

NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 73, marzo de 2010, páginas 103–114

Disecciones de cubos, juegos de persecución y otros problemas

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz
-Club Matemático¹-

Resumen

Presentamos algunas soluciones y enlaces de las disecciones de cubos presentados en el artículo anterior e introducimos los Juegos de Persecución, como otro recurso didáctico para el análisis, planteamiento, búsqueda, discusión y comprobación de soluciones, siguiendo la metodología de resolución de problemas.

Palabras clave

Soluciones disección de cubos. Juegos de Persecución. Juegos como recurso didáctico. Metodología en el uso de juegos. Análisis de juegos.

Abstract

We present some solutions and links dissections of cubes presented in the previous article and introduce the game of chase, as another educational resource for the analysis, approach, research, discussion and testing of solutions, following the methodology of problem solving.

Keywords

Solutions Cube dissection. Pursuit Games. Games as a teaching resource. Methodology in the use of games. Game Análisis.

Más soluciones de las disecciones de cubos 3x3x3

Después de un intervalo de tiempo para que nuestros lectores intentaran construir y resolver las disecciones de cubos de 3x3x3 que planteábamos en nuestro artículo anterior, vamos a dar en éste algunas soluciones de las que quedaron pendientes. Pero no de todas. Es conveniente seguir divirtiéndose con el intento. Y, por supuesto, inventarse alguno más.

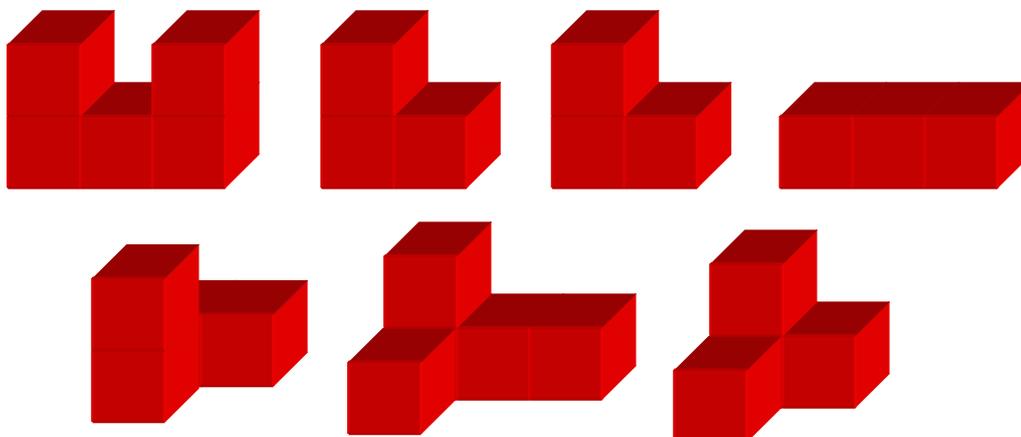
Hoy traemos, también, alguno más. Por ejemplo, “El Cubo de Lola”, bautizado así por sus creadores, Muñoz y Hans, como regalo a nuestra amiga y compañera Dolores de la Coba. Con cubitos de madera y pegamento, o con cubitos encajables, es fácil realizar las piezas. Un estudio posterior nos permitirá conocer las posibles soluciones y si es posible, con las mismas piezas, construir algunas figuras diferentes del Cubo principal.

¹ El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).
jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com



Cubo de Lola

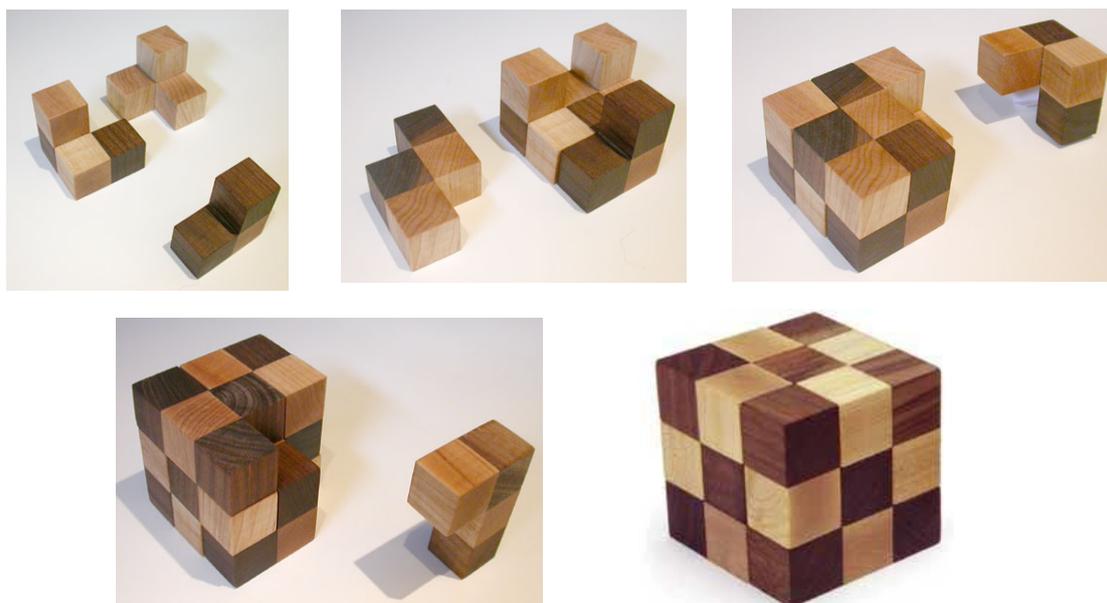
Presenta siete piezas, tres tricubos (dos en V y uno en I), dos tetracubos y dos pentacubos.



