

# NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 73, marzo de 2010, páginas 5–22

## Zoel García de Galdeano y Yanguas (Pamplona, 1846 - Zaragoza, 1924)

Elena Ausejo (Universidad de Zaragoza)

*Fecha de recepción: 24 de octubre de 2009*

*Artículo solicitado a la autora por la revista*

### Resumen

Este trabajo presenta la biografía científica de Zoel García de Galdeano, uno de los tres artífices –junto con José Echegaray y Eduardo Torroja– de la modernización matemática española en la Restauración. Se estudia su trabajo de importación de las principales teorías de la matemática moderna en álgebra, geometría y análisis, sus propuestas en cuanto a metodología, didáctica y organización curricular de las matemáticas y su labor como director de la primera revista matemática española, *El Progreso Matemático*.

### Palabras clave

Matemáticas, España, Siglos XIX-XX, Zoel García de Galdeano y Yanguas.

### Abstract

This paper presents the scientific biography of Zoel García de Galdeano, one of the three architects –together with José Echegaray and Eduardo Torroja– of the modernization of mathematics in Spain during the Restoration. His import of the main theories of modern mathematics in algebra, geometry and analysis, his proposals in terms of methodology, didactic and curricular organization of mathematics, and his work as director of the first Spanish mathematical journal, *El Progreso Matemático*, are studied.

### Keywords

Mathematics, Spain, 19<sup>th</sup>-20<sup>th</sup> Centuries, Zoel García de Galdeano y Yanguas.

## 1. Introducción

*A Zoel y Mariana Hormigón,  
en recuerdo de su padre*

Nacido en Pamplona el 5 de julio de 1846, García de Galdeano se trasladó con su madre a Zaragoza en 1863, tras el fallecimiento de su padre –capitán del ejército fusilado por los insurrectos de la Isla de Santo Domingo– y de su abuelo materno – José Yanguas y Miranda, historiador de Navarra y Secretario de la Diputación Foral de Navarra. Como quiera que su padre había previsto que siguiera la carrera militar, García de Galdeano no había sido matriculado en el Instituto de Segunda Enseñanza de Pamplona, de modo que optó en Zaragoza por seguir la carrera de Perito Agrimensor tasador de tierras y, a continuación, la de Maestro de primera enseñanza, obteniendo en 1869 el título de Maestro superior. Habiéndosele colocado en el decimonoveno lugar en las oposiciones para escuelas elementales, determinó seguir el rumbo universitario y, proclamada la libertad de enseñanza en ese mismo año de 1869, obtuvo el Grado de Bachiller en septiembre examinándose por enseñanza libre. Acto seguido se matriculó en la Facultad de Filosofía y Letras y desde el año siguiente simultaneó estos estudios con los de la recién creada Facultad (Libre) de Ciencias, ejerciendo además como profesor particular de matemáticas para contribuir al sostenimiento económico de su madre. Obtenidas ambas licenciaturas en 1871, fue nombrado catedrático de Cálculo diferencial en ese mismo año y



recibió su doctorado en Ciencias antes de que nuevas disposiciones legislativas terminaran por suprimir tanto la licenciatura como el doctorado en Ciencias de la Universidad de Zaragoza.

En 1872 colaboró en la creación del Instituto Libre de Calahorra, desde donde se trasladó en 1875 primero al colegio de Nuestra Señora del Carmen de Logroño –agregado el Instituto– y posteriormente al Ministerio de la Gobernación; allí ejerció como escribiente hasta que con la llegada al gobierno de Sagasta fue declarado cesante. Empezó entonces, por una parte, su dedicación decidida a la que sería su principal actividad vital, a saber, el estudio y la enseñanza de las matemáticas; por otra, sus intentos para ingresar en el profesorado, que culminaron en 1881, cuando en sus terceras oposiciones obtuvo la Cátedra del Instituto de Ciudad Real. Tras un fugaz paso por el Instituto de Almería ejerció en el de Toledo desde 1883 hasta que, en 1889, comenzó a desempeñar la Cátedra de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, de la que pasó en 1896 a la de Cálculo Infinitesimal.

García de Galdeano fundó y dirigió la primera revista estrictamente matemática publicada en España, *El Progreso Matemático*, que editó en dos series (1891-95 y 1899-1900) y en cuya elaboración su protagonismo directo resulta más que aparente. *El Progreso Matemático* fue la primera vía de acomodación de la comunidad matemática española a los moldes de la matemática moderna en el contexto internacional, tanto en lo relativo a aspectos internos y doctrinales, por la labor de difusión conceptual que muestran sus páginas, como en lo referente a la apertura de canales de relación e intercambio interno y externo entre comunidades matemáticas.

También fue García de Galdeano el primer matemático español contemporáneo que participó asiduamente en congresos internacionales y en organismos directivos de la comunidad matemática internacional. Así, aparece registrado en los Congresos Internacionales de Matemáticos (ICM) de Zurich (1897), París (1900), Heidelberg (1904), Roma (1908), Cambridge (1912) y Estrasburgo (1920), salvo en el de Heidelberg siempre con sus respectivas comunicaciones; en Cambridge, figura además como miembro del Comité Internacional del Congreso, siendo el primer español miembro del Comité Internacional de un ICM. También figura en los congresos de la Association Française pour l'Avancement des Sciences (AFAS) de Besançon (1893), St. Etienne (1897) y París (1900), en el primero y último caso presentando sendas comunicaciones; en Besançon actúa, además, como Presidente de Honor de las Secciones de Matemáticas, Astronomía, Geodesia y Mecánica y en París como Presidente de Honor de la Sección de Pedagogía y Enseñanza. En 1899 asistió al Congreso Internacional sobre Bibliografía de las Ciencias Matemáticas, donde fue elegido miembro de la Commission Permanente du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques; no cabe sino atribuir, al menos parcialmente, al crédito internacional de García de Galdeano el hecho de que este congreso decidiera incluir el español entre los idiomas oficiales contemplados para recoger los títulos de los trabajos en el futuro repertorio bibliográfico. También desde 1899 fue miembro del Comité de Patronage de la que sería la más prestigiosa revista internacional de enseñanza de las matemáticas, *L'Enseignement Mathématique*, que en ese año inauguraría sus páginas precisamente con un artículo de García de Galdeano. Más adelante, en el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma, sería nombrado delegado español en la Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique (ICME) y le sería encomendada la presidencia de la Subcomisión española.

Con esta experiencia internacional, no es de extrañar que participara activamente en los primeros congresos de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (Zaragoza, 1908; Valencia, 1910; Granada, 1911) y que acogiera con entusiasmo la fundación en 1911 de la Sociedad Matemática Española, que presidió desde 1916 hasta su muerte. En este mismo intervalo presidió asimismo la recién creada Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza, de cuyo núcleo fundador había formado parte.

Más de 190 trabajos entre libros, artículos, conferencias y reseñas componen el legado bibliográfico de García de Galdeano<sup>1</sup>. Entre las realizaciones de su obra cabe destacar su labor de importación de las principales teorías de la matemática moderna –como la teoría de conjuntos de Cantor, las geometrías no euclídeas o los espacios n-dimensionales– y de la obra de los principales protagonistas de la matemática de la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX –como Weierstrass o Klein–. Su notable tarea en el terreno de la modernización de la matemática española se realizó fundamentalmente a lo largo de tres décadas, las dos últimas del siglo XIX centradas en el álgebra y la geometría respectivamente, la primera del siglo XX en el análisis matemático, pero sus escritos matemáticos se inician ya en la década de los setenta, durante su estancia en La Rioja, con dos trabajos que marcan tendencia en su obra y muestran ya algunas de las características que serán constantes en su producción. Se trata de *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas* (Zaragoza, 1874) y *El método aplicado a la ciencia matemática* (Logroño, 1875), donde puede apreciarse ya la interesante conjugación de su formación filosófico-científica, su interés en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su preocupación metodológica en relación con la creatividad y el desarrollo matemático.

En esta misma época Galdeano traspasa ya la frontera española con su siguiente trabajo, titulado *Literatura científica contemporánea, causa de su desarrollo*, publicado en la *Revista Española* (Madrid, 1876), que mereció una elogiosísima reseña en *Il Precursore di Palermo* a cargo de su editor, Domenico di Bernardo.

