéricos pueden compararse es muy general. Filloy & Rojano (1989) identificaron tendencias cognitivas extremas en estudiantes de secundaria, quienes al inicio de su trabajo con la balanza mostraron, en unos casos, un arraigo al uso del modelo y en otros, un desprendimiento muy rápido del mismo para realizar las acciones sólo en el nivel simbólico del álgebra (Filloy & Rojano, 1984, 1989).

En relación a los estudios mencionados, realizados con el modelo de la balanza, cabe mencionar que un elemento común en todos ellos es que la extensión del dominio numérico de las ecuaciones al conjunto de los números enteros constituye un factor que obstruye la generalización del método de resolución. Una explicación a lo anterior se encuentra en las investigaciones de Gallardo (2002), Bruno & Martinón (1997) y Glaeser (1981) quienes han analizado a profundidad la naturaleza de la dificultad de incorporar los números negativos y su operatividad a la sintaxis algebraica. En particular, en cuanto a los números negativos y su relación con la modelación concreta, Filloy y Rojano reportan el caso de una alumna que, de manera espontánea, hizo una adaptación del modelo concreto a la resolución de ecuaciones con coeficientes negativos y que, en principio, no se esperaba que se pudiesen resolver con dicho modelo. Como ya se ha señalado, de acuerdo a estos autores, lo anterior es la manifestación de la tendencia cognitiva consistente en un arraigo al modelo concreto, aún en casos en que la modelación puede resultar más compleja que la operatividad misma en el nivel simbólico (Filloy & Rojano, 1989, pp. 22 and 23; Filloy, 1991) y que esto puede representar un obstáculo para la abstracción y para la generalización del método algebraico. Vlassis encontró en la investigación a la que se ha hecho referencia, que el efecto de haberle dado un significado concreto a la manipulación de los términos de la ecuación perduró en los estudiantes varios meses después de su trabajo con la balanza (lo cual se considera un efecto positivo). Sin embargo, esta autora admite que los alumnos tendrán que remontar más tarde obstáculos relacionados con procesos de abstracción, como por ejemplo en el caso de la resolución de ecuaciones que involucran números negativos y para los cuales el modelo de la balanza no fue ideado (Vlassis, 2002, pp. 356-357).

Las tendencias extremas observadas por Filloy y Rojano (1989) y a las que llaman "tendencia semántica" (un arraigo al modelo, aun cuando la ecuación no era modelable o su modelación era muy compleja en la balanza) y "tendencia sintáctica" (un abandono apresurado del modelo) son manifestaciones particulares de una serie de 11 clases de tendencias cognitivas identificadas en varios estudios sobre la transición de la aritmética al álgebra, el pensamiento geométrico en adolescentes y la resolución de problemas aritmético-algebraicos en estudiantes de 12 a 18 años de edad (véase Filloy, Rojano & Puig, 2008, pp 164 -166). Dichos estudios se llevaron a cabo entre los años 80s y 90s

(Filloy, 1991 y 1993; Filloy & Lema, 1996; Filloy & Rojano, 1985a, 1985b y 1989; Filloy, Rojano & Rubio, 2001; Filloy, Rojano & Solares, 2002) y dieron lugar a una perspectiva teórica que ha ayudado a caracterizar tipos de obstructores que pueden estar presentes en el sujeto cuando éste intenta aprender nuevos conceptos, operaciones o métodos matemáticos, y que no dependen de las características ni del modelo de enseñanza ni de del enseñante ni del objeto de conocimiento. Hoy en día, tratando de indagar otro tipo de fenómenos como los de los procesos de producción de sentido y de construcción de significado cuando se aprende álgebra con modelos concretos, adoptar una perspectiva semiótica parece adecuado. En este artículo se analizan resultados de un estudio con alumnos de secundaria, en el que se incorpora el uso de un modelo virtual de la balanza -basado en applets- para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado. Este modelo difiere del modelo tradicional (concreto o diagramático) en que es dinámico e interactivo y en que en su versión ampliada (balanza con poleas) incluye la representación y resolución de ecuaciones con sustracción de términos (SEP-ILCE, 2007) [2].

Otra característica de la unidad interactiva en cuestión es que incluye una sección en la que la balanza es fija y el usuario tiene que seleccionar la operación que hay que realizar con los términos de la ecuación (aplicación de la operación inversa para la eliminación de términos), la cual tiene el propósito de ayudarlo a transitar de las acciones en el modelo a acciones en el nivel sintáctico algebraico.

Los resultados obtenidos indican que, después de realizar una serie de actividades con esta unidad interactiva y con hojas de trabajo que marcan una ruta didáctica hacia el dominio de la sintaxis, los alumnos son capaces de aprender y usar el método algebraico de resolución para familias amplias de ecuaciones lineales, incluidas las que contienen términos que se sustraen. Esto último responde en parte al reto planteado por las investigaciones que reportan la enorme dificultad que tienen los estudiantes para incorporar elementos de negatividad al dominio algebraico.

2. El estudio "Balanza virtual y sintaxis algebraica"

El principal propósito del estudio es investigar en qué medida, el trabajo con la versión dinámica de la balanza descrita arriba ayuda a alumnos de entre 12 y 14 años de edad a abstraer las acciones realizadas en la balanza al nivel de la sintaxis algebraica asociada a la resolución de ecuaciones lineales. Además, se investiga si los sujetos son capaces de generalizar el método de "hacer lo mismo de ambos lados de la igualdad" a modalidades de ecuaciones cada vez más complejas, incluidas aquellas que contienen sustracción de términos con coeficientes positivos. Se incluyen modalidades de ecuaciones aritméticas ($Ax = B$; $Ax \pm B = C$; A, B y C son enteros particulares mayores que cero) y no-aritméticas ($Ax \pm B = Cx \pm D$), según la clasificación de Filloy y Rojano (1984 y 1989) [3]. El modelo sólo despliega ecuaciones con solución positiva.

