NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 72, diciembre de 2009, páginas 105–120

Olimpiadas, tablas, números, algunas soluciones y un misterioso muro
(Problemas Comentados XXIII)

J.A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

-Club Matemático[1]-

Resumen Soluciones a los ejercicios propuestos en el anterior NÚMEROS, con especial incidencia en la metodología de su resolución. Análisis de los problemas de la XX Olimpiada Nacional Matemática. Propuesta de nuevos enunciados. Ejercicios de diferentes niveles y contenidos.

Palabras clave Resolución de problemas; Olimpiada Matemática; Metodología.

Abstract Solutions to the exercises in the previous number, with special emphasis on the methodology of its resolution. Analysis of problems of the XX Olimpiada Nacional. Proposal for new statements. Exercises at different levels and content.

Keywords Problem Solving; Mathematical Olympiad; Methodology

Estos son los problemas propuestos en nuestro anterior artículo y nuestras respuestas. Esperamos coincidan con las que nuestros lectores hayan encontrado. De no ser así, ya saben, utilicen nuestros correos o el de la revista para darnos a conocer su discrepancia, su mejora o su alternativa. La publicaremos.

TABLA TRIANGULAR

Se colocan los enteros naturales en una tabla según la disposición siguiente. Una línea está señalada por el primer número de esta línea partiendo de la izquierda. Una columna está señalada por el primer número de esta columna partiendo de lo alto. Un número está por tanto señalado por la línea y la columna donde se encuentra. Por ejemplo, el número 15 está en (10, 9).
¿Cuáles son la línea y la columna de 1998?

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	...	...	...	...	...	...	...	...

Una primera reacción nos llevaría a continuar la tabla hasta el 1998 y leer directamente la fila y la columna pedidas. Hay que enseñar a los alumnos que eso no sería un problema. Para que constituya

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife). mgarciadeniz@gmail.com / jaruperez@gmail.com

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

un reto debemos ser capaces de llegar a la respuesta mediante el razonamiento lógico, el uso de las matemáticas que conocemos y, naturalmente, al uso de las estrategias de resolución de problemas. Vamos a ello.

Observemos primero, atentamente, las características de la tabla.

El número de casillas (N) de cada fila es 1, 3, 5, 7, 9,... los números impares, que podemos expresar, en función del orden (n), así: **N = 2 n – 1**

Por ejemplo, para la cuarta fila: N = 2 · 4 **-**1 = 8 – 1 = 7; la cuarta fila tendrá, por tanto, 7 casillas.

El valor de la casilla inicial de cada fila se aprecia que siempre es el siguiente a un cuadrado:

2 = 1 + 1; 5 = 4 + 1 ; 10 = 9 + 1 ; 17 = 16 + 1 ; ... Y ese cuadrado es justamente el valor final de la fila anterior: $1 = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; ... Es decir:

Valor Inicial **(VI) =** $\mathbf{(n-1)^2+1}$ Valor Final **(VF) =** $\mathbf{n^2}$

Para localizar el número 1998 en la tabla, bastará con hacer $(n-1)^2 + 1 = 1998$ y resolviendo, puesto que el valor no puede ser negativo: $(n-1)^2 = 1997$ ➔ n – 1 = 44,68... ➔ n = 45, 68... Tomando el valor entero tenemos que es la fila 45 aquella en la que se encuentra el valor 1998, y cuyos valores inicial y final son:

Valor Inicial **(VI) =** $\mathbf{(n-1)^2+1}$ $= (45-1)^2 + 1 = 44^2 + 1 = 1936 + 1 = 1937$

Valor Final **(VF) =** $\mathbf{n^2}$ $= 45^2 = 2025$

Donde claramente se aprecia que 1937 < 1998 < 2025. Tenemos, pues, la coordenada horizontal (línea 45, con primer número 1937).

Falta ahora buscar la coordenada vertical (la columna y su primer número).

La fila 45 tiene **N = 2 n – 1** = 2 · 45 – 1 = 90 – 1 = 89 casillas. Es decir 44 casillas antes y después de la casilla central de la fila. El número 1998 ocupa, en dicha fila, el lugar 62.

1998 – 1937 = 61 antes que él (de izquierda a derecha)

2025 – 1998 = 27 después (de derecha a izquierda)

Si hacemos 62 – 44 = 18, obtenemos que el valor 1998 se encuentra en la columna número 18, contada desde la columna central del triángulo (incluida).

El primer número de esa columna es el valor final de la fila que tiene el mismo orden:

Valor Final **(VF) =** $\mathbf{n^2}$ $= 18^2 = 324$, que es la coordenada vertical.

Respuesta.- **El numero 1998 se encuentra en la línea que empieza por 1937 y en la columna que se inicia con 324**.