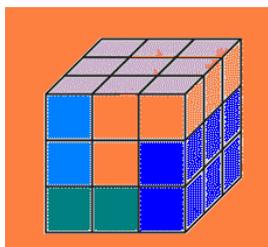
Estamos seguros de que quedaron claras las soluciones del **puzzle de Cardan**, del **Cubo Soma** y del **Cubo 7**, a través de los diferentes diagramas presentados. También les habrá resultado fácil resolver el **Cubo Hermafrodita 2x2x2** siguiendo el video que aparece en la página de Taringa que les facilitamos. Es otra forma de presentar una solución. En Internet es una manera muy frecuente.

De todas formas, es interesante recordar que el Cubo Soma, el Cubo 7, el de Muñoz o de Hans, el Half Hour, etc., tienen otras soluciones para el Cubo y, además, sus piezas permiten formar otra gran cantidad de figuras diferentes. Habíamos indicado que dedicaríamos un nuevo artículo al tratamiento del Soma y lo cumpliremos.

Solución para el Cubo Soma Ajedrezado



Solución para el Cubo de O'Berine



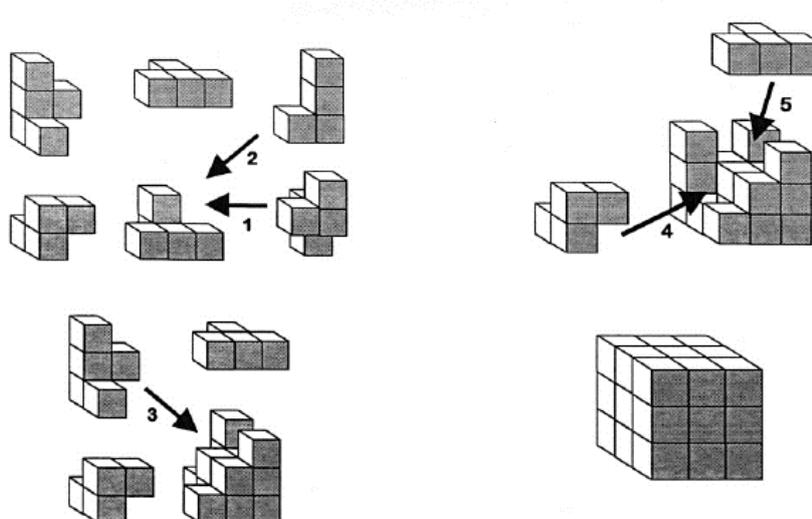
Aunque tiene varias soluciones, vamos a describir una de ellas. Como las piezas son todas iguales, tricubos en forma de V, las podemos agrupar de dos en dos para formar ladrillos de 2x3. Formando tres de esos ladrillos, colocamos uno de forma plana y los otros dos en forma vertical y paralelos entre sí, de manera que queden colocados formando una especie de tribuna donde encajan los tres tricubos restantes colocados de la misma manera. ¿Ha quedado claro?

Solución para el Cubo de Conway

Colocar los seis tetracubos iguales según las tres direcciones del espacio, dejando que los tres cubos unitarios queden dispuestos según una de las diagonales del cubo. ¡Clarísimo!

Solución para el Cubo Half Hour o de Coffin

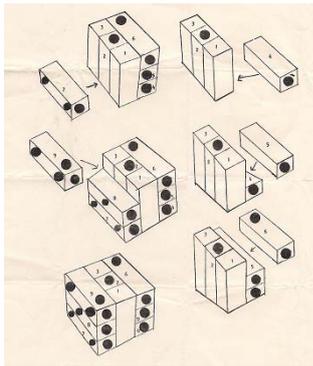
Seguir las instrucciones del diagrama.