2.1. La balanza virtual y el circuito didáctico

Como ya se ha mencionado, el modelo concreto utilizado consiste en una versión virtual del modelo tradicional diagramático. En la primera parte de la unidad interactiva se trabaja con la **balanza simple** (ver Figura 1).

APERTURA

Figura 1. Balanza simple

El usuario puede arrastrar los objetos para agregarlos en los platillos (tomándolos de las pilas del centro) o para tirarlos al cesto de la basura. Se dispone de objetos de peso conocido (unitario) y de objetos de peso desconocido (x). La idea es que los estudiantes comprendan los principios que guían las acciones que preservan o restablecen el equilibrio en cada paso. La secuencia de escenas incluye las siguientes secciones: a) *pesar objetos*; b) *representar una ecuación dada*; c) *encontrar el valor del peso desconocido*. A manera de retroalimentación, en la parte inferior aparece la ecuación que se va a resolver y en ella se aprecian los cambios que causan las acciones realizadas en la balanza. Las ecuaciones que se van a resolver aparecen al azar, pero el botón de *nivel* permite acceder a ejercicios con tipos de ecuaciones cada vez más complejos.

En la segunda parte de la unidad interactiva se manipula una **balanza con poleas** (ver Figura 2).

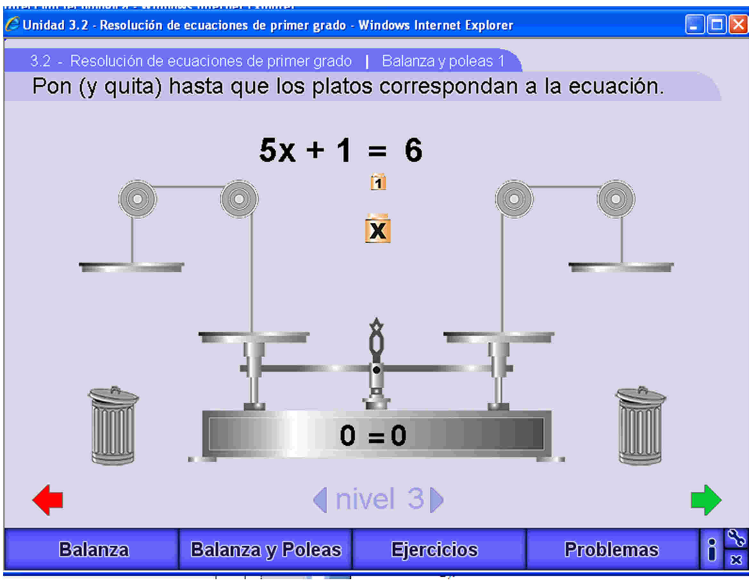

Figura 2. Balanza con poleas

En la balanza ampliada es posible representar y resolver ecuaciones que incluyen sustracción de términos de coeficientes positivos, es decir, es posible quitar o sustraer pesos. Los términos que se sustraen se representan con pesas colocadas en los platillos superiores. Por "arrastre" se pueden pasar objetos de los platillos superiores a los inferiores y viceversa y de los platillos de la derecha a los de la izquierda y viceversa. Se puede apreciar que al pasar de un platillo superior a uno inferior (o al revés), o bien del platillo izquierdo al derecho (o al revés), cambia el signo de operación que precede al término correspondiente en la ecuación (parte inferior de la balanza).

El circuito didáctico con la balanza simple consiste en:

1. Familiarización con la balanza (pesar objetos);
2. Representación de ecuaciones en la balanza (correspondencia entre los elementos de la ecuación y los del modelo);
3. Resolución de ecuaciones con la balanza dinámica, encontrando el peso desconocido por eliminación de objetos de los platillos (principios de manipulación que mantienen el equilibrio);
4. Resolución de ecuaciones con la **balanza fija**, por elección de la operación inversa que se aplica a los términos en la ecuación (recuperación de los principios que mantienen el equilibrio en el nivel sintáctico: noción de equivalencia algebraica). Ver Figura 3a.
5. Resolución de ecuaciones sin la balanza, transformando y restableciendo la igualdad en el nivel simbólico del álgebra (automatización de las acciones en el nivel sintáctico). Ver figuras 3b - 3e.