También emerge a nivel nacional con dos trabajos que son objeto de publicación por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, *Exposición histórica y didáctica de la teoría de las cantidades imaginarias* (1878) y *El álgebra histórica y críticamente considerada* (1879), este último preludio de la década algebraica.

## 2. La obra de García de Galdeano en Álgebra

Dice García de Galdeano en su *Autobiografía*<sup>2</sup>, refiriéndose a la obtención de su cátedra en Ciudad Real, que una vez en tierra firme todo le fue fácil. Tan eufórico debió inaugurar la década que hasta se atrevió a enviarle copia de sus publicaciones al “*gran Cayley*” que, contra todo pronóstico, le contestó remitiéndole a su vez dos de las suyas. No es descabellado suponer que con este segundo contacto internacional perdiera García de Galdeano el miedo –que no el respeto– a los “*grandes matemáticos extranjeros*”, y probablemente el éxito de estas primeras experiencias no sea ajeno al importante número de relaciones internacionales que García de Galdeano estableció a lo largo de su carrera.

En la década de 1880-90 García de Galdeano, a la sazón itinerante catedrático de institutos de Castilla La Nueva, comienza a levantar con tesón y rigor su propio edificio, sobre la base metodológico-filosófica que ha elaborado en los años anteriores, que permite intuir la gran explosión de los veinte años posteriores. Entre los ocho trabajos que salen de la imprenta con su firma destacan los tres de álgebra: *Tratado de Álgebra (Parte Elemental)* (Toledo, 1883), *Tratado de Álgebra con*

<sup>1</sup> La relación más completa de sus trabajos publicados aparece, como Anexo, en (Hormigón, 1983a, pp. 45-47). La mera lectura de ese Anexo puede dar una idea bastante aproximada de la dirección biográfica e intelectual de García de Galdeano y, de entrada, permite valorar su dedicación a lo largo de toda su vida profesional.

<sup>2</sup> Sobre las cuestiones biográficas véase (Hormigón, 1993) y (Comenge y Hormigón, 1999).



*arreglo a las teorías modernas (Parte Segunda)* (Toledo, 1886) y *Crítica y síntesis de Álgebra* (Toledo, 1888)<sup>3</sup>.

La parte elemental del Tratado de Álgebra está dividida en tres secciones, la primera dedicada a la teoría de algoritmos primitivos, la segunda a la teoría de las funciones explícitas en algoritmos derivados, y la tercera a la teoría de las funciones implícitas. El texto está escrito todavía bajo la influencia de la matemática de finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, en la que los territorios del álgebra y el análisis no están claramente delimitados. Como se recoge en la parte segunda del Tratado tres años después, aún no existe consenso en la comunidad matemática internacional sobre los contenidos del nuevo álgebra, que ya no es sólo la *regula cosae*. Efectivamente, los textos decimonónicos de análisis, algoritmos o álgebra, antecedentes del álgebra del siglo XX que sucederá a las síntesis de Weber y Steinitz, incluyen temas diversos, desde cuaternios y sustituciones hasta teoría de formas y funciones de variable compleja, lo cual es típico del periodo de desarrollo de una nueva teoría, especialmente en el caso de una ruptura sin precedentes en la historia del pensamiento matemático. Esta relativa confusión conceptual fue compartida por autores como Serret, Hoüel, Baltzer, Salmon, Jordan, Hermite, Casorati y muchos otros. No obstante, García de Galdeano no pretendió poner orden en esta confusión, sino hacer accesible al público español – estudiantes y profesores– este gran progreso matemático. Es notable su habilidad para construir las modernas estructuras algebraicas a partir de los conceptos más primitivos. De hecho los conceptos algebraicos básicos de la primera mitad del siglo XIX –incluidos grupos y determinantes– están clara y fácilmente desarrollados en la parte elemental del Tratado, y los capítulos dedicados a la introducción de series y límites destacan también por su sencillez. El tercer libro de la segunda sección, dedicado a la teoría general de operaciones y cantidades, revela la influencia de Boole y Grassmann y muestra la comprensión por parte de García de Galdeano del subsiguiente desarrollo del álgebra como estudio de las propiedades abstractas. Aborda las operaciones partiendo del principio de Hankel, según el cual todo cálculo realizado para cantidades generalizadas debe ser también aplicable a cantidades de orden inferior sin que la generalización introduzca nuevas propiedades o reglas diferentes de las ya admitidas. En cuanto al capítulo dedicado a la generalización del concepto de cantidad, aunque menos profundo y sin relación con la teoría de conjuntos, resulta interesante por su introducción de las cantidades complejas, vectores y cuaternios.

En la estructura de la parte segunda del Tratado García de Galdeano sigue al matemático y filósofo polaco Josef-Marie Wronski, por ejemplo en su clasificación algorítmica. Concebido como un tratado superior según las teorías más modernas, está dividido en dos secciones, la primera dedicada al estudio de la continuidad, la segunda a permutaciones y combinaciones. Consciente de que la primera sección es más analítica que algebraica, García de Galdeano no renuncia a exponer por primera vez en España las contribuciones básicas de Cauchy, algo que mejoraría, modernizaría y rigorizaría en su posterior *Tratado de Análisis Matemático*, enriquecido con la inspiración de Weierstrass y otros grandes analistas del siglo XIX que García de Galdeano incorporó a través de las fuentes más próximas de Picard y Goursat. En la segunda sección, completamente algebraica, sus fuentes son Cayley, Aronhold y Clebsch, y en ella los libros dedicados a sustituciones y determinantes elevan el nivel y mejoran el tratamiento ofrecido en la parte elemental del Tratado conforme a las contribuciones de Cauchy y Jacobi.

Para las funciones de variable compleja había previsto García de Galdeano una tercera parte del Tratado que, por falta de apoyo institucional, nunca vio la luz. En su lugar publicó una *Crítica y Síntesis de Álgebra* que muestra la profundidad, actualidad y proyección de futuro de sus conocimientos algebraicos, la profusión de su erudición bibliográfica y, lo que es más importante, la habilidad para identificar las contribuciones más significativas. Trabajo de síntesis, la *Crítica y*

<sup>3</sup> Sobre el álgebra de García de Galdeano véase (Hormigón, 1991a).

*Síntesis de Álgebra* refunde y actualiza los dos trabajos presentados a la Real Academia de Ciencias en 1878 y 1879, *Exposición histórica y didáctica de la teoría de las cantidades imaginarias* y *El álgebra histórica y críticamente considerada*. Dividido en tres capítulos, el primero analiza el concepto de álgebra partiendo de la *regula cosae* y pasando por su consideración instrumental al servicio del análisis en la matemática lagrangiana hasta desembocar en el papel desempeñado por los conceptos estructurales, en particular el de relación. El segundo capítulo presenta el álgebra como el resultado de una multiplicidad de procesos que se interrelacionan en un determinado momento histórico para generar una nueva rama del árbol de las matemáticas. El tercer capítulo es la síntesis didáctica del momento presente.

Convencido como estaba de la importancia de la teoría de conjuntos, a diferencia de muchos de sus contemporáneos, reservó un número considerable de páginas a explicar las teorías de Cantor en conexión con la génesis histórica del concepto de cantidad y la consiguiente especulación sobre el problema de la continuidad. Igualmente explica los resultados fundamentales de Boole, cuya notación adopta. Otra componente básica de su síntesis algebraica es la teoría de ecuaciones: sin entrar a la exposición detallada de la teoría de Galois, traza la línea de desarrollo desde Bézout, Euler, Vandermonde, Lagrange y otros hasta Hermite y Jordan.

Además, este es el primer trabajo en el que García de Galdeano incluye numerosas referencias bibliográficas, algo que luego se convertiría en hábito: los trabajos de Lejeune Dirichlet sobre números complejos, los de Hamilton sobre cuaternios, las ideas de Klein sobre los conceptos de hiperespacio y espacio elíptico e hiperbólico y sobre diferentes tipos de geometrías; los trabajos de Beltrami sobre geometría pseudoesférica, el papel de Weierstrass en la redefinición de casi todos los conceptos analíticos; y más, mucho más. García de Galdeano promovió el estudio y la investigación proporcionando referencias a traducciones francesas de obras alemanas.

Entre tanto, también en esta década evolucionó el pensamiento geométrico de García de Galdeano, como puede apreciarse en la comparativa de la primera edición de la *Geometría Elemental* de 1882, con la segunda, corregida y aumentada en 1888. A la geometría continuaría dedicando García de Galdeano lo fundamental de su esfuerzo creador en la última década del siglo XIX.