PROBLEMAS

TIEMPO DE VENDIMIA

En la viña del señor Negramol, en un día de vendimia se han llenado 18 cajones grandes y 13 cajones medianos con la uva recogida. Para transportar a la bodega los cajones llenos de uva, el señor Negramol dispone de 3 tractores:

- el tractor A puede transportar, a plena carga, 3 cajones grandes y 2 medianos;
- el tractor B puede transportar, a plena carga, 2 cajones grandes y 1 mediano;
- el tractor C puede transportar, a plena carga, 1 cajón grande y 1 mediano.

Ese día, el señor Negramol ha utilizado al menos una vez todos sus tractores y siempre a plena carga. ¿Cuántos viajes pueden haber sido hechos por el señor Negramol con cada tipo de tractor para el transporte de todos los cajones de uva a la bodega?

Describid todos los posibles viajes y explicad cómo los habéis hallado.

Procederemos de forma sistemática utilizando una tabla que lleve la cuenta de los viajes que realiza cada tractor (tres columnas) indicando el número de cajones transportados, una columna para la carga total, otra columna que lleve la cuenta de los cajones sobrantes y una última columna donde se analice si ese viaje supone una solución o no del problema.

Comenzaremos por suponer el número máximo de viajes para el tractor A y el mínimo para los tractores B y C. No olvidemos que cada tractor debe ir a plena carga y, por tanto, pueden sobrar cajones que no dan para completar un viaje de uno de los tractores.

El número inicial es, por lo tanto, de 6 para A y 0 para B y C. Es decir, se transportan

$$6 \text{ x } (3g + 2m) + 0 \text{ x } (2g + 1m) + 0 \text{ x } (1g + 1m) = 18g + 12m$$

Donde g y m representan “cajón grande” y “cajón mediano”, respectivamente. Obtenemos ahora lo que no se ha podido transportar

$$(18g + 13m) – (18g + 12m) = 1m$$

La valoración nos indica que esto no es una solución; por dos razones: una, sobran cajones; dos, los tractores B y C no realizan viaje, en contra de lo dispuesto en las condiciones del problema.

Expresándolo en una tabla como la que sigue, para que sea válido se han de dar positivamente las dos circunstancias: No sobrar cajones (0 en la quinta columna) y dar cada tractor al menos un viaje (no puede haber 0 en las tres primeras columnas.

Estos resultados se llevan a la primera fila de la tabla.

Para rellenar el resto de la tabla bastará con ir disminuyendo el número de viajes del tractor A y aumentando paulatinamente, de manera razonable, los viajes de los tractores B y C.

Viajes tractor A	Viajes tractor B	Viajes tractor C	Carga	Sobrante	Solución
6	0	0	18 g, 12 m	1 m	No
5	1	1	18 g, 12 m	1 m	No
4	3	0	18 g, 11 m	2 m	No
4	2	2	18 g, 12 m	1 m	No
4	**1**	**4**	18 g, 13 m	0	**Si**
3	4	1	18 g, 11 m	2 m	No
3	3	3	18 g, 12 m	1 m	No
3	**2**	**5**	18 g, 13 m	0	**Si**
3	1	6	18 g, 12 m	1 g	No
2	5	2	18 g, 11 m	2 m	No
2	4	4	18 g, 12 m	1 m	No
2	**3**	**6**	18 g, 13 m	0	**Si**
2	2	7	17 g, 13 m	1 g	No
2	1	8	16 g, 13 m	2 g	No
1	7	1	18 g, 10 m	3 m	No
1	6	3	18 g, 11 m	2 m	No
1	5	5	18 g, 12 m	1 m	No
1	**4**	**7**	18 g, 13 m	0	**Si**
1	3	8	17 g, 13 m	1 g	No
1	2	9	16 g, 13 m	2 g	No
1	1	10	15 g, 13 m	3 g	No

Las cuatro filas señaladas constituyen todas las soluciones del problema.

Se puede abreviar la resolución, rehuyendo la exhaustividad, utilizando el razonamiento y yendo directamente a las soluciones o buscando una regularidad a partir de la primera encontrada.

Para ir directamente a una solución es necesario darse cuenta que para usar una sola vez los tractores B y C, el tractor A debe viajar 5 veces. Pero así sobraría 1 cajón mediano. Se disminuye un viaje de A y se aumenta un viaje de B, con lo cual 4 viajes del tractor C permite transportar todos los cajones. Razonando del mismo modo se pueden conseguir las restantes soluciones. Pero cuidado, con este procedimiento el alumno se puede dar por satisfecho con haber encontrado una solución y no buscar las demás. Parte del proceso de resolución está en acostumbrar a los chicos y chicas a buscar TODAS las soluciones de un problema.