Solución para el Cubo dado

Este puzzle es una de las estrellas del Komando Matemático de la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas. No hicimos una exacta descripción de las piezas en el artículo anterior. Sólo hay una pieza sin topos y es crucial estudiar su situación. Casi todo el mundo da por hecho que debe ocupar el centro del cubo. No es cierto. Casi nadie suma los topos para comprobar si el total de puntos que contienen las piezas es equivalente al total de topos del dado. Se comprueba que 21 es el número de topos y que no sobra ninguno; por tanto, todos han de quedar visibles. Mucha gente no conoce la disposición de las caras del dado. Las caras enfrentadas deben siempre sumar siete (el 1 con el 6, el 2 con el 5, el 3 con el 4) y, además, el triedro formado por las caras 1, 2, 3, debe ser levógiro.





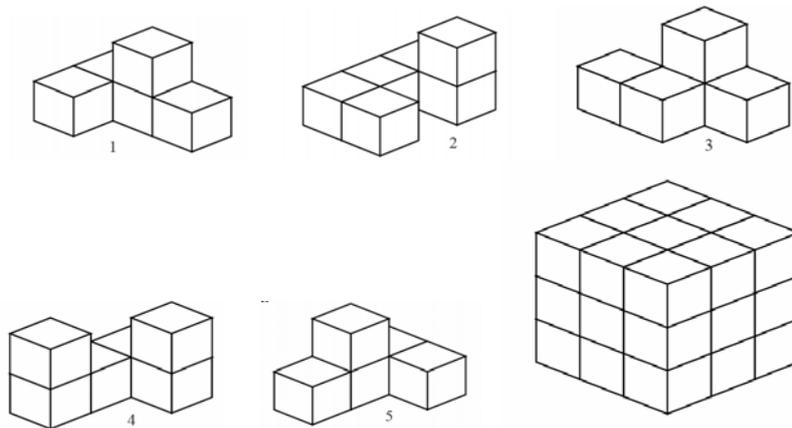
Ésta es la manera de disponer las piezas:

Aunque, luego, cada uno se divierte como quiere y utiliza las piezas como le parece. Lo importante es pasarlo bien y este pequeño cliente del Komando lo está pasando de maravilla.

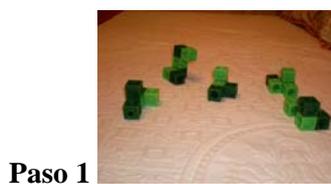


Solución al reto

Habíamos propuesto un puzzle sacado de la página de Homemade Puzzles: **¿Se atreve a buscar una solución en forma de cubo 3x3x3, uniendo las cinco piezas que se reproducen a continuación?**



Esperamos que lo hayan trabajado y encontrado la solución. Nosotros lo hicimos con cubos encajables y hemos encontrado la solución que ofrecemos a continuación:



Paso 1



Paso 2



Paso 3



Paso 4

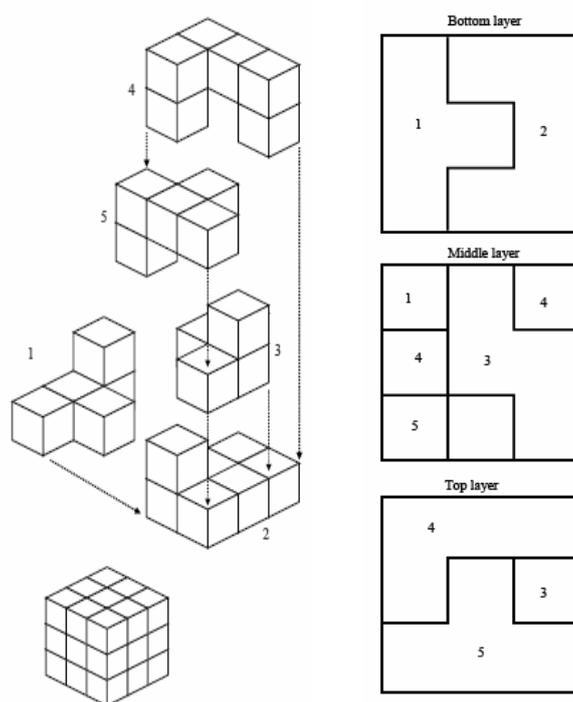


Paso 5



Paso 6 y final

Y ésta es la forma de presentar la solución en el sitio de dónde sacamos el reto:
<http://homepage.ntlworld.com/bruce.viney/plans.html>



Hemos ofrecido en nuestros artículos muchos puzzles y pocos juegos de tablero. La razón es bien sencilla. Aunque nos gustan mucho y son muy interesantes, la mayoría no tiene cabida en el ámbito de una clase de cincuenta minutos. Hay que tratarlos en otras circunstancias: en taller o en actividades complementarias.