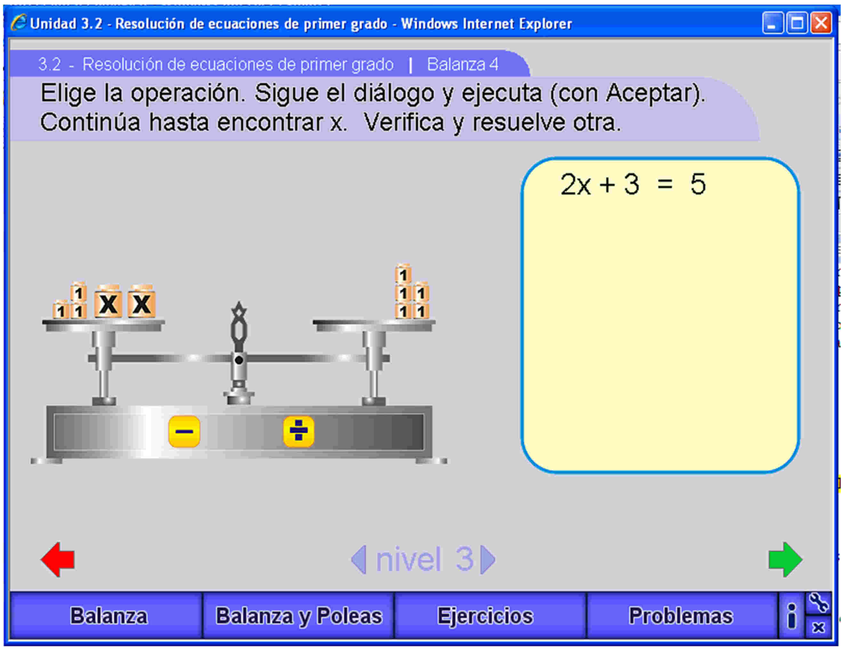

Figura 3a. Balanza fija

A P E R T U R A

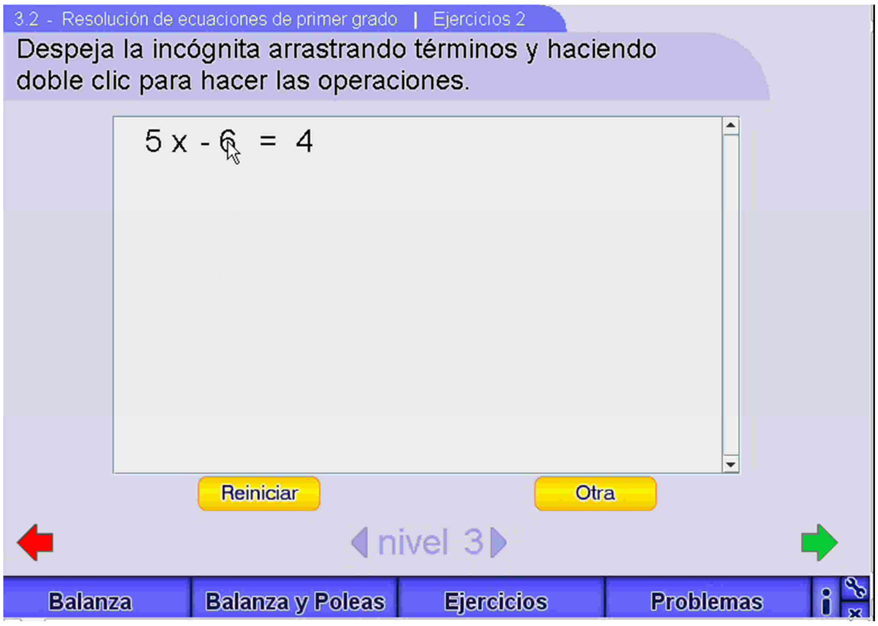

Figura 3b. Escritura de las transformaciones de la ecuación

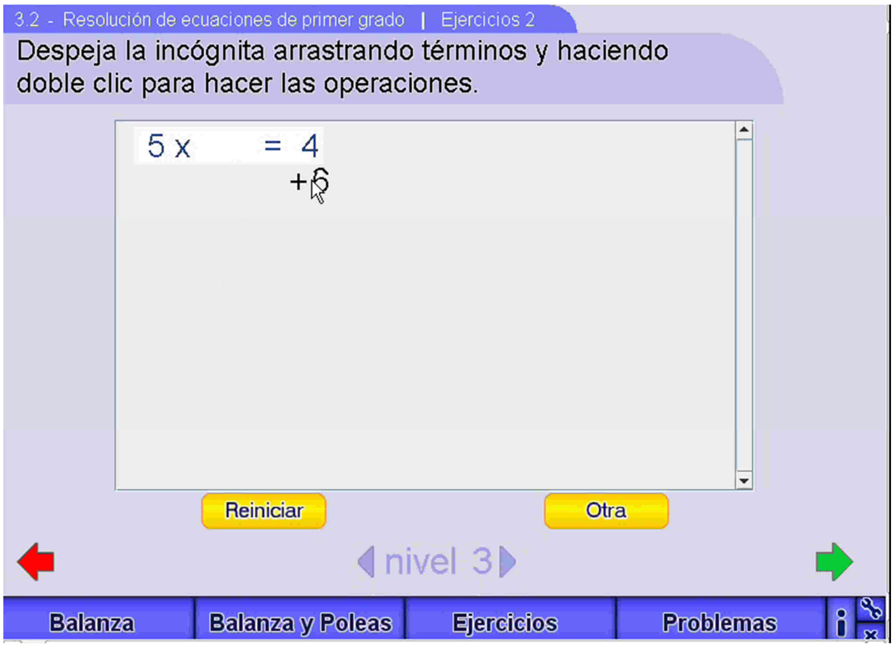

Figura 3c. Transposición de términos (–6) "por arrastre". Nótese el cambio de signo

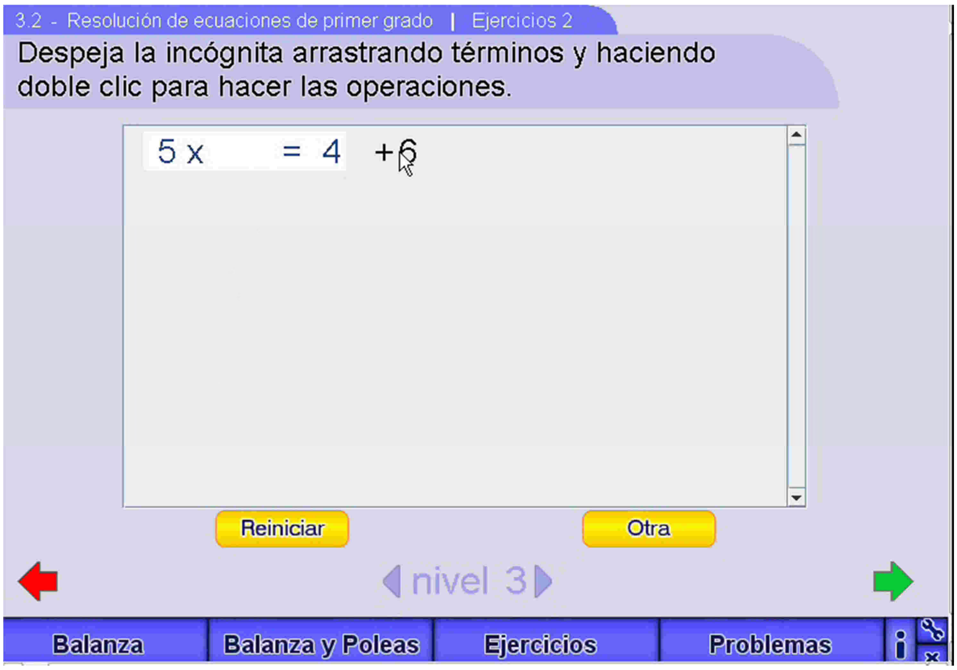

Figura 3d. Restablecimiento de la ecuación (rescritura automática: 5x = 4+6)