Una vez obtenida la primera solución se puede buscar un patrón que permita obtener las restantes soluciones de manera directa. Para ello basta con tener en cuenta que el tractor A puede ser sustituido por un viaje conjunto de B y C, ya que cargan la misma cantidad. Rebajando, pues, 1 viaje de A y cargando 1 en B y otro en C, simultáneamente, podremos obtener las otras tres soluciones.

También se podrían utilizar procedimientos algebraicos, planteando un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, si **x** indica el número de viajes para A, **y** el número de viajes para B, **z** el número de viajes para C, se tienen las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 18 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$$

de las cuales, por diferencia, se obtiene la ecuación: x + y = 5 de la cual interesan las soluciones enteras: (1,4); (2,3); (3,2); (4,2).

Cada pareja permite determinar un valor para z (respectivamente, z = 7, z = 6, z = 5, z = 4). Se encuentran así también las cuatro posibilidades.

Respuesta correcta:

Las 4 posibilidades

4 viajes para A, 1 para B y 4 para C

3 viajes para A, 2 para B y 5 para C

2 viajes para A, 3 para B y 6 para C

1 viaje para A, 4 para B y 7 para C.

EL NÚMERO MISTERIOSO

Este número de seis cifras distintas, empieza y termina con cifras primas, de tal manera que si trasferimos la cifra final de la derecha al primer lugar de la izquierda, el número así obtenido es cinco veces superior al número original. Pero si transferimos la primera cifra de la izquierda al último lugar de la derecha, el número resulta tres veces el número original.

Si ahora movemos las tres primeras cifras del original y las colocamos al final, a la derecha del número, el resultado es seis veces el número inicial.

¿De qué número se trata?

Si el número lo representamos por *abcdef* (cada letra una cifra), y al cambiar *f* al primer lugar obtenemos un número cinco veces mayor, y además *a* y *f* son primos, planteamos las posibilidades (*f* debe ser mayor que *a*):

$a = 1$ → y $f = 5$ → $5 \cdot a = 5$
$a = 1$ → y $f = 7$ → $7 \cdot a = 7$

$a = 2$ → y $f = 3$ → $3 \cdot a = 6$
$a = 2$ → y $f = 5$ → $5 \cdot a = 10$
$a = 2$ → y $f = 7$ → $7 \cdot a = 14$

Y debemos descartar los pares (*a, f*) con valores (2, 5) y (2, 7) porque el número cinco veces mayor tendría siete cifras. También el par (2, 3) debe eliminarse porque si empieza en 3 no puede ser cinco veces mayor que si empieza por 2. Lo mismo ocurre para el par (1, 5) al considerar que las seis cifras son diferentes (el más pequeño sería 102 345, que no es la quinta parte de 510 234). Valores superiores de a, quedan claramente descartados.

Así que el único par posible es (1, 7).

Si quitamos f = 7 del final del número, éste queda así: *1bcde*, y al colocar 7 al principio nos dará: *71bcde* = 5·*1bcde7*, es decir, si x = *1bcde*:

$$700\,000 + x = 5\cdot(10\cdot x + 7)$$
$$700\,000 + x = 50\cdot x + 35$$
$$49\cdot x = 700\,000 - 35 = 699\,965$$

y **x = 14 285**

Luego $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 8$, $e = 5$ y $f = 7$.

Comprobemos ahora que se cumplen las otras condiciones:

142 857 · 3 = 428 571

142 857 · 6 = 857 142

Y es que el número buscado es el conocido periodo de 1/7, 0.**142 857.**

Respuesta correcta:

Se trata del número 142 857.

Elena Gajate Paniagua, a quien damos las gracias por su comunicado, nos envía esta otra elegante solución:

Sea $N = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$ el "número misterioso".

$$5N = 10^5f + 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e \Rightarrow 99\,995f = 49(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\,285f = 7(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e) \Rightarrow 14285f = 7\left(\frac{N-f}{10}\right) \Rightarrow 7N = 142\,857f \Rightarrow f = 7$$

(ya que $142\,857 \neq \dot{7}$)

Por otro lado,

$$3N = 10^5b + 10^4c + 10^3d + 10^2e + 10f + a \Rightarrow 299\,999a = 7(10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 42\,857a = 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f \Rightarrow 42\,857a = N - 10^5a \Rightarrow N = 142\,857a$$

El único valor de a que hace que N acabe en 7 es 1, luego $N = 142\,857$

No hemos utilizado la tercera condición, la de que $6 \cdot 142\,857 = 857\,142$ ni la de que a y f son primos, ni la de que las seis cifras son distintas.

Siguiendo nuestra costumbre, proponemos ahora algunos problemas nuevos, que extraemos, tal como fueron presentados, de la prueba individual utilizada en la **XX Olimpiada Nacional Matemática**. Esta tuvo lugar en Tenerife del 24 al 28 de junio de 2009, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, **FESPM**, y organizada por la **Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas**. Participaron un total de 60 alumnos de 2º de ESO, acompañados de 21 profesores de todas las Sociedades federadas y del País Vasco y Andorra como invitados.

