NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 72, diciembre de 2009, páginas 63–74

Elementos para la graficación covariacional

Crisólogo Dolores Flores (Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México)
Gerardo Salgado Beltrán (Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México)

Fecha de recepción: 2 de abril de 2009
Fecha de aceptación: 29 de julio de 2009

Resumen En este artículo presentamos el método de Graficación Covariacional de funciones. Este método se centra en tres elementos fundamentales: en la graficación de los cambios que experimentan las variables a través del cálculo de las diferencias; se atienden la relación de covariación entre las variables analizando cómo cambia una respecto de la otra; se asume a las curvas como "poligonales" formadas por un ensamblaje de segmentos de recta infinitamente pequeños, a medida que esos segmentos se hacen cada vez más pequeños la poligonal se asemeja más a una curva convencional. En la Graficación Covariacional interesan cuestiones como las siguientes: ¿Qué cambia? ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia? ¿A qué razón cambia? ¿Cómo se comporta globalmente eso que cambia?

Palabras clave Graficación covariacional, razonamiento covariacional, cambio, diferencias, variables.

Abstract We present a method of functions covariational graphing. This method focuses on in three fundamental elements: graphing variables changes by calculating the differences; addressing the relationship of covariation among variables by analyzing how one changes with respect to the other; it is assumed to curves as "polygonal" consisting of an assembly infinitely small line segments, as these segments are becoming smaller the polygonal is closer to a conventional curve. Graphing Covariational such questions as: What change? How much change? What is direction of change? At what rate changes? How does this change globally?

Keywords Covariational graphing, covariational reasoning, change, differences, variables.

1. Introducción

En el Nivel Medio de la escuela mexicana[1], se utilizan varios tipos de graficación, la graficación "por puntos", también conocida como graficación "por tabulación" es la más privilegiada. En los cursos de Geometría Analítica que se imparten el Bachillerato, se construyen gráficas de las cónicas a partir del análisis de las singularidades de las ecuaciones. Estas se construyen sobre la base de sus ecuaciones, identificando: intersección con los ejes de coordenadas, simetrías, campos de variación,

[1] En México el Nivel Medio lo componen la secundaria y el bachillerato. El primero se le conoce como Nivel Medio Básico y comprende el 7º, 8º y 9º grado de escolarización y el segundo es conocido como Nivel Medio Superior y comprende el 10º, 11º y 12º grado. Las edades de los estudiantes en secundaria fluctúan entre 12 y 15 años y en el bachillerato entre 15 y 18.

puntos singulares, etc. En el último año del bachillerato, según los programas, se propone utilizar la derivada para graficar funciones. Con la derivada se pueden determinar con precisión los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función, por tanto las gráficas que se obtienen alcanzan mayor fineza. En 1980 se publica en México la monografía "Cómo construir gráficas" de Shilov (1980), publicada originalmente en ruso en 1959. El método que allí se plantea se denomina "método de operaciones" y consiste en elaborar una gráfica justamente realizando las operaciones indicadas en la fórmula dada. Ya sea adición, substracción, multiplicación, división u otra, deben efectuarse para dibujar la gráfica. Este método combina las operaciones indicadas en la fórmula con las representaciones gráficas de las imágenes de la función. Empero la mayor parte de los métodos utilizados en la Educación Media, enfocan su atención en la ubicación de la gráfica y omiten o relegan a un segundo plano el comportamiento de la misma. Por tal razón en este artículo proponemos un método diferente, éste enfoca la atención en la construcción de la gráfica a partir de su comportamiento. Esto lo logramos sobre la base de la graficación de los cambios que experimentan las variables. Estos cambios reconocidos con los símbolos Δx y Δy, se cuantifican mediante las diferencias, modelos matemáticos que en la matemática universitaria se transforman en diferenciales. Por tanto esta forma de graficación, que hemos denominado como covariacional (discutida en Salgado, 2007), rescata a las diferencias en tanto elementos que indican cuánto y cómo cambian las variables (unas en relación con las otras) y sobre todo que éstas (las diferencias) pueden ser representadas gráficamente para dar cuenta del comportamiento de la función.

2. Planteo del problema y objetivo

Después de haber enseñado graficación de funciones en la escuela se espera que los estudiantes hayan desarrollado habilidades para graficar e interpretar gráficas. Sin embargo, varias investigaciones han reportado que estas habilidades no se desarrollan en cantidades significativas de estudiantes, o bien que se generan concepciones alternativas en ellos que obstaculizan el desarrollo de esas habilidades. En este sentido se reportan dificultades y errores de los estudiantes al construir, comunicar o extraer información de las gráficas (Wainer, 1992; Fabra y Deulofeu, 2000; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Roth y Bowen, 2000); para articular diferentes representaciones del concepto de función (Hitt, 1988); para entender la relación entre el significado gráfico de la trayectoria física de la caída libre de los cuerpos y su representación cartesiana (Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002) e incluso para establecer la relación entre las descripciones verbales y las representaciones gráficas (Dolores, Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor , 2009). Otras dificultades están asociadas al escaso desarrollo de un razonamiento covariacional ya detectado por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), dificultades detectadas también por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) y Dolores (2004).