### 3. La obra de García de Galdeano en Geometría

Cuando entre 1865 y 1867 Echegaray publicó sus *Problemas de Geometría Analítica* y su *Introducción a la Geometría Proyectiva Superior* la distancia cronológica entre la geometría española y la línea de trabajo de los geómetras franceses no era muy grande, el idioma de expresión de las investigaciones originales era asequible y su vertiente aplicada muy atractiva. Es más, las investigaciones en geometría proyectiva en la línea de Poncelet y Chasles eran modernas, podían construirse sin un gran aparato teórico previo, permitían en alto grado la intuición y presentaban la posibilidad de obtener gran número de resultados nuevos sobre enigmas diversos –aunque de interés variable–. Sin embargo, la sustitución de Chasles por von Staudt por parte del catedrático de geometría de la Universidad Central de Madrid, Eduardo Torroja, acarrió la acomodación rígida de los planes de estudio a una forma parcial de contemplar, entender y practicar la geometría que en el cambio de siglo estaba ya claramente periclitada. Únicamente García de Galdeano primero y su discípulo Julio Rey Pastor después se atrevieron a criticar esta situación de dominio omnipresente de esta particular rama menor de la geometría en el conjunto de la matemática española, que sólo empezó a modificarse a partir de la segunda década del siglo XX, cuando la personalidad matemática y social de Rey Pastor pudo emerger como alternativa a Torroja y su discípulo Vegas.

El caso es que Echegaray y García de Galdeano trabajaron en sus primeros años de geómetras sobre la línea proyectiva francesa representada por la obra de Chasles, y si Echegaray se quedó ahí, no



fue ése el caso de García de Galdeano, que introdujo casi todas las ideas fundamentales del bagaje geométrico del siglo XIX en la segunda edición de su *Geometría Elemental* y en las dos partes de la *Geometría General*, además de en los tomos correspondientes a las aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal de su *Tratado de Análisis Matemático*. Además, debido a su asistencia personal a los Congresos Internacionales de Matemáticos, pudo oír y utilizar inmediatamente las visiones de síntesis que Hilbert, Poincaré, Darboux y otros realizaron en la primera década del siglo XX<sup>4</sup>.

El primer trabajo de geometría de García de Galdeano es *Complemento de geometría elemental o crítica geométrica*, publicado en Madrid en 1881, una prolongación de sus trabajos sobre metodología y organización docente de la década anterior donde se exponen los diferentes métodos de demostración ilustrados con ejemplos y se examina el concepto de verdad geométrica desde un punto de vista clásico. Un año después un resumen de este trabajo es incorporado a la *Geometría Elemental*, constituyendo una segunda y última sección (*Sección Crítica*) que sucede a la inicial *Sección Expositiva*, ésta a su vez divide en dos partes respectivamente dedicadas a las geometrías plana y del espacio que constituyen un tratado efectivamente elemental. Seis años después, la segunda edición de la *Geometría Elemental* recogía los elementos más preciosos de la primera, pero se extendía además con cierta profundidad y actualidad por nuevos territorios anteriormente inexplorados. Estructurada en dos partes, en la primera, titulada *Teoría de la igualdad y desigualdad geométricas*, se expone resumidamente la doctrina recogida en la primera edición, mientras que en la segunda, titulada *Teoría de la proporcionalidad geométrica*, se plasman las innovaciones e ideas de actualidad, entre las que destacan una presentación de la geometría no euclídea de Lobachevsky y Bolyai y el desarrollo de la geometría proyectiva de Chasles según su obra *Los tres libros de los porismas de Euclides*, cuyo entusiasmo expositivo contrasta con el distanciamiento, cuando no escepticismo, con que se aborda la escueta (tres páginas), distante y hasta escéptica objetividad aplicada a la geometría no euclidiana.

Es en su etapa como catedrático de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza (1889-96) cuando madura la obra geométrica de García de Galdeano, coincidiendo con el enriquecimiento formativo e informativo que le supone la vuelta a Zaragoza y la aventura editorial de *El Progreso Matemático*: los dos volúmenes de la *Geometría General* aparecieron en 1892 y 1895, respectivamente, tras ser publicados por entregas en la revista. En ellos revela ya su atención respecto de los resultados del momento y de la encrucijada conceptual que vivía la geometría en los años anteriores a la síntesis de Hilbert. Precisamente a un planteamiento de síntesis responde García de Galdeano, partiendo de una aproximación histórica en la línea del *Traité de Géométrie Supérieure* y el *Aperçu historique* de Chasles, con esta obra construida sobre el soporte central de la geometría proyectiva de la escuela francesa ahora ya enriquecida con las aportaciones de Möbius, Plücker y sus seguidores alemanes, en la que además analiza monográficamente la Teoría de la Extensión de Grassmann – basándose en el reciente (1893) *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* de Peano– y expone exhaustivamente los cuaternios de Hamilton, poniendo énfasis en la interrelación existente entre las construcciones lógicas de Boole y las metodologías geométricas. Tras un primer volumen dedicado a *Teorías, problemas y métodos geométricos*, el segundo, titulado *Sistematización de la Geometría*, entra de lleno en las innovaciones. Las geometrías no euclídeas constituyen ahora un aspecto central de la obra, en la que relativiza la cuestión de la verdad en geometría y rompe con el concepto absoluto del espacio kantiano sobre la base de una riqueza bibliográfica de fuentes de referencia que incluye, lógicamente, a Gauss, Riemann, Helmholtz y Beltrami. Sin embargo, la *Geometría General* no termina bien, por cuanto García de Galdeano, que con toda seguridad no era perfecto, en un error de perspectiva acabó presentando como sistema geométrico más reciente la geometría del triángulo – muy del gusto de la época – en vez de elegir los desarrollos que a partir del Programa de Erlangen de Klein habían realizado Lie, Poincaré y Pasch. Rectificó un año más tarde cuando, coincidiendo con el paso a la

<sup>4</sup> Sobre la geometría de García de Galdeano véase (Hormigón, 1983b).

cátedra de Cálculo Infinitesimal, se despidió del álgebra y la geometría, acaso cansado de predicar en el desierto, con *Las modernas generalizaciones expresadas en el álgebra simbólica, las geometrías no euclídeas y el concepto de hiperespacio*, donde aborda el tratamiento desarrollado del concepto de espacio y geometría n-dimensional y expone sin concesiones las relaciones entre el álgebra de n unidades complejas de Dedekind y Weierstrass y los espacios multidimensionales, un trabajo que subraya el salto adelante de la geometría algebraica sobre la teoría de grupos de transformaciones, donde el concepto de proyectividad es más fructífero.

#### 4. La obra de García de Galdeano en Análisis

A partir de 1896 la obra de García de Galdeano, entonces ya catedrático de Cálculo Infinitesimal de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, es esencialmente analítica. Su *Tratado de Análisis Matemático*, publicado en Zaragoza, se compone de cinco tomos, los tres primeros dedicados a *Cálculo Diferencial*, *Principios generales de la teoría de las Funciones y Aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras planas* (1904), los dos últimos a *Cálculo Integral y Aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras en el espacio* (1905). A este monumental *Tratado* se suma el de ecuaciones diferenciales de 1906.

El *Tratado de Análisis* comienza con el tomo dedicado al cálculo diferencial dividido en dos libros, el primero dedicado a los principios fundamentales, el segundo a las aplicaciones analíticas. Empezando por la definición de cortadura de Dedekind –todavía llamada *laguna*–, recoge la idea de función de Dirichlet-Weierstrass y señala explícitamente la relación entre los conceptos de función y de conjunto, con lo que el primer capítulo de la obra constituye el primer trabajo escrito en España sobre la teoría de conjuntos de Cantor. Desde el punto de vista conceptual, García de Galdeano parte de la definición de función derivada para introducir después la diferencial y, tras el desarrollo de los resultados elementales más importantes del cálculo diferencial, entra en el cambio de variables –otro tema novedoso en la literatura matemática española desde el punto de vista analítico, que no geométrico– con una sugerente exposición basada en problemas generales en lugar de en teoremas. La eliminación de constantes le permite introducir al lector de forma natural y directa en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales antes de pasar a las aplicaciones analíticas.