Una clasificación exhaustiva de los puzzles del tipo de cubos diseccionados, se puede encontrar en la siguiente dirección:

<http://www.asahi-net.or.jp/~rh5k-isn/Puzzle/-/polyomino-333.xml#polyomino-333>

donde aún no han sido reconocidos algunos de los cubos presentados en estos artículos. Todo a su tiempo.

Para utilizar un juego en clase debe ser de reglas sencillas, materiales al alcance y duración corta de partida. De esa manera podemos disponer de cantidad suficiente para que todos los alumnos estén ante un tablero, puedan ponerse rápidamente a jugar y jueguen un número de partidas adecuadas para poder sacar conclusiones y poder hablar de estrategias ganadoras. Esas características se cumplen en el tipo de juegos que, a continuación les presentamos.

Los juegos de persecución

También reciben el nombre de juegos de caza o de acorralamiento, por sus características. Se pueden jugar sobre un tablero cualquiera, desde un tablero ajedrezado de 8x8, o de menor tamaño, hasta un tablero en forma de cruz, como el solitario inglés, pasando por una variedad de presentaciones, especialmente en los de origen asiático.



También se pueden considerar como juegos de guerra entre fuerzas desiguales. Por lo general, un jugador mueve un grupo numeroso de fichas que avanzan inexorablemente, nunca retroceden, y tratan de acorralar a una sola ficha que maneja el jugador contrario. Este trata de escapar moviéndose en todos los sentidos. Si lo consigue ha ganado el juego, de lo contrario ha perdido. Los más numerosos representan a los cazadores que tratan de acosar y de matar a su presa (o, en otros casos, inmovilizarla). Los otros son la presa, animales peligrosos que tratan de aislar y de coger a los cazadores, uno detrás de otro, y retirarlos del juego. En otros casos, se trata de escabullirse entre sus filas y escapar así al asedio. Casi nunca se mata o come a las fichas contrarias. La desventaja en el número se compensa con una mayor libertad de movimientos expresada en las reglas del propio juego.

Son juegos muy antiguos, y que han gozado de mucha popularidad en ciertas épocas. Pueden presentar muchas opciones de análisis a partir de situar las piezas de salida en distintas posiciones. Todos estos juegos dependen de la habilidad y las estrategias que se inventen los jugadores, y el único elemento de azar va a consistir en la estructura concreta de cada uno de los diferentes juegos. Su análisis revela, en casi todos, que un jugador tendría que ganar siempre, si no comete errores.

Los juegos de persecución aparecieron un poco más tarde que los juegos de guerra. Tuvieron una gran importancia en Asia, donde a menudo el mismo tablero se utilizaba para un juego de guerra o un juego de persecución.

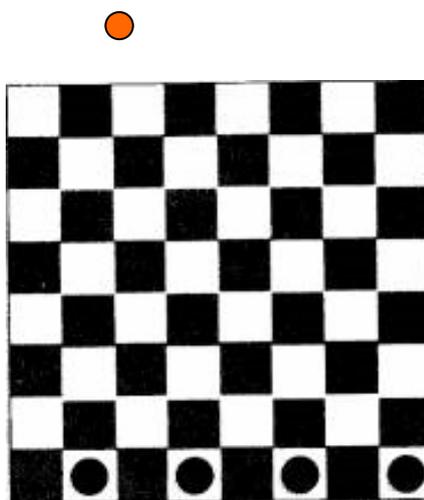
Vamos a presentar cuatro de ellos muy sencillos y, al final, propondremos algunos problemas de estrategia con los más interesantes. Para utilizar los juegos en clase es preciso seguir algunas normas de tipo didáctico, a saber:

1. Presentar el juego. Leer y comentar sus reglas, la estructura del tablero y de las fichas.
2. Jugar libremente para familiarizarse con el juego. Jugar varias partidas.
3. Comentar el desarrollo de las partidas jugadas. ¿Quién ha ganado más veces? ¿Por qué?
4. Aclarar las dudas que se hayan presentado sobre las reglas. Proponer algunos problemas sobre distintas situaciones de una partida. Analizar finales. Estudiar las distintas posibilidades en la salida. Analizar distintas posiciones en el nivel intermedio de la partida. Posibilidades de elección.
5. Proponer el estudio de una estrategia ganadora.