Según los textos escolares una función es una colección de parejas ordenadas cuyas primeras coordenadas no se repiten, si F es una función de variable real (es decir de R en R) entonces da lugar a la colección: F = $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2),\ldots, (x_n, y_n)\}$, en donde $x_i \neq x_j$. Para que quede debidamente definida una función requiere de un conjunto de partida (R en este caso) y uno de llegada (en este caso es el mismo) y una regla de correspondencia. Para graficar una función atendiendo sólo a estas condiciones basta con representar las parejas ordenadas como puntos del plano cartesiano de la forma (x_i, y_j). Sin embargo en esta definición queda implícita la variación y la covariación, estas propiedades de las funciones se manifiestan en que, todo aumento o disminución de una de las variables, se traduce en un aumento o disminución en la otra. Una interpretación cualitativa o cuantitativa de una gráfica requiere de centrar la atención en los efectos sobre la relación entre las dos variables, y en particular en su patrón de covariación, es decir atender simultáneamente los efectos que provocan los cambios de la variable independiente en la variable dependiente. Sin embargo esta relación de covariación no se moviliza en cantidades importantes de estudiantes cuando interpretan gráficas. Por ejemplo, Dolores (2004) detectó que cuando los estudiantes de bachillerato interpretan gráficas, atienden lo que pasa con la variable independiente y desatienden lo que pasa con la variable dependiente, los efectos de los cambios de la variable independiente en la variable dependiente no son extraídos de las gráficas a través de sus lecturas e interpretaciones. Los estudiantes dicen que la gráfica de $f(x)$ es positiva solo porque el signo de las x es positivo, sin importar que las imágenes estén en el primero o el cuarto cuadrante. Las interpretan como si no hubiese alguna relación que las vincule. Esta es una manifestación del escaso sentido de covariación que los estudiantes asignan a las gráficas. Este es nuestro problema central y para contribuir a su solución nos planteamos como objetivo en este artículo, el proponer la Graficación Covariacional, ya que parte esencial de este modo de graficación radica justamente en la representación gráfica de la correlación necesaria entre el aumento o disminución de una las variables y los efectos que causa (aumento o disminución) en la otra variable.

3. Fundamentación

La Graficación Covariacional se fundamenta en tres elementos básicos: el pensamiento y lenguaje variacional, en el razonamiento covariacional y en la definición leibnizana de curva. El pensamiento y lenguaje variacional es caracterizado por Cantoral y Farfán (2000) como el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. En tanto línea de investigación posee una triple orientación, en primer lugar se ocupa de estructuras variacionales especificas desde un punto de vista matemático y fenomenológico; en segundo lugar estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades de la matemática del cambio y en tercero, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y en el laboratorio. Un ambiente rico y variado de gráficas puede ayudar a desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional.

Por otra parte adoptamos la definición de razonamiento covariacional planteada por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, (2002). Este se define como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambian una con respecto de la otra. Estas actividades cognitivas implican acciones mentales propias de la covariación, que proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación. Sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo relativa a una tarea particular, se puede determinar examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibidas mientras responde a esa tarea. El razonamiento covariacional se describe por medio de 5 niveles de desarrollo de las imágenes de covariación y están asociadas a: la coordinación de los cambios, su dirección, su coordinación cuantitativa, la razón promedio y la razón instantánea.

Para la Graficación Covariacional la idea de curva se construye a partir de una poligonal y para ello recurrimos a la definición leibniziana de curva. Tradicionalmente, en los procesos de graficación, no se repara sobre la naturaleza de las curvas que se grafican, generalmente se asume que los estudiantes ya traen formada una idea de curva o de curvatura. En este artículo se parte del principio de que la idea de curvatura debiera reconstruirse sobre la base de las poligonales. Una curva por tanto se asume de manera similar como se define en L´Hospital (1696), se le considera como el ensamblaje de una infinidad de segmentos de recta o como una poligonal de un número infinito de lados. Bajo estas condiciones una curva se construye primero mediante una poligonal cuyos segmentos son “grandes”, y a medida que los segmentos de recta se hacen “más pequeños” se alcanza mayor fineza. En estas condiciones la gráfica de una línea curva no se da por hecho que ya lo es, sino que la curvatura se construye a medida que el número de lados de la poligonal se hace cada vez mayor. Es claro que esta será siempre una aproximación, pero le da sentido reconstructivo a la noción de curvatura. Estas ideas se ilustran mediante las Figuras 1, 2 y 3 que aparecen a continuación.