XX Olimpiadas de Matemáticas. Prueba Individual 2009

1. TETRAEDRO ENTERO

A cada vértice de un tetraedro se le asigna un valor que puede ser +1 o -1. A cada cara se le asigna el valor resultante del producto de sus tres vértices.

¿Es posible que la suma de las caras sea un número impar? ¿Por qué?

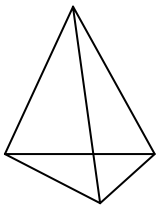
¿Puede ser esa suma cero en algún caso?

¿Qué valores puede tomar la suma de todas las caras?

Solución

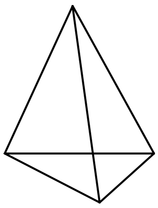
En ningún caso puede ser impar la suma. Hay cuatro valores a sumar. Si son todos positivos o todos negativos, la suma es par. Al combinar los valores entre sí, como (+1) + (-1) = 0, siempre quedarían dos valores o ninguno para sumar con lo cual la suma sería siempre 0 o un número par.

Hay cinco maneras distintas de distribuir los valores +1 y -1 en los vértices del tetraedro.



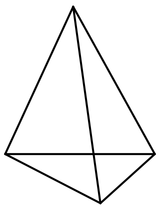
Colocar +1 en cada uno de los cuatro vértices.
A cada cara corresponde un valor +1.

La suma de las cuatro caras vale + 4.



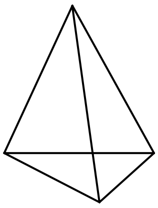
Colocar +1 en tres vértices y -1 en el vértice restante.
A una cara corresponde el producto +1 y a las otras tres -1.

La suma de las cuatro caras vale - 2.



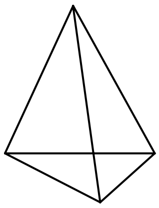
Colocar -1 en tres vértices y +1 en el vértice restante.
A una cara corresponde el producto -1 y a las otras tres +1.

La suma de las cuatro caras vale +2.



Colocar +1 en dos vértices y -1 en los otros dos vértices.
A dos caras corresponden el producto +1 y a las otras dos -1.

La suma de las cuatro caras vale 0.



Colocar -1 en cada uno de los cuatro vértices.
A cada cara corresponde el valor -1.

La suma de las cuatro caras vale - 4.

No hay más distribuciones posibles.

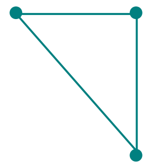
Por tanto, los valores que puede tomar la suma de todas las caras son: +4, -2, +2, 0 y -4.

La suma es cero cuando dos vértices toman el valor +1 y los otros dos toman el valor -1.

2. TRIÁNGULOS Y GEOPLANO

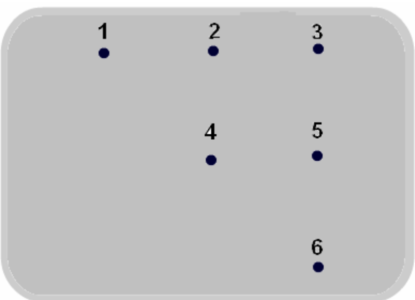
Se tiene un geoplano con la siguiente trama de puntos:

La distancia entre dos puntos consecutivos, tanto en horizontal como en vertical es de valor 1.
Si unimos los puntos entre sí para formar triángulos:
¿Cuántos habrá de perímetro $2 + \sqrt{2}$?



¿Cuántos de perímetro $3 + \sqrt{5}$?
¿Cuántos de perímetro $2 + 2\sqrt{2}$?
¿Cuántos de $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$?
¿Cuántos triángulos se pueden formar, en total, con sus vértices en los puntos?
Utiliza la trama de puntos por detrás de la hoja para explorar las cuestiones planteadas.

Solución



¿Cuántos triángulos se pueden formar, en total, con sus vértices en los puntos?

Para hallar el número total de triángulos que se pueden formar en la trama de puntos, basta con numerarlos de 1 a 6 y realizar todas las combinaciones posibles tomando tres de ellos en orden consecutivo.

Serían:

(Se descarta el 123: no forman triángulo porque están en línea recta)

124 125 126

134 135 136

145 (Se descarta el 146: no forman triángulo porque están en línea recta)

156

234 235 236

245 246

256

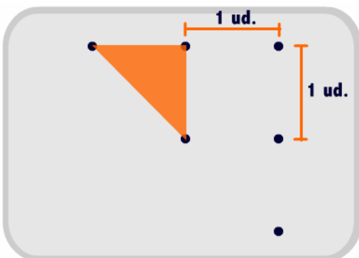
345 346 (Se descarta el 356: no forman triángulo porque están en línea recta)

456

Hay, pues, un total de 17 triángulos.