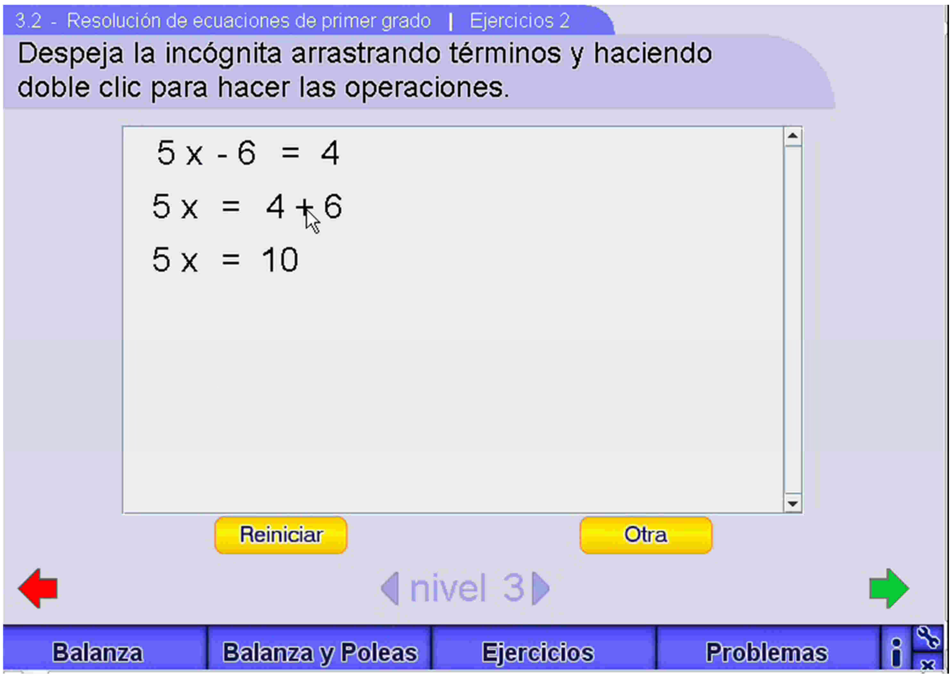

Figura 3e. Ejecución de la operación (4 + 6) con "doble click" y rescritura automática (5x = 10)

Las etapas 1-5 del circuito didáctico se repiten con la balanza con poleas, extendiendo así el método a las ecuaciones con sustracción de términos.

2.2. Los sistemas matemáticos de signos y la abstracción a la sintaxis

En el acercamiento teórico propuesto por E. Filloy (Filloy, Rojano, & Puig, 2008; Kieran & Filloy, 1989; Puig, 2004) la noción de *texto* se introduce para ser utilizada en el análisis de cualquier práctica de producción de sentido, por ejemplo cuando el aprendiz interactúa con un modelo de enseñanza. En esta perspectiva, basada esencialmente en la semiótica de Pierce (1931-58), se hace la distinción entre *texto* y *espacio textual*, la cual se corresponde con la distinción entre *significado* y *sentido*. Un texto es el resultado de la lectura/transformación hecha sobre un espacio textual, cuyo propósito no es extraer el significado inherente a dicho espacio sino, más bien, producir sentido (Filloy, Rojano, & Puig, 2008, pp 125). El espacio textual es un sistema que impone una restricción semántica a la persona que lo lee; el texto es una nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, hecha por una persona como resultado de un acto de lectura. Así, un modelo de enseñanza es una sucesión de textos que son tomados como un espacio textual para ser leído/transformado en otro espacio textual conforme el aprendiz crea sentido en sus lecturas.

La unidad interactiva de la balanza virtual es un modelo de enseñanza y es un espacio textual, en términos de la perspectiva teórica antes descrita. Cuando los estudiantes interactúan con este espacio textual, se desencadenan procesos de lectura / transformación en los que se produce sentido: el sentido de las acciones en el modelo y sus correspondientes con los elementos de la ecuación, en el nivel simbólico de la sintaxis algebraica.

Por otra parte, en este marco teórico, el álgebra simbólica es considerada un sistema matemático de signos (SMS), entendido como un sistema de signos (con su código correspondiente) en el que hay una posibilidad socialmente convencionalizada de generar funciones sígnicas (Filloy, Rojano, & Puig, 2008, pp. 7). Se adjuntan a los SMS los sistemas de signos o estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza. De acuerdo a Filloy, los textos producidos por lecturas que utilizan diferentes estratos pueden llegar a ser descritos en un SMS, pero cuando esto último no sucede, solamente la creación de un nuevo SMS lo hará posible. El proceso de crear nuevos SMSs para tal propósito es un proceso de abstracción y el nuevo sistema de signos es más abstracto que los anteriores. En el caso que aquí nos ocupa, el nuevo sistema de signos es el del álgebra y es más abstracto que el sistema de signos de la aritmética, el del modelo y el de los estratos intermedios constituidos por las producciones propias de los estudiantes como resultado de su interacción con el modelo virtual. En una sección posterior se mostrarán ejemplos de este tipo de producciones.