El lobo y los corderos

Se trata de un juego muy popular en todo el mundo, con distintos nombres, por supuesto, y con algunas pequeñas variantes en las reglas. En Canarias se juega mucho, de manera especial en Tenerife (Valle de La Orotava y en Icod de Los Vinos), donde se puede encontrar el tablero grabado sobre los muros de las jardineras en algunas plazas. Aquí se conoce como “El gallo y las gallinas”, o “El gato y los ratones”.

Es un juego para 2 jugadores; se necesita un tablero de damas, ajedrez o alquerque, 5 fichas (por ejemplo, 1 negra para el lobo y 4 blancas para los corderos)



Reglas:

1. La caza se realiza sobre los cuadros blancos de un tablero de ajedrez. Los corderos blancos se alinean en un borde del tablero, mientras que el lobo elige uno de los cuatro cuadros blancos en su línea de base, y tendrá que pensar bien cuál escoge. Para ello también tiene que tomar en cuenta qué jugador mueve primero.
2. Un cordero puede en un turno avanzar un cuadro (diagonalmente), y sólo puede ir en dos direcciones. El lobo solitario también puede mover un solo cuadro, pero tiene la opción de ir hacia atrás. Ni los corderos ni el lobo pueden saltar unos sobre los otros.
3. El lobo gana al llegar a la línea de base de los corderos. La victoria es para los corderos si logran impedirlo, ya que los cuatro forman una franja impenetrable si permanecen ordenados en su avance; el lobo tiene que tratar de forzarlos a abrir la línea con su posición. Si los corderos no se cuidan mucho, el lobo logrará pasar y puesto que no pueden retroceder, al lobo le resta solamente una carrerita para ganar. El lobo sólo tiene una manera de ganarles a los corderos: estando muy atento y confundiendo a sus enemigos.

El asalto

Para dos jugadores. Sobre un tablero en forma de cruz (Solitario inglés). 24 fichas de un color para los asaltantes; 2, de otro color, para los defensores.

El asalto representa a dos valientes oficiales que se defienden en una fortaleza del ataque de fuerzas muy superiores en número, aunque mal armadas y poco móviles. El juego se llama también “Oficiales y cipayos”. El tablero de El Asalto se conforma mediante cinco cuadrados unidos en sus caras para formar una cruz y sobre los que aparecen trazadas perpendiculares y diagonales que definen en sus puntos de intersección las posibles posiciones de las piezas.

Se sortea quién ataca y quién se defiende. Se colocan las fichas de forma que los veinticuatro atacantes rodean y cercan la fortaleza en todos sus puntos exteriores, mientras que los dos defensores ocupan dos de los puntos, a su elección, del interior de la misma. Los atacantes sólo pueden moverse de uno en uno en cada turno, avanzando siempre en línea recta o en diagonal, y son los que efectúan el primer movimiento. Los defensores, movidos también uno a uno, pueden, sin embargo, avanzar, retroceder o desplazarse horizontalmente, amén de seguir las líneas diagonales; pero, eso sí, de punto a punto. La pieza defensora puede “capturar” a cualquiera de las piezas atacantes saltando por encima de ella para pasar de su posición al punto vacío inmediato. La pieza capturada es retirada del tablero. Pueden encadenarse los saltos de este tipo.

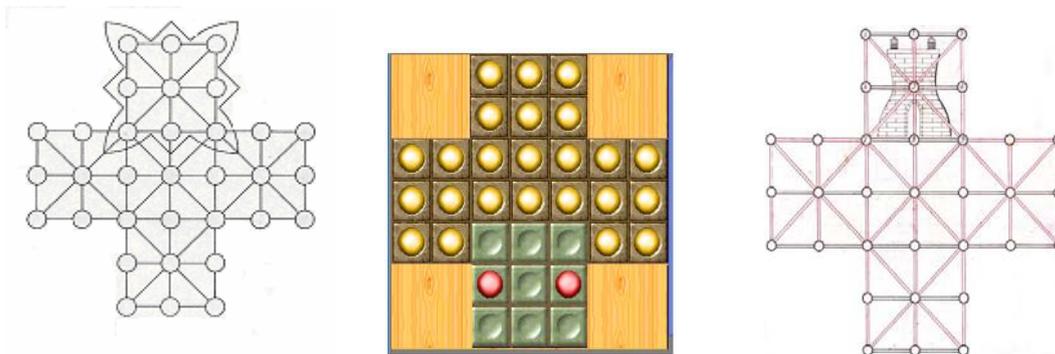
Los atacantes no pueden capturar nunca a los defensores; para ganar deben rodearlos hasta impedirles cualquier movimiento o bien ocupar con fichas propias todos los puntos del interior de la fortaleza.