El segundo tomo está dedicado a los principios generales de la teoría de funciones –el primer texto español monográficamente dedicado a la teoría de funciones– en cinco libros: introducción, funciones de varias variables reales, variable compleja, funciones algebraicas y *analysis situs*. Weierstrass, Dirichlet, Dedekind y Tannery son las pistas bibliográficas que aparecen sobre la línea argumental del Curso de Análisis de Goursat.

Lógicamente el cálculo diferencial e integral y la teoría de las funciones analíticas constituyen la espina dorsal del *Tratado*, pero además aparecen en él conceptos modernos de esencial importancia en Geometría. Así, el quinto y último libro del tomo segundo, que lleva por título *Análisis Situs*, es el primer texto en español sobre topología, en buena parte construido sobre la irrefutable autoridad de Poincaré (trabajos publicados en el *Journal de l'École Polytechnique* y los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*).

También el tomo tercero, *Aplicación del cálculo diferencial al estudio de las figuras planas*, comienza con una *Introducción* histórica para construir un cuerpo de definiciones y resultados que, aunque incorrecto desde el punto de vista histórico, resulta de gran eficacia expositiva en la presentación de un proceso escalonado y ascendente de conocimientos que parte de Desargues y, sobre todo, de la infraestructura conceptual de Monge, pasa por la pangeometría de Klein y desemboca en la construcción axiomática de la geometría n-dimensional a partir de los desarrollos de Helmholtz, Beltrami, Lie y Klein sobre los grupos de transformaciones y la teoría de la medida. García de



Galdeano va de Chasles –al que llama creador de la geometría superior– a Hilbert pasando por Riemann, aunque no deja de ser llamativa la ausencia de referencias a los *Grundlagen* de Hilbert, acaso una muestra de alineación con el tandem Klein-Poincaré, que a la sazón daba muestras de velada rivalidad con Hilbert. Tras la Introducción se divide este tomo tercero en tres libros, el primero dedicado a la geometría diferencial plana, el segundo a las singularidades de las curvas planas y el tercero al estudio sistemático de las figuras, este último el más innovador por su estudio de las propiedades numerativas de las curvas. En efecto, la geometría numerativa estudia el número de objetos que cumplen un número de condiciones simples partiendo de las condiciones de determinación y de los criterios de descomposición de una curva y, en este contexto, se puede abordar el problema de encontrar un número finito de soluciones de un sistema sean cualesquiera el número de singularidades que contenga. García de Galdeano sigue aquí las *Lecciones de Geometría* de Clebsch – como en el segundo libro sobre las singularidades– hasta abrir una nueva perspectiva en la dirección de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden.

El tomo cuarto, dedicado al cálculo integral, se divide en tres libros, el primero dedicado a la exposición exhaustiva de métodos de integración en el campo real y complejo, el segundo a funciones representadas por integrales y el tercero al cálculo de variaciones. Basado fundamentalmente en el Tratado de Análisis de Picard, se trata de un texto correcto, preciso, extenso y sugerente.

Por último el quinto y último tomo, dedicado al estudio de las figuras en el espacio, está subdividido en cuatro libros que tratan del estudio de curvas en superficies, de las aplicaciones de las integrales definidas, de las superficies en forma paramétrica y de los sistemas geométricos respectivamente, los dos primeros excelentes tratados clásicos, el tercero –en el que se introduce la teoría de la representación conforme– construido sobre el esquema general de la teoría de superficies de Darboux y la geometría diferencial de Bianchi. Como colofón concluye García de Galdeano su examen de la geometría desde el punto de vista de la variación continua declarando su subordinación a la teoría general de grupos y enfatizando la importancia de los trabajos de Lie y Reye como vía de profundización de los estudios geométricos.

A este monumental Tratado se añadía en 1906 el primer texto español sobre la *Teoría de las ecuaciones diferenciales* que, con el subtítulo de exposición de las teorías clásicas, anunciaba la necesidad de complementarse con un nuevo tomo dedicado al tratamiento de los resultados modernos. Pero, desgraciadamente, este nuevo volumen ya no apareció debido a los problemas económicos que le supusieron a García de Galdeano sus sucesivas aventuras editoriales.

## 5. La Crítica Matemática

En su última década productiva –se jubiló en 1918– García de Galdeano acentuó su dedicación a los trabajos de síntesis matemática y a las contribuciones en el terreno de la enseñanza de las matemáticas, acaso los aspectos más genuinamente creativos de su producción, sobre los que llevaba escribiendo desde la década de los 70. Los trabajos de aquella década eran una especie de síntesis elemental del panorama de su obra científica, en los que realizaba una primera aproximación al concepto de matemáticas y su relación con la filosofía, abordaba el estudio interno lógico-formal de las relaciones matemáticas y mostraba su obsesión pedagógica –de hecho, de los dos centenares de títulos que García de Galdeano publicó sobre temas matemáticos, más de la cuarta parte están dedicados a temas de enseñanza, didáctica y pedagogía–.

Ya en su folleto de 1875 sobre *El método aplicado a la ciencia matemática* García de Galdeano buscaba, bajo la directa influencia de Wronski, “la necesidad de encontrar un por qué superior a los razonamientos matemáticos”. La investigación de ese por qué le llevó a la formulación de su primera gran herramienta teórica, *la crítica matemática*, que desarrolló fundamentalmente en sus trabajos



sobre geometría entre 1882 y 1895, y sobre cuyo contenido expuso en el II Congreso Internacional de Matemáticos de París en 1900 una nota cuyo resumen fue recogido en las *Actas* del Congreso. Allí expone de forma sumaria la necesidad de completar los planes de estudios de matemáticas con una nueva rama llamada *crítica matemática*, un ambicioso y estimulante proyecto que tiene como finalidad señalar las vinculaciones entre la generación histórica y lógica de los conceptos matemáticos y acometer el estudio sintético de las diversas ramas de las matemáticas junto al estudio sistemático de los métodos generales. En esta misma línea había presentado ya, en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Zurich en 1897, un trabajo relativo a los problemas de síntesis matemática, titulado *L'unification des concepts mathématiques*, partiendo del criterio de la necesidad de unificar el pensamiento matemático, aspecto en el que sigue la inspiración de Poincaré antes de que Hilbert coincidiera al respecto en su célebre trabajo del siguiente ICM.

En este cambio de siglo García de Galdeano sitúa *El Progreso Matemático* en el terreno de la preocupación pedagógica. Su reaparición en 1899 aspira a sensibilizar a la opinión y a los poderes públicos ante las inminentes reformas educativas, por lo cual los trabajos de la segunda época de la revista girarán en torno al problema de la organización de los estudios de matemáticas en España. Así, en el tomo I de la segunda serie aparece el texto escrito de un curso dado en 1898 en el Ateneo de Madrid sobre *La moderna organización de la Matemática* y un trabajo sobre *La Matemática y su enseñanza*. En 1900 sigue insistiendo desde las páginas de *El Progreso Matemático* en las cuestiones de la reforma de los estudios y su organización y profundizando en temas de didáctica, pero una vez realizada la reforma de García Álix, en un sentido bien distinto del propugnado por García de Galdeano, *El Progreso Matemático* desapareció definitivamente y García de Galdeano cambió de tercio.

Así, en el primer lustro del siglo XX se concentra en el análisis matemático, pero tras la imposibilidad de publicar la segunda parte de su Tratado de Ecuaciones Diferenciales aparece en su obra, a partir de 1907, un cierto rictus de decepción. Porque a pesar de la estima que se le demuestra en el extranjero, su obra sigue cayendo en saco roto en su propio país y sus opiniones apenas si son tenidas en cuenta. Por eso, ante la ineficacia de su labor como propulsor de las doctrinas particulares del Paradigma Hilbertiano, decide un cierto cambio de orientación de su labor doctrinal. De una forma que recuerda –salvando las distancias– a Cajal, pasa a dedicar el grueso de su atención a tres frentes concretos. El primero es el relativo a los problemas de síntesis matemática, partiendo del criterio de la necesidad de unificar el pensamiento matemático ya citado. El segundo, y aquí es donde más se aproxima a Cajal, lo sitúa en la necesidad de una renovación drástica de la enseñanza de las matemáticas, para lo que postula la adopción del instrumento por él definido como *Nuevo Método de Enseñanza Matemática*. Y el tercer frente al que se dedicó fue el de sus clases, sus alumnos y sus programas. La ruptura de la vieja orientación viene señalada por una obra clave, que apareció en 1907: la *Exposición sumaria de teorías matemáticas*, texto condensado de 208 páginas en las que va tejiendo el entramado conceptual de la matemática moderna. A partir de este libro se puede apreciar un cierto cambio de estilo por el que la expresión de García de Galdeano gana en profundidad, pero también en dificultad de comprensión.