2.3. Método y recolección de datos: sesiones con y sin la balanza

El estudio se llevó a cabo con un grupo de ocho alumnos de secundaria, de 12 a 14 años de edad, quienes no habían recibido instrucción sobre el método algebraico de resolución de ecuaciones lineales. Se prepararon hojas de trabajo de acuerdo al circuito didáctico de la unidad interactiva de la balanza, así como un cuestionario inicial y uno final, para conocer las estrategias y los correspondientes SMS utilizados por los alumnos al resolver ecuaciones, antes y después de su trabajo con el modelo de la balanza. Los ítems de ambos cuestionarios corresponden a ecuaciones tanto aritméticas como no-aritméticas.

Las seis sesiones de clase con la balanza se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo, dentro de un mismo semestre escolar. Se utilizó el despliegue en pantalla grande (pizarrón electrónico) de la unidad interactiva, para explicaciones del maestro y discusiones colectivas; además, los alumnos trabajaron en parejas en la computadora, resolviendo las tareas propuestas en las hojas de trabajo. En la siguiente sección se discuten los resultados obtenidos durante las sesiones de clase.

3. Análisis de resultados

3.1. Sesiones con la balanza simple

En la primera sesión, donde se trabajó con las escenas *"hallando el peso de "x" y representación de ecuaciones lineales en la balanza"*, los alumnos manipulaban el modelo virtual dinámico y lograron relacionar el significado de equilibrio, propio del sistema de signos del modelo, con el significado del signo de igualdad en la ecuación, perteneciente al sistema de signos del álgebra. Sin embargo, no todos los alumnos alcanzan este nivel de comprensión; dos de ellos, al momento de realizar las tareas en papel y lápiz, continuaban escribiendo de izquierda a derecha las transformaciones de la ecuación como cadenas de igualdades (producciones propias que se ubican en un estrato intermedio, entre el sistema de signos de la aritmética y el del álgebra).

Durante la sesión de *resolución de ecuaciones* (segunda escena), los alumnos se mostraron seguros, navegaron por los cinco niveles de la unidad interactiva; desde la resolución de ecuaciones con una sola ocurrencia de la incógnita (ecuaciones aritméticas), hasta la resolución de ecuaciones con la ocurrencia de la incógnita en ambos lados de la igualdad (ecuaciones algebraicas). Las hojas de trabajo resueltas con lápiz y papel muestran cómo los sujetos adoptaron el modelo y lo utilizaban en la solución de ecuaciones con coeficientes mayores a los que admite el modelo virtual. En esta etapa, se observan reproducciones diagramáticas del modelo y la simbología utilizada es una mezcla de estos diagramas con signos de operación aritméticos (producciones personales generadas por la interacción con el sistema de signos del modelo y la incorporación de elementos del sistema de signos de la aritmética).

En la tercera sesión, donde hay que *resolver ecuaciones seleccionando la operación inversa*, se observó un progreso significativo hacia la sintaxis algebraica. Los estudiantes lograron resolver las ecuaciones, eliminando términos por medio de aplicar la operación inversa correspondiente y en la mayoría de los casos no hubo indicios de que hubieran recurrido al modelo de la balanza, ni aún en forma diagramática. A partir de este momento, se observaron procesos de recuperación de las acciones realizadas en el modelo, en un nivel más abstracto, produciendo sentido en relación a las acciones con los elementos de la ecuación. Este nivel más abstracto es el del sistema de signos del álgebra, el cual permitió a los sujetos realizar la lectura/transformación de los textos constituidos por las modalidades de ecuaciones lineales más complejas (por ejemplo las ecuaciones no-aritméticas con coeficientes negativos que no podían modelarse en la balanza). Esto no les era posible cuando ellos se mantenían en estratos intermedios (más concretos) relacionados con el modelo y/o con la aritmética.

Las características de la resolución en esta etapa fueron: utilización de la operación inversa; un uso progresivo de grafías algebraicas (el alumno ya no utiliza el dibujo del modelo, sino que hace uso de la simbología algebraica), aunque en algunos casos aún se observó resistencia a operar la incógnita y un retorno a las estrategias aritméticas. Este progreso hacia la sintaxis algebraica, a partir de la tercera sesión, se puede apreciar en la Figura 4, en la que se muestra fragmentos de las hojas de trabajo resueltas por dos de los alumnos a lo largo de varias sesiones.

Item / Alumno	6X+1=3X+7 X= 2 Segunda sesión	10X+40=5X+50 X=2 Segunda sesión	4x+1=3x+4 X=3 Tercera sesión	6x+8=4x+26 X=9 Tercera sesión	2X – 6 = - 4 X=1 Quinta sesión	3X – 4 = -X +12 X=4 Quinta sesión	6X+4=4X+10 X=3 Sexta sesión	4+6X=-2+9X X=2 Sexta sesión
Francisco	X = 2 (C) 1 6 6 0 7 -1 6 6 2 -3 3 6 3 0	X = 2 (C) 50 10 2 -40 5 5 10 10 5 0	1x=3 (C) 4x=3x+3 1x=3	2x=18 (I) 6x=4x+18 2x=18	X = 2 (I) 2X = 4 X = 2	X = 4 (C) 3X+X = 12+4 4X = 16 X =4	X=3 (C) 6X-4X=10-4 2X=6 6/2 = X X=3 6(3)+4=4(3)+10 22 = 22	X=2 (C) 4+2=9X-6X 6=3X 6/3 = X X = 2 4+6(2)=-2+9(2) 16 + 16
Alexis	X = 2 (C) X x X X x x x X x x X x X x x x x xxxxx1 xxx xx = 111111x xxx = 111111	X = 2 (C) XXXXX XXXXX IIIIIIIII1 xIIII11 IIIIIIIIII xIIII11 IIIIIIIII11 = xIIIII1 IIIIIIIII11 xIIII11 xIIII11 IIIIII1 I111111 111111 2 5 10 0	X = 3 (C) 4x=3x+3 1x=3	2x=18 (I) 6x=4x+18 2x= 18	X = 1 (C) 2X = -4+6 2X = 2 X = 1	X = 4 (C) 3X+X = 12+4 4X = 16 X = 4	X=3 (C) 6X-4X=10-4 2X=6 X=6/2 X=3	X=2 (C) 4+2=9X-6X 6=3X X=3X X=6÷3 X=2