Los defensores se ven libres del asalto, ganando la partida cuando los atacantes supervivientes no bastan para cercarlos o para ocupar la totalidad de los puntos interiores de la fortaleza.

Investiga cuáles serán las mejores posiciones iniciales para los oficiales. ¿Cuántas posibilidades hay de elección?



¿Cuántas posiciones son posibles sobre el tablero después de un movimiento de los soldados?



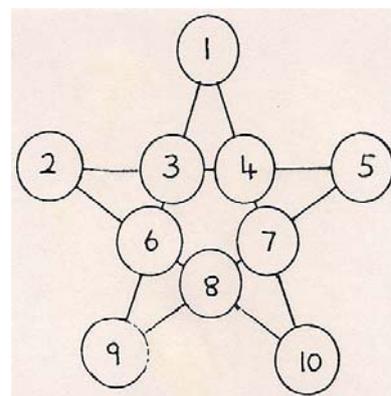
Kaooa

Para 2 jugadores; se precisan 8 fichas (1 negra para el tigre y 7 blancas para los *kaooas*). Sobre un tablero con forma de pentágono estrellado, se juega con las siguientes reglas:

1. Los jugadores eligen ser el tigre o los *kaooas*.
2. Los *kaooas* se colocan en el tablero ocupando las casillas 1 a 7. El tigre puede ser colocado en cualquiera de las restantes tres celdillas. Los *kaooas* mueven primero.
3. Los jugadores, por turno, mueven las fichas como se indica a continuación:
 - (i) el tigre puede mover un espacio a lo largo de una línea en cualquier dirección a una celdilla vacía o capturar *kaooas* (extrayéndolos del tablero) saltando sobre un *kaooa* a lo largo de una línea en cualquier dirección a una celdilla vacía. Se permiten las capturas sucesivas (saltos múltiples)
 - (ii) los *kaooas* pueden mover (uno cada vez) a lo largo de una línea un espacio en cualquier dirección a una celdilla vacía.
4. Los *kaooas* ganan si pueden clavar al tigre de forma que no pueda moverse. El tigre gana si puede capturar tres o más *kaooas*.

Fabricate un tablero de juego siguiendo el modelo.

Juega unas cuantas veces. Contesta después estas preguntas:



Pregunta 1

Los *kaooas* y el tigre han movido una vez. Los *kaooas* están en 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 10. El tigre está en 7. ¿Qué movimiento harían los *kaooas* para atrapar al tigre en dos o más de sus movimientos?

Pregunta 2

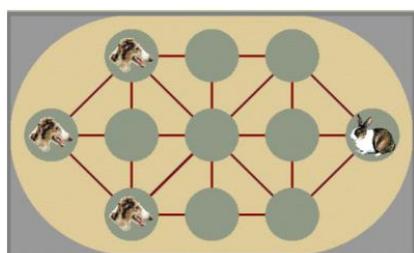
¿Qué celdillas del tablero intentarían ocupar los *kaooas* para asegurar una victoria cuando el tigre comienza en la celdilla 8?
¿Funciona esta estrategia cuando el tigre empieza en las celdillas 9 o 10? ¿Qué pasa si sólo tenemos seis *kaooas*?



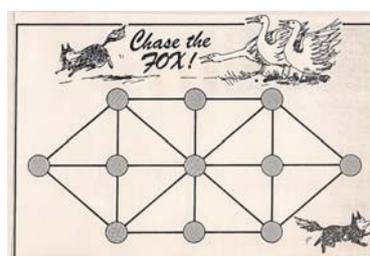
Pregunta 3

Si no permitimos al tigre ocupar todas las celdillas exteriores, ¿pueden los *kaooas* forzar aún una victoria?

El juego militar francés



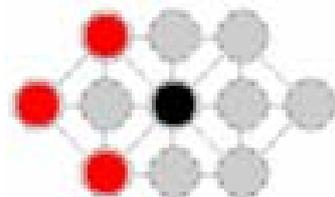
También se llama el Juego de la Guerra, French Military Game, El Gigante y los Enanos, El Halcón y las Palomas, Chase the Fox o Hare and Hounds. La primera referencia que tuvimos sobre él procedía de la revista "The



Australian Mathematics Teacher"; más tarde vimos otras en Gardner, Bell o Conway; en estos momentos hay disponible en las librerías un excelente estudio de E. Lucas (al parecer, el primero que lo trabajó a partir de una propuesta de un militar llamado Dyen, alrededor de 1886) publicado recientemente por la editorial NIVOLA. También se puede jugar en línea; para ello basta con acudir al siguiente sitio web:

<http://www.math.com/students/puzzles/hare/hare.html>

Para 2 jugadores; se necesitan 4 fichas (1 negra para Napoleón y 3 rojas para los soldados ingleses).