Este cálculo también podría ser realizado a través de las combinaciones de seis puntos tomados de tres en tres: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$, a los que descontaríamos las tres únicas alineaciones imposibles, descartadas por no formar triángulo. Volvemos, pues, al resultado de 17 triángulos.

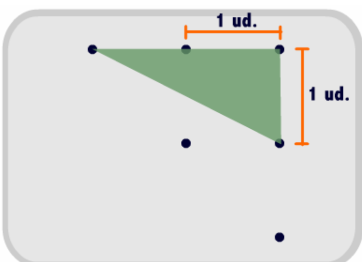
¿Cuántos de perímetro $2 + \sqrt{2}$?



Son los que adoptan la forma de la figura; es decir, rectángulos con catetos de valor 1 e hipotenusa de valor $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Hay 6 triángulos de este tipo: los 124, 234, 235, 245, 345 y 456.

¿Cuántos de perímetro $3 + \sqrt{5}$?



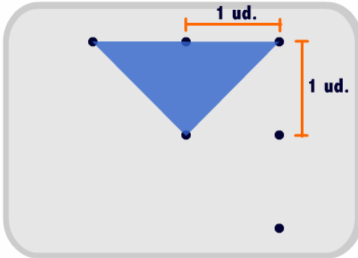
Son los que adoptan la forma de la figura; es decir, rectángulos con catetos de valor 1 y 2 e hipotenusa de valor $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Hay 2 triángulos de este tipo: los 135 y 236.

¿Cuántos de perímetro $2 + 2\sqrt{2}$?

P R O B L E M A S

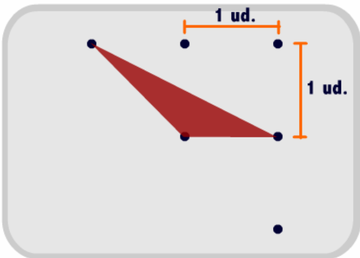
Son los que adoptan la forma de la figura; es decir, escalenos de lados 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.



Hay 2 triángulos de este tipo: los 134 y 346.

¿Cuántos de $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$?

Son los que adoptan la forma de la figura; es decir, rectángulos con catetos de valor 1 y 2 e hipotenusa de valor $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.



Hay 4 triángulos de este tipo: los 125, 145, 246 y 256.

Aunque el problema no lo pide, sólo quedan por analizar tres de los diecisiete triángulos existentes. Los 126 y 156, que son de perímetro $1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$, y el 136, que tiene perímetro $4+2\sqrt{2}$.

3. LAS COSAS DE MARIO

Mario quiere descomponer el número 46 en dos sumandos que sean números naturales, de tal manera que si uno se divide entre 7 y el otro entre 3, la suma de los cocientes es 10. ¿Cuál sería esa descomposición?

¿Y si la suma fuese 14?

Explicad cómo habéis encontrado vuestra respuesta.

Solución

Hay que darse cuenta de que una de las partes es múltiplo de 7 y la otra es múltiplo de 3. Si hacemos dos tablas con estos múltiplos y buscamos qué múltiplos suman 46, tendremos las posibles soluciones, de las cuales, al aplicar el segundo criterio, elegimos la respuesta correcta.

Múltiplos de 7 inferiores a 46:

1 x 7 = 7
2 x 7 = 14
3 x 7 = 21
4 x 7 = 28
5 x 7 = 35
6 x 7 = 42

Múltiplos de 3 inferiores a 46:

1 x 3 = 3
2 x 3 = 6
3 x 3 = 9
4 x 3 = 12
5 x 3 = 15
6 x 3 = 18
7 x 3 = 21
8 x 3 = 24
9 x 3 = 27
10 x 3 = 30
11 x 3 = 33
12 x 3 = 36
13 x 3 = 39
14 x 3 = 42
15 x 3 = 45

Emparejando una de cada tabla, solamente conseguimos sumar 46 con las siguientes parejas: 7 con 39 y 28 con 18.

Efectivamente:

a) 28 + 18 = 46, cuyos cocientes son 28 : 7 = 4 y 18 : 3 = 6, de suma 4 + 6 = 10, que resuelven el primer enunciado del problema.

b) 7 + 39 = 46, cuyos cocientes son 7 : 7 = 1 y 39 : 3 = 13, de suma 1 + 13 = 14, que resuelven el segundo enunciado del problema.