En el Congreso de Granada de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPPC, 1911) expone su *Nuevo método de enseñanza matemática* como presentación de sus obras del mismo título en torno a la metodología a desarrollar para abordar y atajar el problema del atraso matemático español. Con anterioridad lleva al Congreso de Zaragoza de la AEPPC (1908) dos trabajos de crítica didáctica, que incide sobre las cuestiones metodológicas y bibliográficas de las matemáticas de cara a la enseñanza, *Algunas observaciones pedagógicas acerca de la Matemática* y *Plan de Enseñanza Matemática*. En ambos las propuestas de García de Galdeano, tanto en lo relativo a los planes de estudio como a las cuestiones pedagógicas, aparecen claras, contundentes y sólidamente razonadas, bien alejadas de los argumentos a la defensiva sobre las excelencias de la ciencia príncipe y



las sutilezas de su pensamiento. Distinguiendo tres ciclos para la enseñanza –elemental o primaria, secundaria y superior o universitaria–, su planteamiento es el siguiente:

- Enseñanza primaria: La enseñanza de las matemáticas debe alternarse con nociones prácticas sobre el estudio de la Naturaleza – contemplación de objetos por ejemplo –. Textos propuestos son *La aritmética del abuelo*, *El sentido común en las Ciencias Matemáticas* de Clifford, *L'initiation Mathématique* de M. Laisant.
- Enseñanza secundaria: En el mismo espíritu de iniciación matemática, nociones de aritmética y geometría elemental en los dos primeros años, introducción del álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado en el tercer año y nociones de geometría descriptiva – rectas y planos– y primeras representaciones de geometría analítica –incluyendo parte gráfica de algunas funciones– en el cuarto año. Debe primarse la intuición sobre la rigurosa demostración y la reflexión sobre la memorización, evitarse la abusiva profundización detallista y adaptarse al orden de un libro como indicador de la materia a asimilar que el profesor debe aclarar y desarrollar. Se citan como modelos los gimnasios alemanes y liceos franceses. Textos propuestos son las obras de Borel, Hadamard, Enriques y Weber y como fuentes de ejemplos amenos las obras recreativas de Bachet de Meziriac, Lucas y Ball.
- Enseñanza superior: Propuesta de Plan de Estudios en la que destaca su radical novedad. El grueso del plan de estudios vigente en 1908 queda relegado a la segunda enseñanza; de las famosas geometrías al uso sólo subsiste una condensada geometría descriptiva y de la posición para primar la geometría analítica. El resto consiste en dar paso al álgebra superior y desarrollar el análisis en toda su potencia. El segundo punto importante reside en la modernidad de la propuesta de García de Galdeano, que testimonian no sólo las obras y autores referenciados sino incluso la facilidad con que se identifican las líneas generales de los curricula matemáticos vigentes hasta finales del siglo XX.

No contento con proponer un esquema integral de enseñanza matemática nuevo y moderno, García de Galdeano procede a razonar su propuesta, que no es arbitraria al albur de sus intereses docentes, investigadores o académicos. Su esquema emana, en primer lugar, de una clara visión del origen, estado actual y perspectiva del conocimiento matemático cuya explicación queda reflejada en el siguiente párrafo –que ilustra además el concepto galdeaniano de crítica matemática–:

(...) podemos observar que el Álgebra es la recta central de un sistema de tres paralelas, cuyas líneas extremas son la Geometría analítica y la Geometría pura. Las tres forman el tronco desde el que se extienden las ramas superiores de la Matemática que, á semejanza de aquéllas, tienen una nueva Álgebra de las funciones, llamada teoría de las ecuaciones diferenciales; que se funda también en la teoría de los grupos, pero continuos, y forma de igual modo la línea central entre la teoría de las funciones, que comprende: 1º, su cálculo en los procedimientos inversos, diferenciación é integración; 2º, su teoría de las funciones de variables reales, cuyo fundamento es la teoría de los conjuntos y la teoría de las funciones de variables complejas, basada en la integración a lo largo de un contorno, ó sea la integral de Cauchy, ramas que comprenden todas las trascendentes elípticas, abelianas, etc.; y, por otra parte, la teorías geométricas incluidas en la Geometría diferencial, que aplica las coordenadas paramétricas de Gauss á la representación geométrica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, que se diversifica de innumerables maneras, bajo las leyes de las transformaciones de los grupos, y se extiende sobre el amplísimo campo de los superespacios, bajo leyes aritméticas del *Analysis situs*.

Pero sobre este desarrollo objetivo, y siguiéndolo en las varias fases de su desenvolvimiento, debe considerarse la acción intelectual que crea el grandioso edificio, y para que tan admirable

adquisición de conocimiento no sea inconsciente, sino por el contrario una especie de fluir de la vida intelectual, según los principios de la razón creadora, que contempla extasiada su obra, deben establecerse enseñanzas de Crítica, Historia y Pedagogía Matemáticas. La Crítica para seguir la acción de la inteligencia, desde las primeras edificaciones hechas por el orden combinatorio, que en ella preside á las demás creaciones subalternas; el estudio comparativo de los principales métodos, cual modos de actuar aquella facultad superior, y hasta la posibilidad de sus procedimientos, que expresan la potencialidad de espíritu; la traducción de las puras ideas en resultados matemáticos. La Historia, que nos revela el modo de generarse las teorías, según se han ido sucediendo".

Los objetivos que García de Galdeano pretende cubrir con su proyecto de enseñanza de las matemáticas son los siguientes:

- Ajustar la enseñanza de las matemáticas a su periodo de desarrollo y crítica y al progreso científico e industrial, en el que destacan las matemáticas, la física y la química.
- Homologar las enseñanzas impartidas en las universidades españolas y extranjeras – Alemania, Estados Unidos, Francia e Inglaterra–.
- Separar la enseñanza universitaria de la preparación para las carreras especiales: el fin de la enseñanza universitaria es el "progreso de la cultura y de la ciencia nacional"; esta superior cultura intelectual será posteriormente "fuente de multitud de estudios de aplicación y estímulo o potencialidad para otros nuevos, según comprueban los hechos".
- Desterrar de la enseñanza universitaria las asignaturas anticuadas, suprimiendo lo que debe pasar a la parte histórica de la enseñanza y elementalizando para la enseñanza secundaria lo que ha dejado de ser superior.
- Integrar en la enseñanza superior la compenetración de las diversas ramas de las matemáticas, evitando las profundizaciones y repeticiones contrarias al concepto de unidad científica. El empleo de los modelos matemáticos, la reducción de doctrina y el uso del análisis constructivo de la ciencia debe acabar con el memorismo, el dogmatismo y el rutinarismo y ejercitar el espíritu de investigación. Imprescindible es el manejo de una amplia bibliografía matemática que ofrezca a los estudiantes un amplio campo de posibilidades adaptable a sus condiciones. La pedagogía y la crítica matemática son las herramientas para lograr un atractivo que provoque la extensión de las vocaciones matemáticas.

La pregunta sobre la bondad y viabilidad del proyecto de García de Galdeano entra de lleno en el terreno del posibilismo. Sólo son constatables la audacia, la modernidad y la sintonización internacional de la propuesta, porque no pasó de ser eso, una propuesta. La modernización de la matemática española, en la que la obra –oral y escrita– de García de Galdeano tuvo indudablemente mucho que ver, se produjo en la universidad española lenta y pesadamente, a través de los cursos de doctorado; fuera de ella el proceso se desarrolló de manera más ágil a través de las nuevas instituciones –Sociedad Matemática Española, Laboratorio y Seminario Matemático–, pero el lastre de una enseñanza universitaria deforme y obsoleta siguió siendo, durante el primer cuarto de siglo al menos, un obstáculo importante a superar<sup>5</sup>.