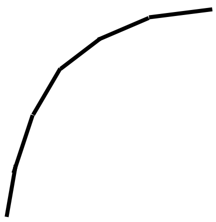

Figura 1. Poligonal con "lados grandes"

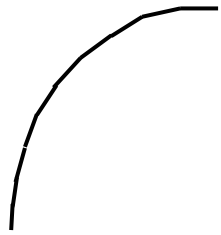

Figura 2. Poligonal con "lados pequeños"

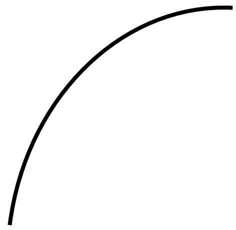

Figura 3. Curva con "lados infinitamente pequeños"

4. Graficación covariacional

Definimos a la Graficación Covariacional como las actividades de representación gráfica en las que se involucra la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambia una con respecto la otra. El elemento central de la Graficación Covariacional es el cambio y no sólo la ubicación de los puntos como en las formas tradicionales, por tanto se centra la atención en la representación gráfica de los cambios (aumento o disminución de una variable y sus efectos en la otra) y no sólo de los puntos de la gráfica. El cambio se calcula mediante diferencias y éstas son representadas gráficamente mediante segmentos de recta. A medida que esos cambios se hacen cada vez más pequeños la gráfica es más fina. Para la Graficación Covariacional es necesario realizar acciones que contesten preguntas como las siguientes:

a) **¿Qué cambia?** Identificar qué variables se representarán y su relación entre ellas. Si se trata de la función de caída libre, $s(t) = 4.9t^2$, la variables son la distancia s y el tiempo t relacionadas mediante la fórmula $s(t)$.
b) **¿Cuánto cambia?** Calcular y coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra y representarlos en el plano mediante segmentos de recta. Si t cambia de t_i a $t_i + \Delta t$ entonces $s(t)$ cambia de $s(t_i)$ a $s(t_i) + s(t_i + \Delta t)$, de modo que para este Δt corresponde un Δs que se obtiene de la diferencia: $s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$.
c) **¿Cómo cambia?** Coordinar gráficamente la dirección de los cambios de una variable con los cambios en la otra variable. Para la función $s(t)$, supongamos que $\Delta t > 0$; si $\Delta s > 0$ en un determinado intervalo entonces $s(t)$ crece en ese intervalo; si $\Delta s < 0$ entonces $s(t)$ decrece; si $\Delta s = 0$, $s(t)$ no crece ni decrece, se mantienes constante.
d) **¿A qué razón cambia?** Calcular las razones de cambio promedio con incrementos uniformes de cambio en la variable independiente y representarlas gráficamente. La razón de cambio promedio la da el cociente: $\Delta s/\Delta t$, comúnmente conocida como rapidez o velocidad, dependiendo si se trata de magnitudes escalares o vectoriales. En términos gráficos este cociente es la pendiente de un lado rectilíneo de la poligonal en un intervalo determinado.
e) **¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?** Del análisis de los cambios se desprende el comportamiento global de la función en su dominio. La determinación de los intervalos donde $s(t)$ crece, dónde decrece, dónde se mantiene constante. Es claro que con la razón cambio promedio se obtienen sólo aproximaciones al comportamiento de las curvas, mediante la utilización de la derivada se obtiene mayor fineza.

5. Cálculo y representación gráfica de los cambios

La variación está estrechamente ligada al proceso de medición del cambio. El cambio se da cuando se pasa de un estado inicial a un estado final; por tanto para cuantificar el cambio de una variable basta restar de su valor adquirido en el estado final su valor adquirido en el estado inicial, entonces si x es la variable, el cambio se cuantifica por la diferencia: $x_f - x_i = \Delta x$. En términos generales, si y es una función de x, es decir: $y = f(x)$, para medir lo que cambia $f(x)$, se requiere primero considerar un *estado inicial* x_i, a este valor le corresponde $f(x_i)$. Después de un cambio que experimente x, de x_i a $x_i + \Delta x$ (un *estado final*), $f(x)$ experimentará también un cambio a un *estado final,* y éste quedará como: $f(x_i + \Delta x)$, por tanto el cambio en y, el Δy, se obtiene calculando la diferencia: $f(x_i + \Delta x) - f(x_i)$.Todas estas ideas aparecen condensadas en la Tabla 1.