Se puede resolver también planteando y solucionando los siguientes sistemas de ecuaciones:

Para el primer caso:

$$\begin{cases} x + y = 46 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{3} = 10 \end{cases}$$

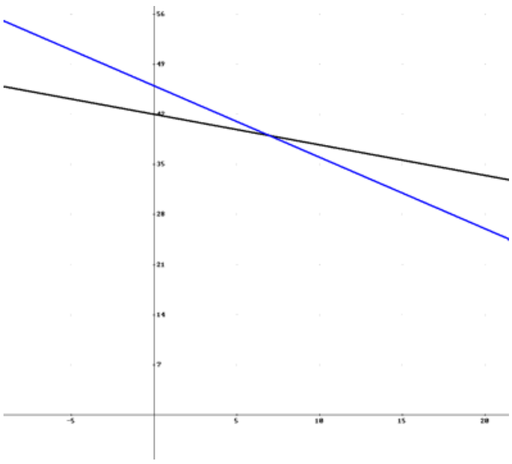
cuyas soluciones son $x = 28$ e $y = 18$.

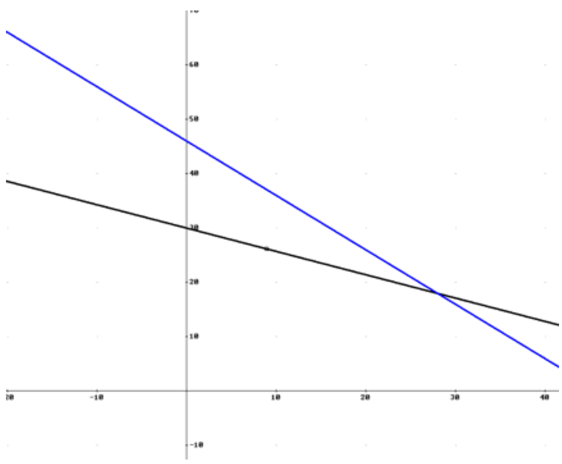
Para el segundo caso:

$$\begin{cases} x + y = 46 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{3} = 14 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $x = 7$ e $y = 39$.

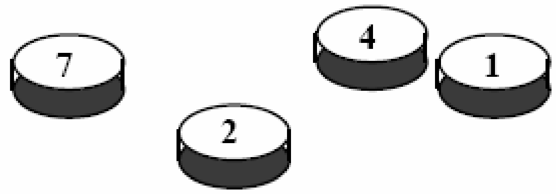
O mediante las gráficas.





4. LAS FICHAS DE LUCÍA

Lucía tiene cuatro fichas. Observa que sobre cada una de las ocho caras está indicado un número distinto, del 1 al 8. Ella lanza sus cuatro fichas una primera vez y ve aparecer 7, 2, 4 y 1, como está representado en el dibujo de aquí abajo.



Lucía lanza sus fichas una segunda vez y obtiene 6, 4, 5 y 2.
Después una tercera vez y obtiene 8, 2, 6 y 5.
Finalmente, la cuarta vez, obtiene 7, 4, 3 y 5.
¿Cuáles son los números dibujados en cada ficha, uno sobre una cara y el otro sobre la opuesta?
Explicad cómo habéis hallado vuestra solución.

Solución

Cada ficha tiene dos caras. Cada una de las ocho caras contiene uno de los números del 1 al 8.

Cada número visible sólo puede estar combinado con las cifras que no se ven en cada uno de los lanzamientos.

Se puede hacer una tabla para contabilizar las cifras que pueden combinar con cada una de ellas, a partir de la observación de los cuatro lanzamientos consecutivos:

1º. 7 2 4 1

2º. 6 4 5 2

3º. 8 2 6 5

4º. 7 4 3 5 .

Por ejemplo, el 7 no puede ir con 2, 4 y 1 según el primer lanzamiento, ni con el 3 y el 5 según el cuarto lanzamiento; por consiguiente, puede estar asociado solamente con 6 o con 8. Procediendo de esta manera para cada cifra, se obtiene:

El nº …	Puede estar asociado con…
1	3 5 6 8
2	3
3	1 2 6 8
4	8
5	1
6	1 3 7
7	6 8
8	1 3 4 7

Observando los resultados obtenidos, tenemos de inmediato que el 2 sólo puede asociarse al 3, el 4 al 8 y el 5 al 1. Por exclusión, vemos en seguida que los que quedan, el 6 y el 7, han de estar necesariamente emparejados.