Figura 4. Hojas de trabajo de Francisco y Alexis. (C) = correcto; (I) = incorrecto

3.2. Sesiones con la balanza con poleas

Además del progreso hacia la resolución de una familia más amplia de ecuaciones lineales, el trabajo con la balanza con poleas permitió que los alumnos identificaran y aprendieran el método de transposición de términos. De modo que al final del estudio, los participantes aplicaban indistintamente este método y el de "hacer lo mismo de los dos lados" o "uso de la operación inversa". Hacia la penúltima sesión, los alumnos resolvieron todos los ejercicios y desapareció la resistencia a operar la incógnita en las ecuaciones no-aritméticas. Por otra parte, se dejó atrás el uso del modelo y las ecuaciones se resolvían en el sistema de signos del álgebra, aunque en algunos casos, persistió el uso de signos de operación aritméticos (por ejemplo, ÷). Ya en el nivel sintáctico, reapareció la dificultad para aplicar los métodos aprendidos a una familia más amplia de ecuaciones con números negativos, sobre todo, en los casos de números con signo que no son modelables en la balanza o en el caso de soluciones negativas (por ejemplo, $5x + 7 = -3x - 9$). Esto último confirma los resultados de Vlassis (2002), en el sentido de que la presencia de los negativos representa un obstáculo para la generalización del método.

En la última sesión, sobre la *resolución de ecuaciones con términos con coeficientes negativos seleccionando la operación correcta*, el modelo virtual permitió fortalecer la forma de trabajo que los alumnos ya habían adquirido anteriormente con la balanza simple; esto se pudo constatar en el caso de la transposición de términos, a través de la lista de las acciones que se van ejecutando, la cual se despliega en la parte izquierda de la escena.

Como se mencionó anteriormente, la hoja de trabajo de esta escena contiene ecuaciones tanto aritméticas como no-aritméticas, con estructura aditiva y con sustracción de términos. Se observó que el trabajo final contenía tanto resoluciones con el método de "hacer lo mismo de los dos lados" (para ecuaciones de un paso), como con el método de "transposición de términos" (para ecuaciones con ocurrencias de la "x" en ambos lados) (ver Figura 4, sexta sesión).

3.3. Cuestionarios inicial y final

En la Figura 5 se sintetizan los resultados de los cuestionarios inicial y final y en la Figura 6 se muestran ejemplos de las respuestas dadas por los alumnos a ítems de ambos cuestionarios.

Cuestionario inicial	Cuestionario final
• No hay distinción entre las ecuaciones aritméticas y las no aritméticas	• Estrategias espontáneas $\underline{5x + 2 = -3x - 6}$ $5x + 3 = 8x$ $-6 - 2 = -8$ $x = \frac{8}{8}$
• Métodos de resolución aritmética en ecuaciones algebraicas • No trabajan con la ecuación • Estrategias de ensayo y error	• Uso de la sintaxis algebraica • Verificación de resultados por sustitución • Aplicación de operaciones inversas $10x = 2$ $x = 2 \div 10 = 5$

Figura 5. Resultados generales de los cuestionarios inicial y final

Estudiante / Item	*Gabriel*	*Alexis*	*Estephany*	*Francisco*
VII. 2x – 1 = x + 1 X =	VII. 2X–1=X+1 X=	II. 6 + x = 8 x= 2	VII. 2X–1=X+1 X= 1	VII. 2X–1=X+1 X=-------------
	VII. 2X–1=X+1 X= – 2 2X – 1 = –1 – 1 1X = – 2	VII. 2X–1=X+1 X= 2 2x–x = 2 X= 2	VII. 2X–1=X+1 X=+–2 2x –x = x +1+1 = + 2 x= +2	VII. 2X–1=X+1 X= 2 2x–x = 1+1 X= 2
VIII. 5x + 2 = –3x – 6 X =	VIII. 5X+2= –3X–6 X=	II. 6 + x = 8 x= 2	VIII. 5X+2= –3X–6 X= 1	VIII. 5X+2= –3X–6 X=-------------
	VIII. 5X+2= –3X–6 X= 1 5X +3X = 2 + 6 8X = + 8 8 ÷ X8 5x1+2=3x1–6 7 =	VIII. 5X+2= –3X–6 X= –1 5x+3x= 8x –6–2 = –8 x= –8/	VIII. 5X+2= –3X–6 X= –1 5x + 3x2 8x = 8 x= 8/8 x= –1	VIII. 5X+2= –3X–6 X= –1 5x + 3x = 8x –2–6 = –8 8x = –8 x = –8 ÷8 x= –1