Tabla 1. Cuantificación del cambio mediante diferencias

Estado inicial	Cambio	Estado final	Diferencia
x_i	$\rightarrow$	$x_f = x_i + \Delta x$	$\Delta x = x_f - x_i$
$f(x_i)$	$\rightarrow$	$f(x_f) = f(x_i + \Delta x)$	$\Delta y = f(x_i + \Delta x) - f(x_i)$

Los cambios de las variables, Δx y Δy, se pueden representar gráficamente como segmentos de recta perpendiculares entre sí, y el segmento de recta que los une constituiría un lado de la poligonal que con mayor fineza se convertiría en la curva deseada, ver Figura 4.

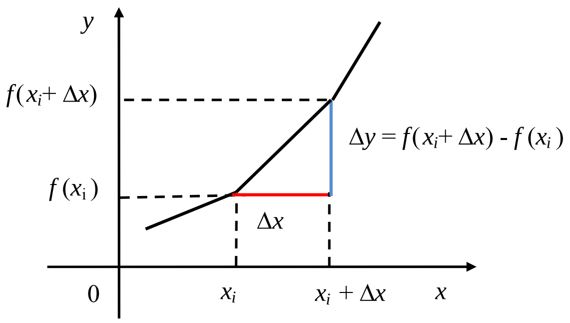

Figura 4. Representación gráfica de las diferencias

6. Ejemplos

Mostraremos dos ejemplos sencillos para ilustrar la Graficación Covariacional.

Ejemplo 1. Representar gráficamente la función: $s(t) = 0.5t +1$, para $0 \le t \le 4$, se trata de una función ampliamente utilizada en Física donde s es la distancias recorrida por un cuerpo y t el tiempo.

De manera inmediata se puede identificar que s y t son las variables. Para hacer la representación gráfica, por comodidad, se hace que t aumente de uno en uno, es decir que $\Delta t = 1$, y se calculan los cambios que experimenta s mediante la fórmula: $\Delta s = s(t_i+\Delta t) - s(t_i)$. En la Tabla 2 aparecen los resultados de esos cálculos y en la Figura 5 aparecen representados geométricamente. En ella se puede observar que los cambios que experimenta *s* son constantes, es decir siempre que *t* aumenta uno, *s* aumenta 0.5, esto también significa que la gráfica crece a razón constante (ver Figura 6), esta razón en términos geométricos es justamente la pendiente de la recta, ésta a su vez, se le reconoce con la literal *m* que para este caso $m = \Delta s/\Delta t$. Con esta información se puede hacer el primer esbozo gráfico de $s(t)$ el cual aparece en la Figura 7. ¿Qué pasa si se reducen ahora los incrementos de modo que $\Delta t = 0.5$?

Tabla 2. Cálculo de las diferencias para $\Delta x = 1$

t_i	t_f	Δt	$s(t_i)$	$s(t_i+\Delta t)$	Δs	$\Delta s/\Delta t$
0	1	1	1	1.5	0.5	0.5
1	2	1	1.5	2	0.5	0.5
2	3	1	2	2.5	0.5	0.5
3	4	1	2.5	3	0.5	0.5
4	5	1	3	3.5	0.5	0.5
…	…	…	…	…	…	…