Sobre el tablero de la figura se juega de acuerdo con las siguientes reglas:

1ª. Los jugadores eligen ser Napoleón o los ingleses, y colocan las fichas en el tablero en las casillas señaladas en negro o rojo en el tablero. Los ingleses mueven primero.

2ª. Los jugadores, por turno, mueven las fichas como se indica a continuación:

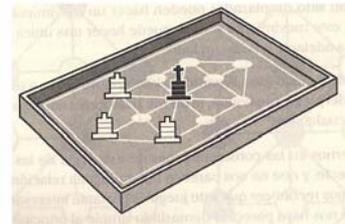
(i) Los ingleses pueden mover a lo largo de una línea un espacio adelante, diagonalmente adelante o hacia los lados a una celdilla vacía (nunca hacia atrás).



- (ii) Napoleón puede mover a lo largo de una línea en cualquier dirección hacia una celdilla vacía
- (iii) No se permiten saltos o capturas.

3ª. Los ingleses ganan si pueden bloquear a Napoleón de forma que no pueda mover. Cualquier otro resultado es una victoria para Napoleón.

Así describe Lucas el tablero de juego: “*El juego se compone de doce triángulos isósceles que forman once estaciones o plazas y de veintiuna líneas que son otras tantas carreteras que unen estas plazas.*”



Las fichas se colocan como se muestra en la figura 1. Los soldados ingleses ganan si atrapan a Napoleón de forma que él no pueda mover, tal como se ve en la figura 2. Napoleón gana en todos los demás casos.

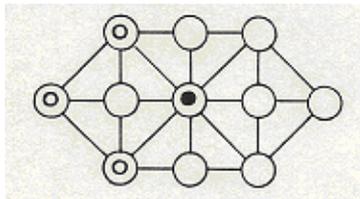


Fig. 1

La revista australiana que hemos mencionado, después de presentar el juego, ofrecía hacer una pequeña investigación con los alumnos mediante el planteamiento de algunas preguntas sobre situaciones diversas del juego.

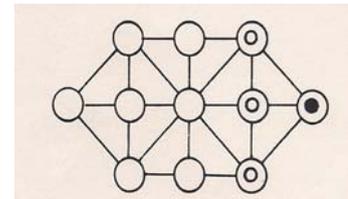


Fig. 2

Pregunta 1

Si los ingleses no ocupan una celdilla en su primer movimiento, Napoleón sería capaz de ganar. ¿Dónde está esta celdilla y qué debería hacer Napoleón para ganar? (¡Cuidado! Esto no es obvio).

Pregunta 2

Después de los movimientos, los ingleses y Napoleón están colocados como muestra la figura 3 de abajo. Es el turno de movimiento de los ingleses. ¿Hacia qué celdilla deben mover los ingleses para impedir la victoria de Napoleón?

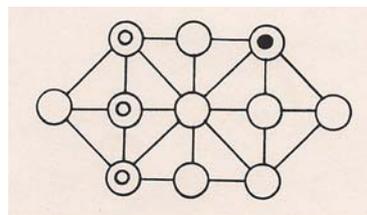


Fig. 3

Pregunta 3

Más tarde, en la partida, los ingleses y Napoleón están como se indica en la figura 4. Es el turno de mover de los ingleses. ¿Cuál es su único movimiento? ¿Cuál es la respuesta de Napoleón y cómo permite esto escapar a Napoleón?

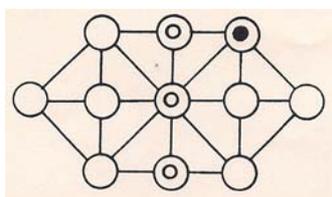


Fig. 4

Pregunta 4

"Mantén tu línea recta" es una táctica defensiva de equipo en la liga de rugby. ¿Es éste un buen consejo para los ingleses?

Pregunta 5

¿Quién tiene la mayor posibilidad de ganar este juego, los ingleses o el francés? ¿Por qué y cómo? ¿Importa si permitimos que Napoleón empiece en otra celdilla (excepto A, en la figura 5 de abajo, por supuesto)?