Un segundo grupo de trabajos de García de Galdeano en la AEPPC lo constituyen los presentados a los Congresos de Valencia (1910) –*Las correspondencias matemáticas en la Ciencia*– y Granada (1911) –*El lenguaje matemático y La Intelectualidad científica*, éste último en la Sección de Ciencias filosóficas, históricas y filológicas–. Ambos tratan de un modo francamente original y ocurrente el tema de la matemática aplicada, y ello pese a que García de Galdeano, como buen

<sup>5</sup> Véase al respecto (Ausejo, 1995).



hilbertiano, creía en el relativismo, teoricismo y antiutilitarismo de las matemáticas y en su derecho al devenir autónomo. Pero como además estaba muy bien informado, no ignoraba el fondo de los nuevos desarrollos matemáticos ni desconocía, en su caso, su aplicabilidad. Con el paisaje de fondo de la batalla entre matemáticos e ingenieros por el control de las matemáticas y habida cuenta de que éstas aún no se habían hecho suficiente hueco en los presupuestos de la educación nacional se entienden mejor no sólo las anteriores reflexiones, sino también otros pronunciamientos de García de Galdeano en el seno de la AEPPC sobre la "idea pura" como "fuente de todo lo material y fuerza de mayor poder del hombre", la utilidad de todas las ideas científicas "unidas en los engranajes de la Matemática", la Matemática como ciencia que aúna como ninguna otra "lo útil con lo agradable" o su carácter "didáctico, educativo", de "organismo adecuado para el desarrollo intelectual" y de "lógica práctica". García de Galdeano es consciente del menosprecio que sufren las ciencias –las matemáticas– en España, pero reconoce como causa del mismo el bajo nivel en que se encuentran debido a las prácticas erróneas en la enseñanza –dogmatismo, memorismo, rutinarismo, grandes lagunas bibliográficas y, a consecuencia de todo ello, nula capacidad investigadora– al reclamar su lugar en el seno de la intelectualidad científica. De ahí su afán por establecer sólidas bases prácticas –que no meros preparatorios– para los estudios de aplicación y su obsesión pedagógica: la clasificación de las matemáticas abstractas y aplicadas le sirve para esbozar un programa de cálculo infinitesimal a explicar desde el año académico 1910-11 en dos cursos, elemental y complementario, de los cuales el primero está dirigido a físicos, químicos, astrónomos, geodestas, actuarios y economistas y el segundo reservado a matemáticos. Y de nuevo por su alejamiento del gimoteo retórico y de los intereses inconfesables es su reflexión original y ocurrente.

Por último, el tercer grupo de trabajos presentados por García de Galdeano en la AEPPC se engloba en el terreno de la crítica matemática en su doble concepción de disciplina sintética que recorre la generación histórica y lógica de los conocimientos por una parte y considera las correlaciones de conceptos que llevan a la inventiva por otra. Las comunicaciones fueron presentadas a los congresos de Zaragoza (1908) –*Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas* y *La Matemática en su estado actual*– y Sevilla (1917) –*La Matemática hasta el presente y en sus aplicaciones futuras*–. Con ello se cierra la contribución de García de Galdeano a la AEPPC, que cabría calificar de destacada por varias razones:

- En el plano teórico, por su exposición divulgativa de la matemática hilbertiana en cuanto a contenido y métodos de la misma.
- En el terreno práctico, por sus audaces propuestas en el terreno de la pedagogía y la aplicación matemáticas.

Por la vía de la didáctica y de la crítica matemática enlazaba García de Galdeano las perspectivas docentes media y superior y ambas con las tareas de investigación pero, además, su preocupación metodológica sobre cómo se crean y desarrollan las matemáticas engarza con buena parte de las preocupaciones de fondo que en este tiempo se estaban formulando, por el camino de la metodología, de la enseñanza de las matemáticas y de la reflexión sobre el papel de las matemáticas en las ciencias naturales y en el conjunto del saber. En las matemáticas de comienzos del último cuarto del siglo XIX bullía ya la necesidad de superar los esquemas y criterios del XVIII e implantar en su lugar pautas más generales que, aun a costa de la brillantez procedimental, aportaran eficacia y generalidad al esfuerzo creador y a los planteamientos docentes.

Con todo, su creación original más importante fue el *Nuevo Método de Enseñanza Matemática*, que aparece enunciado en un folleto de 96 páginas que lleva por título *Ensayos de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática* (1910). A partir de esa fecha la preocupación por el tratamiento teórico del tema fue incesante, ya que la aplicación práctica venía de tiempo atrás. Esta preocupación se tradujo en varias memorias publicadas los años 1911, 1913 – cuando abordó la

construcción de un curso de cálculo infinitesimal de acuerdo a su nuevo método—, 1916 –donde volvió a tratar ampliamente del tema de la síntesis matemática— y 1919. Avatares un tanto propios de las maldades inherentes a los cuerpos de funcionarios le impidieron exponer en el Congreso Internacional de Matemáticos de Cambridge en 1912 como Delegado español de la Comisión Internacional de Enseñanza de las Matemáticas su nuevo método en un adecuado foro internacional<sup>6</sup>.

Por fin, en 1916, cuando García de Galdeano cumple los setenta años, recibe muestras afectivas de consideración por parte de sus colegas. La primera, de sus compañeros de Universidad y conciudadanos en forma de Presidencia de la recién creada Academia de Ciencias de Zaragoza. La segunda, al producirse la muerte de Echegaray, la Presidencia de la Sociedad Matemática Española. Las nuevas nominaciones suponen para García de Galdeano un nuevo acicate para continuar su producción. Así, con motivo de la puesta en marcha de las actividades de la Academia de Ciencias de Zaragoza y, en particular, de su revista, García de Galdeano elabora una serie de trabajos en los que desarrolla de forma profunda, condensada y un poco difícil de entender, ciertamente, sus concepciones sobre el desarrollo más moderno de la matemática y sobre los problemas de síntesis en la elaboración matemática. Dichos trabajos, aparecidos en forma de artículos en la *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza* en 1916, tratan de la idea poincareana de la ordenación en los sistemas matemáticos, de las construcciones matemáticas y de la crítica matemática en su versión más depurada. Los últimos escritos de su vida universitaria y científica están dedicados a temas de enseñanza y pedagogías matemáticas, además de alguna referencia al interés general de la ciencia. Todavía le quedaron arrestos, no obstante, para sufragar, junto con Rey Pastor, la aparición del “Suplemento” de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, sufragio que debió suspender casi inmediatamente con motivo de su jubilación definitiva.

## 6. El Progreso Matemático

Entre 1891 y 1900 García de Galdeano desarrolla la empresa de *El Progreso Matemático*, en la que llama la atención el esfuerzo personal cuantificable en número de páginas escritas que suponen el soporte material de la publicación en sus dos épocas. En la revista la firma del director aparece tras todos los temas posibles y en todas las ocasiones con notable adecuación. Su trabajo en la revista es el de un comodín tanto desde el punto de vista de la redacción como de la impresión. Así, en el inicio de la publicación, junto a la serie de artículos sobre Geometría (proyectiva, del triángulo y algebraica), aparece una de las vertientes más positivas del trabajo de García de Galdeano: las recensiones bibliográficas. Desde las páginas de *El Progreso Matemático*, García de Galdeano anunció, comentó y recomendó gran número de obras matemáticas destacables por su singularidad innovadora. Gracias a la preocupación no compartida de García de Galdeano los matemáticos españoles pudieron conocer suficientemente al día la existencia y contenido de las obras de Darboux, Peano, Veronesse, Battaglini, Borel, Alexandrov y muchos otros. También se deben a la pluma del director la mayor parte de los comentarios sobre la situación de las diferentes instituciones matemáticas europeas, tópico al que contribuyó con aportaciones originales en reiteradas ocasiones.

Pero antes de abordar cualquier análisis morfológico o de contenidos de la revista conviene destacar la sensibilidad de García de Galdeano para comprender cuáles eran los pasos institucionales necesarios sobre los que debía de construirse la matemática moderna. Percibe que mediante una revista pueden conseguirse tres objetivos: primero, divulgar, en forma de artículos y reseñas, teorías actualizadas de contenido matemático y, sobre todo, muchas ideas sobre la situación de las matemáticas en las postrimerías del siglo XIX; segundo, publicar trabajos originales de mayor o menor enjundia; tercera, intercambiar revistas. Los tres objetivos se cumplieron con *El Progreso*

<sup>6</sup> El episodio ha sido relatado en (Hormigón, 1991b).