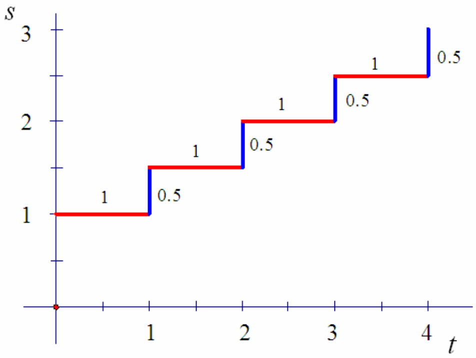

Figura 5. Representación de las diferencias: Δt y Δs, para $\Delta t = 1$

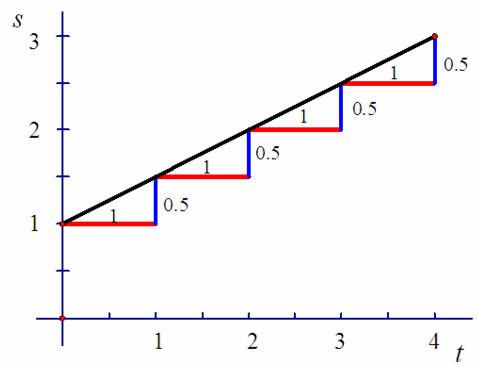

Figura 6. Representación de la dirección de los cambios Δs, para $\Delta t = 1$

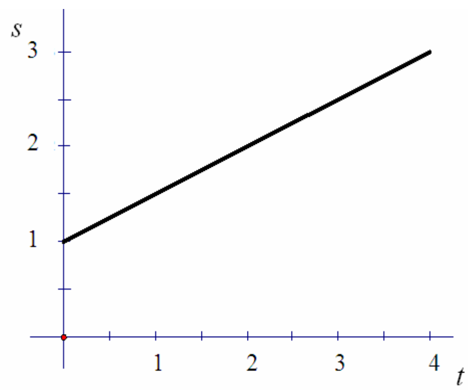

Figura 7. Primer esbozo de la Grafica de $s(t) = 0.5t + 1$

De acuerdo con los cálculos que aparecen en la Tabla 3, si *t* cambia de 0 a 0.5, *s* aumenta 0.25, lo mismo sucede para cuando *t* cambia de 0.5 a 1 y así mismo con los demás, estos cambios aparecen representados en las Figuras 8 y 9. Esto significa que los cambios que experimenta *s*, los Δs, son constantes. Además a medida que *t* aumenta también aumenta *s*, es decir, *s* es creciente y crece a razón de 0.5. Esto indica que tiene la misma pendiente (y que además pasa por los mismos puntos) que la gráfica del primer esbozo. Esta última es todavía más precisa que la anterior. Empero si reducimos todavía más el valor de Δt, a $\Delta t = 0.1$, ¿La gráfica será distinta de la que hemos obtenido? Con cálculos similares a los anteriores, se puede constatar que la pendiente es la misma que la obtenida anteriormente. Esto permite suponer que la pendiente seguirá siendo la misma aunque Δt sea muy pequeño. Se puede seguir disminuyendo la magnitud de los cambios, sin embargo la poligonal obtenida mediante la aproximación anterior proporciona un buen esbozo de la gráfica de la función $s(t)$ por lo que la aproximación puede parar hasta aquí y considerar a la gráfica de la Figura 10 como aceptable.

Tabla 3. Cálculo de las diferencias para $\Delta x = 0.5$

t_i	t_f	Δt	$s(t_i)$	$s(t_i+\Delta t)$	Δs	$\Delta s/\Delta t$
0	0.5	0.5	1	1.25	0.25	0.5
0.5	1	0.5	1.25	1.5	0.25	0.5
1	1.5	0.5	1.5	1.75	0.25	0.5
1.5	2	0.5	1.75	2	0.25	0.5
2	2.5	0.5	2	2.25	0.25	0.5
2.5	3	0.5	2.25	2.5	0.25	0.5
3	3.5	0.5	2.5	2.75	0.25	0.5
3.5	4	0.5	2.75	3	0.25	0.5
…	…	…	…	…	…	…

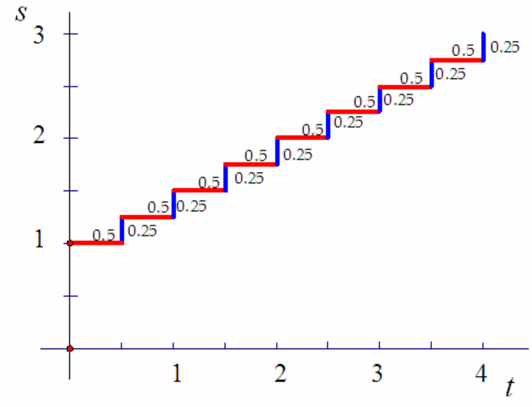

Figura 8. Representación de las diferencias Δt y Δs para $\Delta t = 0.5$

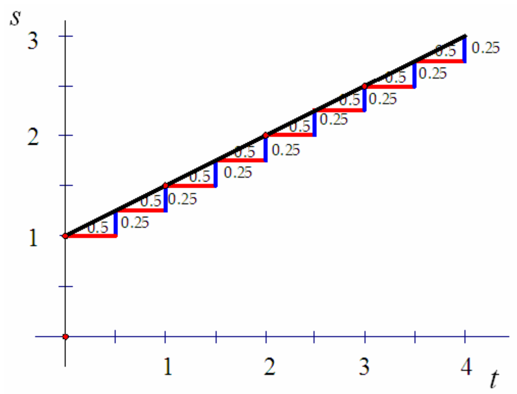

Figura 9. Representación de la dirección de los cambios Δs para $\Delta t = 0.5$

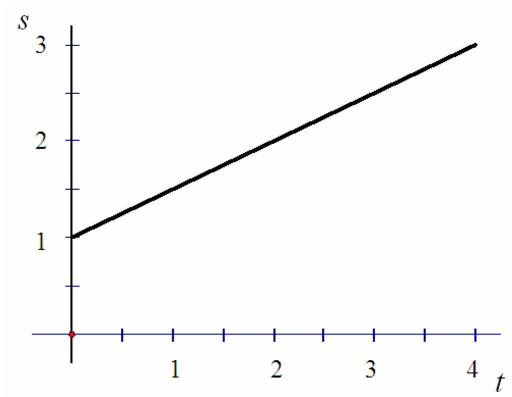

Figura 10. Segundo esbozo grafico de $s(t) = 0.5t + 1$

Ejemplo 2. Construir la representación gráfica de la función: $y = x^2$, para $-2 \leq x \leq 2$