(Pista: Este juego era favorito entre las tropas francesas durante las guerras napoleónicas).

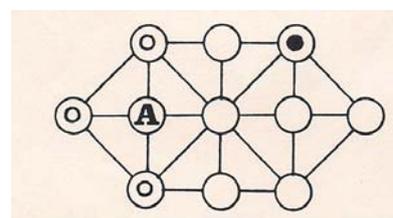


Fig. 5

Pregunta 6

¿Importa si añadimos otra manera de que los ingleses ganen? Esta es que los ingleses ganan si pueden colocar sus tres fichas en las posiciones X, Y y Z (ver figura 6) antes de que Napoleón se mueva completamente detrás de la línea inglesa (ver figura 7 para un ejemplo donde los ingleses ganarán en su siguiente movimiento).

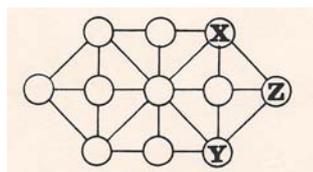


Fig. 6

¿Por qué no las trabaja con sus alumnos y nos cuenta aquí lo que ha ocurrido?

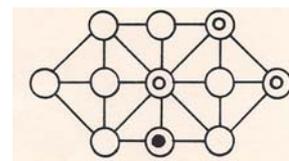
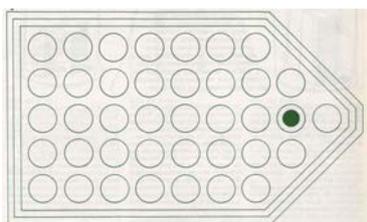


Fig. 7



El general y los rebeldes

Tiene origen en China. Para dos jugadores, uno hace de General y el otro mueve los Rebeldes. Un tablero de forma muy especial, 1 ficha de un color (el General) y 20 de otro (los Rebeldes). El objetivo es que el General intenta eliminar la mayor cantidad de rebeldes, de modo que los restantes no sean suficientes para encerrarlo; o bien llegar al campamento donde quedará a salvo. Los Rebeldes ganan si logran inmovilizar al General, rodeándolo por completo.

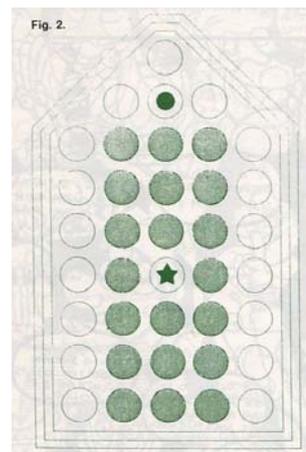


También puede recibir otros nombres (Juego de la Rebelión) y tener algunos cambios en la cantidad de fichas o en las reglas. Daremos las más usuales.

Se sortea qué fichas debe manejar cada jugador. Se juega por turnos, alternativamente.

El General puede matar a los Rebeldes, pero éstos no pueden matarlo a él; en su lugar deben arrinconarlo para que no pueda moverse. La casilla marcada con una estrella es el campamento del General; allí estará a salvo. El General arranca de la casilla central del tablero. Los soldados ocupan las tres filas centrales, desde el borde más estrecho del tablero hasta el campamento, rodeando totalmente al General.

La primera jugada corresponde al General. Deberá matar a uno de los Rebeldes. La siguiente jugada corresponderá al jugador que maneja a los Rebeldes, que moverá una de sus fichas a un lugar contiguo vacío. Todos, el General y los Rebeldes, se desplazan en las direcciones ortogonales del tablero, nunca en diagonal. Los Rebeldes deberán cortar el camino del General hacia el campamento, pero sin exponerse a ser comido. El General puede mover hacia un sitio vacío contiguo o comer, saltando sobre uno de los rebeldes hacia el sitio adyacente que deberá estar vacío. La ficha comida será retirada del tablero. En un mismo turno, el General puede matar a varios rebeldes con saltos encadenados. Sin embargo, matar no es obligatorio.



El General gana cuando ha matado tantos rebeldes que no quedan suficientes para inmovilizarlo. También gana si consigue llegar a su campamento.

Los Rebeldes ganan cuando logran rodear o bloquear en una esquina o en cualquier otra parte del tablero al General, de tal manera que no pueda comer ni mover.

Veremos las respuestas a las preguntas planteadas en un próximo artículo. También, en próximas ocasiones podremos hablar de otros juegos de esta misma familia como Tablut, Rimaurimau, Bagh-Chal o Kungser, muy interesantes todos ellos. En ello estamos; hasta la próxima.

Club Matemático