*Matemático*, y si la publicación murió no fue por el fallido resultado de ninguno de estos tres planteamientos<sup>7</sup>, sino por la incultura matemática general, que incidió en el escaso número de suscriptores –siempre por debajo del centenar–, y por el abandono de los poderes públicos que, desentendidos del desarrollo matemático nacional, abandonaron a su suerte a la revista en el aspecto económico: en 1895 se cierra la primera serie por problemas económicos para reaparecer brevemente (1899-1900) al objeto –ahora sí fallido– de incidir en la inminente reforma educativa. Pero el caso es que gracias a esta empresa voluntarista en los organismos matemáticos internacionales empezó a figurar el nombre de España, representada por García de Galdeano.

La morfología de *El Progreso Matemático* es la habitual de las revistas matemáticas de la época<sup>8</sup>: sección doctrinal –artículos y memorias sobre temas matemáticos–; sección bibliográfica; artículos sobre filosofía, pedagogía e historia de las matemáticas; información varia –actividades de instituciones matemáticas–.

En la sección doctrinal aparecieron artículos de los franceses Brocard, Laisant, Lemoine, Longchamps, Vigarié; los italianos Peano, Césaro, Battaglini, Retali, Vivanti, Gino Loria y Pirondini; los belgas Mansion y Van Aubel; los portugueses Gomes Teixeira, Guimaraes, Schiappa y Monteiro; los alemanes Lampe, Shlegel; el ruso Sollerstinsky; entre otros, lo cual de idea del crédito y la personalidad internacional de García de Galdeano.

También colaboraron la inmensa mayoría de los matemáticos españoles en activo en la última década del XIX: Clariana, Durán Loriga, Bozal y Reyes Prósper, Bentabol, Lasala, Torroja, Krahe, Ríus y Casas, entre otros. Capítulo aparte merecen los trabajos de Ventura Reyes Prósper sobre geometrías no euclídeas y lógica, esta última entonces totalmente desconocida como disciplina matemática en España. Pero en cualquier caso cabe distinguir entre los trabajos de García de Galdeano, centrados en la geometría en la primera serie de la revista y en torno al problema de la organización de los estudios de matemáticas en España en la segunda, y el resto.

Dado que los temas estrictamente matemáticos no podían pasar de un discreto renglón de exposición novedosa o imaginativo resultado, habida cuenta del nivel de modernidad de la comunidad matemática española, no debe extrañar que la más valiosa desde un punto de vista histórico sea la sección bibliográfica de la revista. El trabajo bibliográfico pudo rayar desde el principio a alto nivel, por causa del amplio margen de selección de que dispuso García de Galdeano en vista de la tremenda carencia informativa de que adolecía la comunidad matemática española. Las reseñas bibliográficas estuvieron casi exclusivamente a su cargo, lo que significa que tuvo que realizar un esfuerzo considerable para leer primero y reseñar después textos de profundidad y mérito matemático incontestables, con reseñas que no son meros comentarios escritos sobre el índice, sino largas exégesis en las que de algún modo se deshilvana y facilita la lectura de la obra comentada. En general puede decirse que las reseñas bibliográficas mejoran en la segunda serie de la revista, no sólo porque por la vía del intercambio de revistas había aumentado la cantidad de información que García de Galdeano manejaba, sino también porque se había ampliado su implicación en organismos y relaciones internacionales (AFAS, ICMs, Commission Permanente du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques, Comité de Patronage de *L'Enseignement Mathématique*). Geometría, álgebra y teoría de números, análisis, lógica, filosofía e historia de las matemáticas y publicaciones periódicas son las áreas a las que se adscriben las obras reseñadas.

<sup>7</sup> Del espléndido resultado del tercer objetivo da fe el fondo histórico de la Hemeroteca de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, uno de los más valiosos del país.

<sup>8</sup> Véase un estudio detallado en (Hormigón, 1981).

Fueron bastantes las obras geométricas reseñas, toda vez que era el tema de atención preferente de García de Galdeano en la primera serie de la revista. Dos obras realmente importantes son tratadas con cuidado por García de Galdeano y luego utilizadas en toda su producción posterior: *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de Gaston Darboux y *Fondamenti di geometria a piu dimensioni, e a piu specie di unita rettilinee, esposti in forma elementare* de Veronese. Por lo que respecta a la primera, García de Galdeano puso a la comunidad matemática española sobre la pista de una obra que estaba siendo publicada por fascículos con un análisis expositivo en el que da cuenta de los contenidos del último fascículo publicado y de las vías de inspiración de Darboux, a saber, la escuela geométrica italiana. En cuanto a la segunda, una obra célebre en su día por ser una de las primeras construcciones estrictamente geométricas que recogían la geometría de dos y tres dimensiones como caso particular y que ofrecía un estimulante panorama de problemas abiertos, García de Galdeano explicó con cierto detalle el contenido de los capítulos de la primera parte de la obra, dejando la segunda para un futuro que nunca llegó.

En el terreno del álgebra y la teoría de números, además de dar a conocer en España textos algebraicos de procedencia británica, como el de Salmon, que mejoraban los de uso habitual, cabe destacar la reseña de la *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure*, de Borel y Drach, obra redactada sobre la base de las lecciones del futuro catedrático de historia de las matemáticas de la Sorbona, Jules Tannery, como texto de proyección superior cuya primera parte, redactada por Borel, desarrolla la teoría de números y la segunda, debida a Drach, constituye un curso de teoría de grupos. En el nivel superior de las reseñas de la segunda serie de la revista destaca la de la segunda edición del Álgebra de Weber –aparecida en 1896 y traducida al francés en 1898–, y entre las reseñas de libros españoles hay que hacer constar la del curso que sobre resolución de ecuaciones y teoría de Galois diera Echegaray en el Ateneo de Madrid que, según García de Galdeano, asestó “*el primer golpe a nuestras inveteradas ruinas*”.

La pasión por el análisis le entró a García de Galdeano tras la definitiva desaparición de su revista, pero aún así cabe destacar las reseñas de obras de importancia histórica absoluta, como la *Theorie der Transformationsgruppen* de Sophus Lie, las *Lezioni di Analisi Infinitesimale* de Giuseppe Peano, las *Leçons sur fonctions entières* y *sur la théorie des fonctions* – esta última reseñada menos de un año después de su publicación en 1898–, entre otras.

En definitiva, como escribiera Laisant<sup>9</sup>, director de *L'Enseignement Mathématique*, con *El Progreso Matemático* García de Galdeano emprendió en España la misma preciosa tarea que para la enseñanza y para la ciencia llevó a cabo Gerono en Francia con la creación en 1842 de los *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

## 7. Conclusión: Esforzado Paladín de la Matemática Moderna<sup>10</sup>

Finalmente, algunos detalles permitirán situar mejor la obra de García de Galdeano que, como puede apreciarse a primera vista, fue un matemático con tendencia a la totalidad y con un acusado tropismo hacia los planteamientos de síntesis. Desde el punto de vista de las parcelas estudiadas y cultivadas es evidente que no rechazó rama alguna de lo que desde hace tres siglos se llama matemática pura. Escribió sobre álgebra, geometría y análisis por periodos sucesivos, y sus libros y

<sup>9</sup> *El Progreso Matemático*, 3 (1893), p. 28.

<sup>10</sup> La expresión es de su discípulo Julio Rey Pastor en la “Dedicatoria” de su *Introducción a la matemática superior. Estado actual, métodos y problemas*, publicada en Madrid en 1916. La obra fue reeditada en 1983 por el Instituto de Estudios Riojanos con motivo de la celebración del I Simposio sobre Julio Rey Pastor.



artículos contienen elementos que demuestran la progresiva extensión y profundidad de sus conocimientos.

Otro aspecto, inusual entre los matemáticos españoles de todos los tiempos, es su preferente atención a los problemas sobre metodología y teoría de las matemáticas. Una importante parcela de sus escritos la ocupan los aspectos relativos a la enseñanza y a la didáctica de las matemáticas, tanto en sus aspectos institucionales, como en los referentes a la organización de los estudios y planteamientos programáticos.