En primer lugar se identifican las variables, se representarán y su relación entre ellas, en este caso y depende de x, es decir que y cambia si cambia x. Posteriormente se calculan y coordinan la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable y se representan en el plano mediante segmentos de recta. Por comodidad primero se asignan cambios en x de uno en uno, ver Tabla 4. Con cambios de uno en uno en x, cuando x cambia de -2 a -1, y decrece 3 unidades, es decir $\Delta y = -3$ (ver Tabla 4) el signo negativo indica decrecimiento. Cuando x cambia de -1 a 0, y decrece 1 unidad, es decir $\Delta y = -1$. Si x cambia de 0 a 1, y crece también 1 unidad, en este caso $\Delta y = 1$, el signo positivo del Δy indica que y crece; si x cambia de 1 a 2, $\Delta y = 3$; si x cambia de 2 a 3, $\Delta y = 5$ (aunque por razones de espacio este cambio ya no aparece representado) y así sucesivamente. Para las x positivas y Δx iguales que en el caso anterior los Δy se comportan de manera simétrica con respecto a las x negativas, en los primeros la gráfica es decreciente y en los segundos es creciente (ver Figuras 11 y 12). Incluso se nota que los Δy siguen un patrón que rige a los números impares: $2n - 1$. Estos valores de Δy coinciden con la razones de cambio por medio de las cuales se rige el comportamiento de la función, se puede decir que decrece a razón variable y crece también a razón variable, para x de -2 a 0 y de 0 a 2 respectivamente. Estos cálculos han permitido dibujar el primer esbozo de la gráfica de $y = x^2$, la poligonal que aparece en la Figura 13.

Tabla 4. Cálculo de las diferencias para $\Delta x = 1$

x_i	x_f	Δx	$f(x_i)$	$f(x_i+\Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$
…	…	…	…	…	…	…
-2	-1	1	4	1	-3	-3
-1	0	1	1	0	-1	-1
0	1	1	0	1	1	1
1	2	1	1	4	3	3
2	3	1	4	9	5	5
3	4	1	9	16	7	7
…	…	…	…	…	…	…

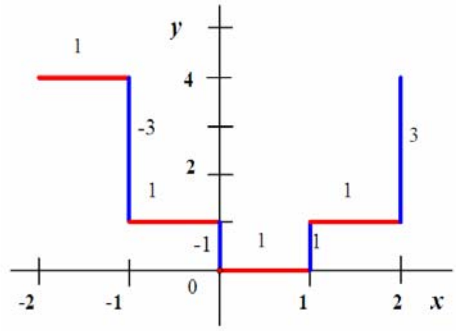

Figura 11. Para Δx =1, representación de algunas diferencias, Δx y Δy.

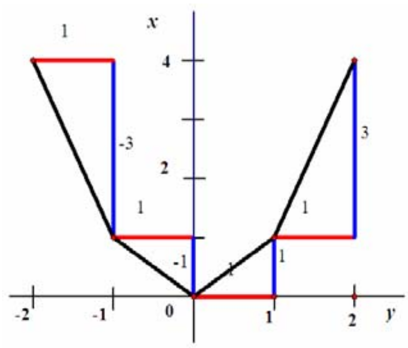

Figura 12. Representación de algunas diferencias y dirección de la poligonal

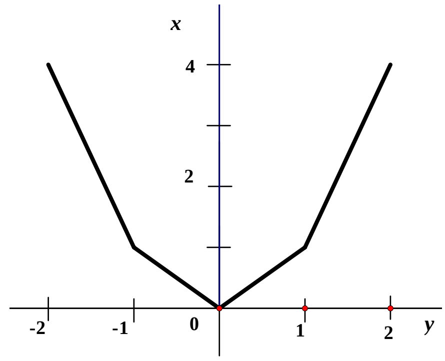

Figura 13. Primer esbozo gráfico de $f(x) = x^2$

Empero este esbozo de la Figura 13 es muy rudimentario, para ganar fineza se requiere disminuir la magnitud de Δx. Para ello ahora se explora cómo se comporta Δy para Δx = 0.5. Se sigue un procedimiento parecido al anterior, los cálculos correspondientes aparecen condensados en la Tabla 5 y las representaciones gráficas de sus diferencias aparecen en la Figura 14.