Estudiante / Item	*David*	*Brenda*	*Isaac*	*Jonathan*
VII. 2x – 1 = x + 1 X =	VII. 2X–1=X+1 X=-----------	VII. 2X–1=X+1 X= 1	VII. 2X–1=X+1 X=-----------	VII. 2X–1=X+1 X= + 0
	VII. 2X–1=X+1 X= 2 2x–x=+1+1 1x=2 x=2/1 = 2	VII. 2X–1=X+1 X= 2 2x–x=+1+1 X=2	VII. 2X–1=X+1 X= 2	VII. 2X–1=X+1 X= 2x – x = x = 1 + 1 = 2
VIII. 5x + 2 = –3x – 6 X =	VIII. 5X+2= –3X–6 X=----------	VIII. 5X+2= –3X–6 X=----------	VIII. 5X+2= –3X–6 X=----------	VIII. 5X+2= –3X–6 X= ______.
	VIII. 5X+2= –3X–6 X= 2 2x = 4 X= 2	VIII. 5X+2= –3X–6 X= –1 5x+3x=–6–2 8x=–8 x=–8/8 =–1	VIII. 5X+2= –3X–6 X= –1 5 – 2 = 3 3 – 3 – 6 = –3 x = –1	VIII. 5X+2= –3X–6 X= 5x + 3x = – 6 – 2 8x = – 8 x = – 1

Figura 6. Respuestas de los alumnos a ítems de los cuestionarios inicial (fondo blanco) y final (fondo sombreado). Para Alexis se compara ítem II del inicial con VII y VIII del final.

Estos resultados confirman lo observado en las sesiones de clase (a través del análisis de las hojas de trabajo) acerca de la evolución de los sujetos hacia el dominio de la sintaxis algebraica para la resolución de ecuaciones lineales, aritméticas y no-aritméticas, aditivas y con sustracción de términos, aunque no se tiene evidencia de una generalización completa a todas las modalidades de ecuaciones lineales.

4. Discusión final

De acuerdo con Filloy, cuando se inicia la enseñanza con un modelo concreto es preciso entender las acciones ejecutadas, así como descubrir los elementos de sintaxis implícitos en ellas. Dicho proceso, según este autor, conduce a la abstracción de las operaciones, es decir se desencadenan procesos de recuperación de las mismas en un nivel sintáctico. En el estudio aquí descrito, desde la perspectiva semiótica que se adoptó, puede decirse que el trabajo con el modelo dinámico de la balanza virtual corresponde a actos de lectura/transformación de un espacio textual, en donde cada texto resultante se despliega visualmente en la pantalla y se convierte en un nuevo espacio textual que es leído y modificado, no sólo mental sino también físicamente, por el usuario del modelo. Debido a este hecho, en esa cadena de actos de lectura/transformación hay producción de sentido de las acciones en el modelo, lo cual conduce a una construcción de significado alrededor de la preservación del equilibrio. El trabajo con las escenas de la balanza fija y la elección de la operación inversa favorecieron la producción de sentido de parte de los estudiantes en el nivel de la sintaxis algebraica. Es decir, en este último caso, la imposibilidad de manipular los objetos en la balanza llevó a los alumnos a interactuar con un nuevo espacio textual (el de la ecuación en su versión sintáctica) perteneciente al SMS del álgebra simbólica. Este salto a un SMS más abstracto puede interpretarse como el resultado de la producción de sentido que tiene lugar cuando el estudiante realiza actos de lectura/transformación de ese nuevo espacio textual y los cuales conducen a una construcción de significado alrededor del restablecimiento de la igualdad algebraica; es decir, el alumno descubre los principios implícitos de preservación de la igualdad. Una constatación de ello puede apreciarse de manera nítida en el cuestionario final, en el que los estudiantes resolvieron las ecuaciones enteramente con papel y lápiz, sin acceso al modelo interactivo. Esto último confirma lo reportado por otros autores (Vlassis, 2002; Filloy & Rojano, 1989; Radford & Grenier, 1996) quienes utilizaron en su investigación la balanza en una versión diagramática.

Los resultados provenientes de la sección de la balanza con poleas complementan a los anteriores, puesto que el trabajo simultáneo con la adición y sustracción de pesos condujo a los estudiantes a también descubrir y abstraer las reglas de transposición de términos. Dicho descubrimiento amplió el nivel de competencia algebraica de los estudiantes para la resolución de ecuaciones lineales, del método “hacer lo mismo de los dos lados” al método Viético de “transposición de términos”, así como a la regla de agrupación de términos semejantes. La ampliación además tuvo lugar con respecto al tipo de ecuaciones lineales, pues los estudiantes terminaron resolviendo ecuaciones con términos de coeficientes negativos, aunque en varios casos se manifestaron las dificultades clásicas que los alumnos de estas edades tienen con la comprensión y operación de los números enteros.

Cabe señalar que los procesos evolutivos hacia SMSs más abstractos no estuvieron libres de dificultades para algunos estudiantes, en los que se observaron retornos a un pensamiento pre-algebraico, como es el caso de la resistencia a operar con lo desconocido.

En resumen, adicionalmente a lo reportado por otros estudios realizados utilizando la balanza diagramática, se muestra que con el uso de la balanza virtual, los estudiantes logran extender el método de resolución, en el nivel sintáctico, a distintos tipos de ecuaciones, los cuales rebasan por su estructura más compleja a los tipos desplegados por el modelo. Lo anterior puede atribuírsele, por un lado, a la condición de sistema de signos dinámico, manipulable e interactivo del modelo, en el cual el usuario aprecia visualmente la equilibración o pérdida de equilibrio como resultado de sus acciones y de manera simultánea aprecia el efecto de las mismas en los elementos de la ecuación. Esto, según la interpretación teórica ya expuesta, favorece la construcción de significado alrededor de la noción de igualdad algebraica y de las propiedades de las transformaciones que la preservan, así como la recuperación de dichos significados en el SMS del álgebra. Por otro lado, tal extensión del método puede estar favorecida también por el hecho de que el circuito didáctico completo es recorrido en las dos versiones de la balanza virtual (simple y con poleas); es decir, el alumno regresa a la modelación concreta y vuelve a hacer el recorrido hacia el SMS algebraico cuando aborda el caso de ecuaciones con términos que se sustraen. La emergencia espontánea en algunos alumnos del método de transposición de términos, en este caso se explica como consecuencia del trabajo con el modelo con poleas, el cual funciona por medio de "arrastre" de pesos de un lado al otro y de los platillos superiores a los inferiores y viceversa.