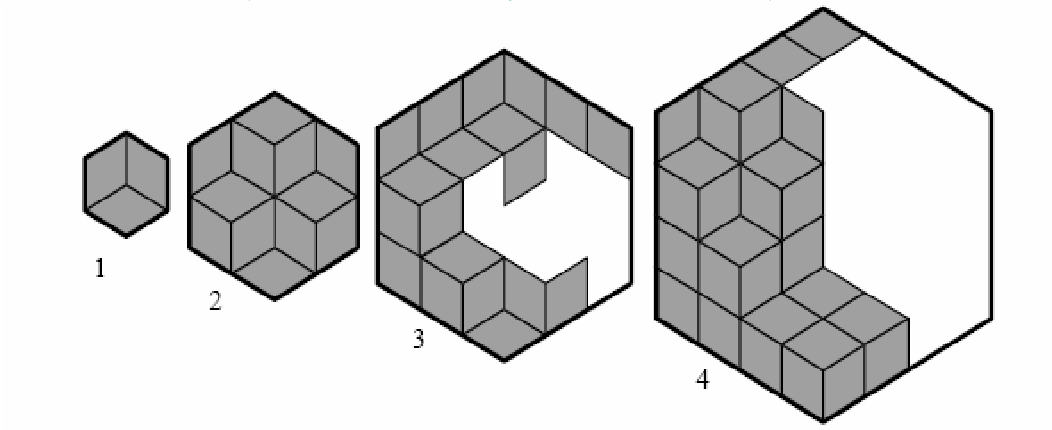
La respuesta correcta estará determinada por las cuatro combinaciones adecuadas:

el 1 con el 5; el 2 con el 3; el 4 con el 8; el 6 con el 7.

5. LOS HEXÁGONOS DE PABLO

Pablo tiene un juego con muchas piezas iguales para encajar, con forma de rombo con dos ángulos de 60 grados (60º).

Con estas piezas, Pablo construye hexágonos regulares. Para construir el hexágono más pequeño (dimensión 1), usa tres rombos. Para construir el siguiente (dimensión 2) usa doce y así sucesivamente (en el dibujo se ven los hexágonos completos de dimensión 1 y 2 con una posible disposición de los rombos, y el inicio de los hexágonos de dimensión 3 y 4):



¿Cuántos rombos necesitará Pablo para construir el hexágono de dimensión 8?
Explicad cómo habéis encontrado vuestra respuesta.

Solución

La longitud del lado del rombo es la unidad de medida de longitud y la “dimensión” del hexágono es la medida de su lado con esta unidad. El rombo es la unidad de área.

Los rombos se pueden colocar de cualquier manera en el interior del hexágono. Siempre habrá la misma cantidad de rombos que rellenan un hexágono determinado.

El primer paso será contar los rombos que rellenan los hexágonos de dimensión 1 y 2. Son, respectivamente, 3 y 12.

A continuación se completará el relleno de los hexágonos de dimensión 3 y 4, para poder contar la cantidad necesaria de rombos para cada uno. Son 27 y 48.

Ahora es necesario pensar sobre la sucesión formada por esos números:

3,   12,   27,   48,   …

PROBLEMAS

Su análisis nos puede dar el patrón de formación de la misma y deducir, a partir de ello, la cantidad de rombos necesarios para recubrir el hexágono de dimensión 8.

Si se hace el cálculo por diferencias entre un número y el siguiente, aparece una regularidad interesante que consiste en un aumento de 6 en 6:

«Dimensión»:	1	2	3	4 ---	
Sucesión de números:	3	12	27	48 ---	
Diferencias		9	15	21	

Cada número de la sucesión se obtiene sumando el anterior más la diferencia.

12 = 9 + 3; **27** = 15 + 12; **48** = 21 + 27

Y permite conjeturar el término siguiente. Si la siguiente diferencia es 21 + 6 = 27, el siguiente término de la sucesión podría ser 27 + 48 = **75** .

Ahora es necesario verificar esa hipótesis. Construimos el hexágono siguiente (dimensión 5), lo rellenamos con rombos y contamos. También debería verificarse sobre el hexágono de dimensión 6.

Si todo sale de acuerdo con lo conjeturado, basta llevar los cálculos hasta la dimensión 8 y obtener la cantidad de rombos que se necesitan para su construcción.

«Dimensión»:	1	2	3	4	5	6	7	8---
Sucesión de números:	3	12	27	48	75	108	147	192---
Diferencias:		9	15	21	27	33	39	45....

También se puede encontrar una expresión numérica de la regularidad factorizando los números de la sucesión en función de la dimensión del hexágono:

Dimensión	Términos de la sucesión
1	**3** = 3 x 1
2	**12** = 3 x 2 x 2
3	**27** = 3 x 3 x 3
4	**48** = 3 x 4 x 4
…	…

Y calcular así que, para dimensión 5, se necesitarían **75** = 3 x 5 x 5, como ya habíamos comprobado.

Esa expresión numérica se puede transformar en una ley general mediante el uso del álgebra, llegando así a una «función» entre la dimensión (n) de los hexágonos y el número de rombos

$$n \longrightarrow 3 \times n^2$$

cosa que conduce, para $n = 8$ a $3 \times 8^2 = 3 \times 64 =$ **192**, sin pasar por los términos sucesivos.

También se puede llegar a la misma función si se utilizan las áreas, tomando como unidad la figura de dimensión 1 que tiene tres rombos.