Pero García de Galdeano no sería más que un trabajador benemérito o una gloria regional si la relación de trabajos mencionada careciese de interés intrínseco. Desgraciadamente, ésta fue la aproximación más habitual a su figura desde los primeros años del siglo XX, cuando ya era suficientemente conocido por haber dirigido *El Progreso Matemático* y por sus tratados de álgebra, geometría y análisis: alabar su esfuerzo con cierto retintín implícito que en determinados ambientes tiene una explícita lectura, a saber, cuando se alaba mucho el trabajo es que tiene poco que encomiar el talento. Salvo Rey Pastor, algunos otros colegas españoles y extranjeros y alumnos de la época, pocas personas se molestaron en leer las obras de García de Galdeano a la hora de emitir un juicio sobre ellas. Y, por tanto, ante la evidencia del volumen de producción, decidieron encomiar la capacidad de trabajo mejor que los contenidos, limitándose en este aspecto a copiar los comentarios que el propio Rey Pastor hiciera en el Discurso Inaugural de la Sección de Matemáticas del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (Rey Pastor, 1915). Y es que, históricamente, vivir en provincias ha sido casi siempre en España una dura prueba para los intelectuales que han querido ejercer de tales. Y lo ha sido tanto en lo que afectaba a su existencia material como a la posteridad. García de Galdeano no fue una excepción a esta regla y, de hecho, cabe afirmar que su obra, nacida en su práctica totalidad en diferentes puntos de la periferia intelectual española y, en su inmensa mayoría, en la capital aragonesa, no fue conocida –ni reconocida– ni en sus días ni posteriormente en la medida que el esfuerzo y la calidad de su trabajo requerían. Tan sólo al final de su vida, a los setenta años, sus colegas matemáticos acogieron la idea de elegirle Presidente de la Sociedad Matemática Española en una de las más graves crisis que sacudieron el nacimiento de dicha Sociedad –con motivo de la inminente suspensión de la publicación de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1916) –, y salió del ostracismo provinciano a que fue condenado por obra y gracia de la peculiar ordenación académico-administrativa de la Universidad española porque su más notable discípulo, Julio Rey Pastor, decidió que así ocurriera. Tan sólo recientemente, al llevarse a cabo la revisión sistemática de la ciencia española del período anterior a la Guerra Civil, la figura de García de Galdeano ha aparecido con toda su potencia y se ha emprendido la prolija tarea de relectura y análisis de sus escritos<sup>11</sup>.

Mas García de Galdeano no es, en la historia de la matemática española, únicamente un honrado trabajador. García de Galdeano es en toda la dimensión de la palabra un matemático de su tiempo y, en lo que respecta a España, un protagonista imprescindible para explicar la evolución y situación de las matemáticas en España en los años anteriores a la Guerra Civil (1936-39). Y lo es porque en la peculiar cruzada que sostuvo contra el atraso optó por un criterio sensato: es mejor importar ideas poderosas que inventar estupideces<sup>12</sup>. De manera que se ha dicho, un poco apresuradamente, que García de Galdeano no fue un creador. Es una verdad a medias, porque si bien sus preocupaciones fundamentales en estricta ciencia positiva estuvieron más próximas al trabajo de importar lo mejor y más moderno, en lo que fue su especialidad, la crítica matemática, sí que fue un hombre original y

<sup>11</sup> Un desarrollo exhaustivo se encuentra en (Hormigón, 1982).

<sup>12</sup> García de Galdeano, Z. (1913). *Sumario de mis Cursos de Cálculo Infinitesimal, con arreglo al Nuevo Método de Enseñanza*, Zaragoza: Emilio Casañal, p. 29.



descollante, que transmitió ideas profundas, plenamente insertas en el proceso de cambio de paradigma, lo que confiere especial mérito y relevancia a su labor de selección doctrinal en el proceso de importación y modernización. Pero el caso es que García de Galdeano, como Cajal, apostó por romper “*la cadena de hierro de nuestro atraso*” por “*el anillo docente*”, y en esta política de modesto desgaste y de poca vistosidad de cara a la posteridad invirtió buena parte de su tiempo, y no sólo de su tiempo: para ejemplo de científicos de todas las generaciones quedarán las lapidarias frases de su Hoja de Méritos y Servicios:

Me he gastado próximamente 7.000 duros en mi Biblioteca Matemática (mi arsenal). (Me he gastado próximamente) 7.000 (duros) en mis publicaciones de propaganda. Y vivo con privaciones que otros no tienen<sup>13</sup>.

Su jubilación en 1918 puso punto y final a 48 años de vida profesional intensa y entregada a la causa del progreso matemático en España, que para García de Galdeano fue mucho más que el título de su revista. Murió en Zaragoza en 1924.

### Principales Obras de García de Galdeano<sup>14</sup>

*Complemento de la geometría elemental o crítica geométrica*, Madrid, Gregorio Juste, 1881.

*Geometría Elemental*, 1ª ed., Madrid, Gregorio Juste, 1882.

*Geometría Elemental*, 2ª ed. considerablemente corregida y aumentada. Toledo: Menor Hermanos, 1888.

*Tratado de Álgebra (Parte Elemental)*. Toledo: J. Peláez, 1883.

*Tratado de Álgebra con arreglo a las teorías modernas (Parte segunda)*. Toledo: J. Peláez, 1886.

*Crítica y síntesis de Álgebra*. Toledo: J. Peláez, 1888.

*Geometría General. Parte 1ª*. Zaragoza: Carlos Ariño, 1892.

*Geometría General. 2ª parte*. Zaragoza: Carlos Ariño, 1895.

*Las modernas generalizaciones expresadas en el álgebra simbólica, las geometrías no euclídeas y el concepto de hiperespacio*. Madrid: Imprenta de Idamar Moreno, 1896.

*Estudios de crítica y pedagogía matemática*. Zaragoza: Emilio Casañal, 1900.

*Tratado de Análisis Matemático*, 5 vols. Zaragoza: Emilio Casañal, 1904-1905.

*Teoría de las ecuaciones diferenciales. Libro 1º*. Zaragoza: Emilio Casañal, 1906.

*Exposición sumaria de las teorías matemáticas*. Zaragoza: Emilio Casañal, 1907.

<sup>13</sup> El salario anual de un Catedrático de Universidad no superaba los mil duros.

<sup>14</sup> Véase la relación completa en (Hormigón, 1983, pp. 45-47).



*Ensayos de síntesis matemática y Nuevo Método de Enseñanza Matemática.* Zaragoza: Emilio Casañal, 1910.

*Nuevo Método de Enseñanza Matemática.* Zaragoza: Emilio Casañal, 1911.

*Sumario de mis Cursos de Cálculo Infinitesimal, con arreglo con arreglo al Nuevo Método de Enseñanza.* Zaragoza: Emilio Casañal, 1913.

## Bibliografía

- Ausejo, E. (1995). La enseñanza de las matemáticas en España a comienzos del siglo XX: un debate para su reforma. En *International Study Groups on Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, 61-76. Campinas (Brasil): UNESP.
- Comenge, B. y Hormigón, M. (1999). Dos inéditos de García de Galdeano. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 22, 871-909.
- Hormigón, M. (1981). El Progreso Matemático (1891-1900): Un estudio sobre la primera revista matemática española. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 4, 87-115.
- Hormigón, M. (1982). *Problemas de Historia de las Matemáticas en España (1870-1936)*. Zoel García de Galdeano. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.
- Hormigón, M. (1983). Una aproximación a la bibliografía científica de García de Galdeano. *El Basilisco*, 16, 38-47.
- Hormigón, M. (1983). García de Galdeano (1846-1924) y la modernización de la Geometría en España. *Dynamis*, 3, 199-229.
- Hormigón, M. (1991). García de Galdeano Works on Algebra. *Historia Mathematica*, 18, 1-15.
- Hormigón, M. (1991). El affaire Cambridge: Nuevos datos sobre las Matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX. En *Actas del V Congreso de la SEHCYT*, vol. 1, 135-172. Murcia: Promociones y Publicaciones Universitarias.
- Hormigón, M. (1993). García de Galdeano and *El Progreso Matemático*. En Ausejo, E. y Hormigón, M. (eds.) *Messengers of Mathematics. European Mathematical Journals (1800-1946)*, 95-115. Zaragoza: Siglo XXI de España Editores.
- Rey Pastor, J. (1915). Conferencia inaugural de la Sección de Ciencias matemáticas. En *Actas del Congreso de Valladolid*, tomo I, 7-25. Madrid: Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.
- Rey Pastor, J. (1916). *Introducción a la matemática superior. Estado actual, métodos y problemas*. Madrid: Biblioteca Corona.

**Elena Ausejo**, Doctora en Ciencias Matemáticas, es Profesora de Historia de la Ciencia en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, Directora de LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, y Secretaria de la Comisión Internacional de Historia de las Matemáticas.

Email: [ichs@unizar.es](mailto:ichs@unizar.es)