Los resultados expuestos no son concluyentes en relación a su estabilidad en el largo plazo, en vista de que no se aplicaron instrumentos de verificación de manera diferida, tal y como lo hizo Vlasïs en su investigación. En un estudio posterior, actualmente en marcha, se realizan entrevistas individuales al final del trabajo experimental con la balanza virtual y cuatro meses después, mediante lo cual se intenta profundizar en los procesos de lectura / transformación y la consecuente producción de sentido de parte de los estudiantes, que les permite evolucionar hacia la construcción de la sintaxis algebraica alrededor del método algebraico de resolución de ecuaciones lineales, así como extender dicho método al dominio de los números negativos, tanto para el caso en que éstos aparecen como coeficientes como en el que son solución de las ecuaciones.

5. Notas

[1] El signo igual en álgebra tiene diferentes interpretaciones, como igualdad restringida o ecuación, en la que la igualdad se cumple sólo para ciertos valores de la o las incógnitas y la de igualdad irrestricta o identidad, en la que la igualdad se cumple para cualquier valor de la letra.

[2] La balanza con poleas admite la modelación de las ecuaciones con estructura aditiva y ecuaciones con sustracción de términos. Esto quiere decir que sólo pueden modelarse términos con coeficientes positivos que se suman o se restan, pero no términos que incluyen números con signo, como en 7 – (–2x) ó 5x + (–3). A menos que los alumnos supieran la sintaxis de los enteros negativos que les permitieran reducir los casos anteriores a 7 + 2x & 5x – 3, respectivamente. Esto se debe a que los objetos en la balanza siempre tienen peso positivo. Esta unidad interactiva basada en applets fue desarrollada por el grupo de programadores "Descartes" en el Instituto latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) en México y es parte de los materiales interactivos que la Secretaría de Educación Pública (SEP) ha distribuido en las escuelas secundarias en todo el país. El trabajo experimental fue financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) en México, a través del proyecto con número de referencia 80359).

[3] A las ecuaciones de la forma Ax ± B= C estos autores les llaman aritméticas, en virtud de que pueden ser resueltas realizando solamente operaciones sobre números (aplicación de la operación inversa correspondiente en cada paso). A las ecuaciones de la forma Ax ± B = Cx ± D las llaman algebraicas, en virtud de que para su resolución es necesario operar los términos que contienen a la incógnita.

[4] Parte de los resultados a los que se hace referencia en este artículo han sido publicados en Rojano, T. & Martínez, M. (2009) *From concrete modeling to algebraic syntax:Learning to solve linear equations with a virtual balance model*. En Swars, S.L., Stinson, D.W., & Lemons-Smith, S. (Eds). Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University. Vol. 5, pp. 235-243.

Bibliografía

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(2), 249-258.

Filloy, E. (1991). Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning. En Furinghetti (ed.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 48-56. Assisi, Italy

Filloy, E. (1996). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Enseñanza de las ciencias*, *11*(2), 160-166.

Filloy, E. y Lema, S. (1996). El Teorema de Thales: Significado y sentido en un sistema matemático de signos. En F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 55-75). México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. and Rojano, T. (1985a). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts of teaching strategies. En Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 154-158). Utrecht, Holanda.

Filloy, E. and Rojano, T. (1985b). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra). En S. K. Damarin and M. Shelton (eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 75-79). Columbus, OH.

Filloy, E. and Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Filloy, E.; Rojano T. and Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T. and Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, and R. Lins (eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 155-176). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E., Rojano, T. and Solares, A. (2002). Cognitive tendencies: The interaction between semantics and algebraic syntax int eh production of syntactic errors. In a Cockburn and E. Nardi (eds.), *Proceedings of the Twenty-eighth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 129-136. Norwich, UK.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 171-192.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres negatifs. *Recherche en Didàctique des Mathématiques*, *2*(3), 303-346.

Herscovics, R. and Linchevsky, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 196-202).

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 317-326.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*, 229-240.

Kieran, C. and Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The Case of Equivalent Expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(1). Center for Teaching/Learning of Mathematics.

Peirce, C.S. (1921-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss (vols. 1-6) and by Arthur Burks (vols. 7-8). Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

Puig, L. (2004). History of algebraic ideas and research on educational algebra. Regular lecture presented at the *Tenth International Congress of Mathematical Education*, Copenhagen, Denmark. Text available at http://www.uv.es/puigl/.

Radford, L. and Grenier, M. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. *Revue des Sciences de l'education*, *XXII*(2), 253-276.

Stacey, K. and MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, IV*, 190-197.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. *Proceedings of the25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 375-382.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.

María Teresa Rojano Ceballos es Investigadora Titular del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México. Especialista en pensamiento algebraico y en entornos tecnológicos de aprendizaje. Líder del proyecto gubernamental *Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas con Tecnología* y asesora para el *Modelo Renovado de la Telesecundaria*. Miembro del comité asesor internacional de la revista Journal for Research in Mathematics Education y del James J. Kaput Center for Research and Innovation in STEM de la Univ. de Massachusetts en Dartmouth. Co-fundadora del *Laboratorio de Educación, Tecnología y Sociedad*, Cinvestav. Entre sus publicaciones más recientes se encuentran: "Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach", en co-autoría con E. Filloy y L. Puig (*Springer* en 2008); "Mathematics learning in the middle/junior secondary school: Student access to powerful mathematical ideas" en "Handbook of International Research in Mathematics Education" (*Routledge* en 2008); "Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing the unknown" (*Journal for Research in Mathematics Education*, 2010).