Respuesta: Pablo necesitará 192 rombos para construir el hexágono de dimensión 8.

Los alumnos y alumnas hicieron un trabajo excelente y, aunque la prueba no era competitiva, se dieron las siguientes menciones honoríficas a los mejores trabajos presentados, sin ningún orden de prioridad en los listados.

Menciones de honor a la presentación:

Antonio Jiménez Gálvez, de Canarias
Joseph María Serra Moncunill, de Cataluña

Menciones de honor a la creatividad a:

Darío de la Fuente García, de Asturias
Pablo Morala Migueles, de Castilla y León
José Puerta Anoedo, de Galicia

Mejores clasificados en la prueba individual:

Saturio Carbonell Urtubia, de La Rioja
Antonio Ceres Sánchez, de Andalucía
Pablo Lorenzo Vaquero, de Castilla y León
José Antonio Moral Parras, de Andalucía

Esos problemas que hemos analizado fueron los que se seleccionaron en su momento, pero fueron estudiados otros que se descartaron. He aquí dos de ellos que proponemos para que nuestros lectores resuelvan o propongan a sus alumnos.

EL CAMPO AGRANDADO

Julián posee un terreno cuadrado vallado. Decide agrandarlo de manera que el terreno siga siendo cuadrado y tenga cada lado con un metro más. De este modo la superficie de su campo aumenta en 41 m^2.

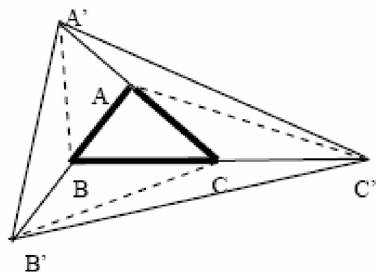
¿Cuál era la longitud de los lados del anterior terreno de Julián?

Ahora que el terreno es más grande, el vallado de antes no es suficiente: ¿cuántos metros de valla faltan?

Explicad cómo habéis hallado vuestras respuestas.

COMPARACIÓN DE TRIÁNGULOS

Para comenzar, considerad un triángulo cualquiera ABC.
Después prolongad:
- el segmento AB a partir de B en un segmento de la misma longitud de AB, obteniendo así el punto B';
- el segmento BC a partir de C en un segmento de la misma longitud de BC, obteniendo así el punto C';
- el segmento CA a partir de A en un segmento de la misma longitud de CA, obteniendo así el punto A';

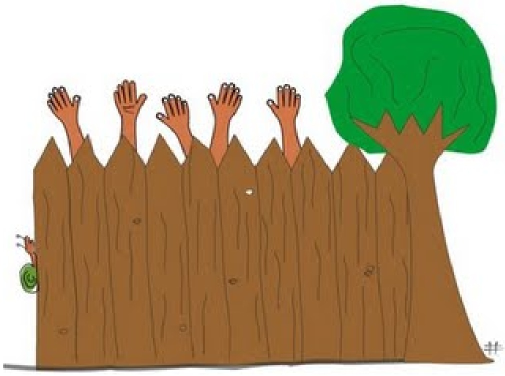


Comparad las áreas de los triángulos AB'C, BC'A y CA'B con la del triángulo ABC.
¿Cuál es la razón o cociente entre las áreas de los dos triángulos A'B'C' y ABC?
Explicad cómo habéis encontrado vuestras respuestas.

PROBLEMAS

Si quieren tener más información sobre la Olimpiada (resultados completos, Galería de fotos, y algunos problemas más) pueden visitar el blog http://xxolimpiadas.blogspot.com/ original de nuestro compañero Sergio Darias Beautell. También pueden encontrar y descargar una animación flash de su autoría, donde se presentan los problemas de la Olimpiada y sus soluciones de una manera muy original, utilizable comos recurso de aula.

En ese blog aparece un curioso problema que utilizamos en nuestras charlas para llamar la atención sobre formas de presentar los problemas, búsqueda de distintas soluciones y, especialmente, la relación que hay entre lectura y comprensión.



El problema no tiene texto escrito (podría ponerse, pero creo que es más interesante así). Debería empezar, como siempre, por buscar datos, preguntas y relaciones. Ahí comienza la comprensión. Es un problema muy sencillo y su reto está en analizar adecuadamente todos los pasos de su resolución. Imaginen que ese problema lo plantean a un niño de cinco o seis años. ¿Cómo dirigirían su resolución? Expondremos nuestro comentario en el próximo artículo.

Y aquí queda todo de momento. Pero recuerden nuestro sempiterno mensaje. Esta sección estará más viva si recibimos sus soluciones, sus comentarios o sus propuestas. Hágannos caso, escríbannos.

Todos los lectores agradecerían leer mensajes y experiencias de otros compañeros.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista:

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**