Tabla 5. Cálculo de las diferencias para $\Delta x = 0.25$

x_i	x_f	Δx	$f(x_i)$	$f(x_i+\Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$
…	…	…	…	…	…	…
-2	-1.5	0.5	4	2.25	-1.75	-3.5
-1.5	-1	0.5	2.25	1	-1.25	-2.5
-1	-0.5	0.5	1	0.25	-0.75	-1.5
-0.5	0	0.5	0.25	0	-0.25	-0.5
0	0.5	0.5	0	0.25	0.25	0.5
0.5	1	0.5	0.25	1	0.75	1.5
1	1.5	0.5	1	2.25	1.25	2.5
1.5	2	0.5	2.25	4	1.75	3.5
…	…	…	…	…	…	…

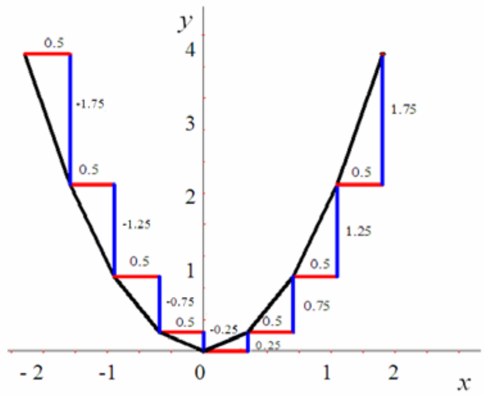

Figura 14. Representación de las diferencias, Δx y Δy, para $\Delta x = 0.5$

La disminución de magnitud de las diferencias, ahora $\Delta x = 0.5$, ha permitido obtener una poligonal que se parece más a una parábola, ver Figura 15. Su comportamiento es similar a la obtenida en el primer esbozo, a diferencia de que ahora podemos saber cómo cambia a intervalos más pequeños y por tanto la información acerca de su comportamiento es más amplia y precisa. Sin embargo podemos afinar la gráfica reduciendo nuevamente el valor de las diferencias Δx a la mitad, es decir para $\Delta x = 0.25$, estos últimos cálculos aparecen en la Tabla 6.

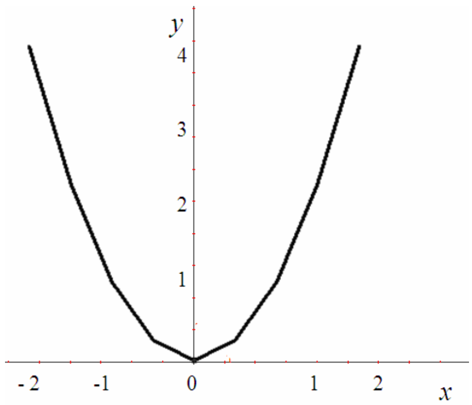

Figura 15. Segundo esbozo gráfico de $f(x) = x^2$

Tabla 6. Cálculo de las diferencias para $\Delta x = 0.25$

x_i	x_f	Δx	$f(x_i)$	$f(x_i+\Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$
…	…	…	…	…	…	…
-1.5	-1.25	0.25	2.25	1.5625	-0.6875	-2.75
-1.25	-1	0.25	1.5625	1	-0.5625	-2.25
-1	-0.75	0.25	1	0.5625	-0.4375	-1.75
-0.75	-0.5	0.25	0.5625	0.25	-0.3125	-1.25
-0.5	-0.25	0.25	0.25	0.0625	-0.1875	-0.75
-0.25	0	0.25	0.0625	0	-0.0625	-0.25
0	0.25	0.25	0	0.0625	0.0625	0.25
0.25	0.5	0.25	0.0625	0.25	0.1875	0.75
0.5	0.75	0.25	0.25	0.5625	0.3125	1.25
…	…	…	…	…	…	…

Con los cálculos de la Tabla 6 es posible dibujar los cambios correspondientes que aparecen en la Figura 16. En la figura 17 aparece la gráfica (desprovista de las representaciones de los cambios que la hicieron posible) la cual se puede considerar aceptable. Con toda la información derivada de los cálculos realizados y sus respectivas representaciones gráficas se puede afirmar que la función es decreciente en el intervalos: $-2 < x < 0$; y creciente en $0 < x < 2$. Decrece a razón variable y también crece a también a razón variable. Inclusive cerca de $x = 0$, los Δy van adquiriendo valores cada vez más cercanos a cero. Esto nos hace suponer que en $x = 0$, la gráfica no crezca ni decrezca, es decir $\Delta y = 0$. Es claro que estas afirmaciones requieren de justificaciones matemáticas más sólidas que los provee el análisis matemático. Sin embargo con la Graficación Covariacional y el uso de las diferencias razonablemente pequeñas se pueden obtener gráficas intuitivamente aceptables.

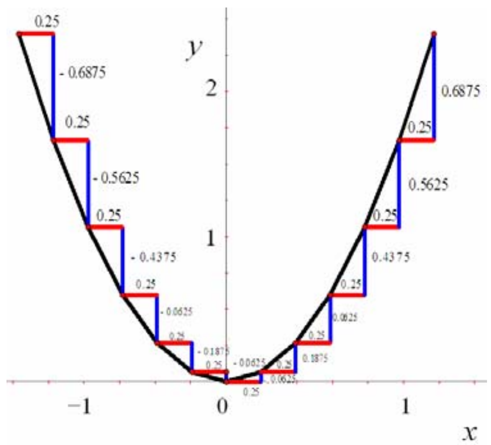

Figura 16. Representación de los cambios para Δx, Δy, para $\Delta x = 0.25$

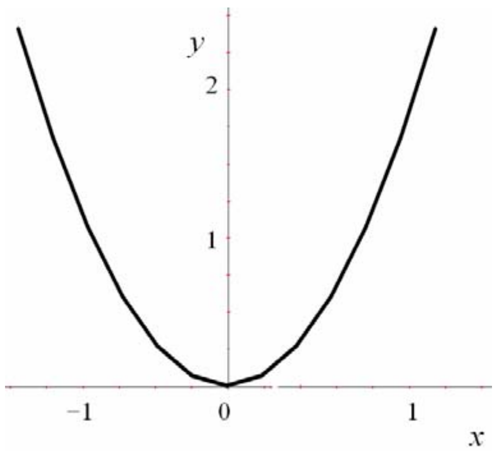

Figura 17. Grafica aceptable de $f(x) = x^2$

7. Consideraciones finales

El método de graficación propuesto en este documento puede ser utilizado desde los niveles 8º grado de escolaridad y perfeccionarse en el bachillerato (a partir de 10º grado) o en la universidad. Este método puede complementar a otros métodos de graficación como el de puntos y preparar las condiciones necesarias para lograr introducciones más significativas al Cálculo Diferencial e Integral, pues está construido justamente sobre la base de los elementos medulares de éste: las diferencias. Las diferencias como modelos que permiten cuantificar el cambio. Por eso y con razón a esta parte de la matemática se le conoce también como la matemática de la variación y el cambio. En este documento nos hemos centrado en la descripción, fundamentación y ejemplificación del método. En futuros trabajos daremos cuenta de los resultados que se obtienen al poner este método en condiciones instruccionales determinadas. Algunos colegas han hecho ver lo laborioso de los cálculos numéricos y de que, escapan al método, aspectos relativos a la continuidad. Sin embargo, es necesario que los estudiantes desarrollen habilidad numérica en los cálculos y la trasladen a las representaciones gráficas y viceversa. El aprendizaje, como lo sugiere Duval (1998) radica justamente que los estudiantes sean capaces de transitar por diversos registros de representación semiótica. La Graficación Covariacional requiere necesariamente de esa transición.

Finalmente, las formas de graficación tradicionales han considerado como secundario lo variacional y privilegiado el trazado del dibujo de la gráfica de la función a partir de ubicar un conjunto discreto de puntos. En cambio la graficación covariacional es integradora ya que permite a la par construir la gráfica de la función y analizar el comportamiento variacional de ésta. Mediante un análisis didáctico, Salgado (2007) constató que la graficación por tabulación es la que más se utiliza en el nivel básico y en el nivel medio superior de la escuela mexicana. Es presumible por tanto que los estudiantes instruidos mediante estos métodos escasamente desarrollen habilidades para interpretar o graficar una función con sentido covariacional, de ahí que resulte pertinente establecer las diferencias entre este tipo de graficación y la que se ha propuesta en este artículo, la Tabla 7 da cuenta de ello. Estas comparaciones pueden servir como guía de futuras investigaciones que pretendan investigar acerca de la validez de estas presunciones.

Tabla 7. Diferencias entre la graficación por tabulación y la graficación covariacional

Graficación por tabulación	Graficación covariacional
Relega a un segundo plano la correlación causal entre las variables.	En todo el proceso predomina la conciencia de la correlación causal entre eso que cambia.
Se considera que los estudiantes tienen ya formada una idea de curva no necesariamente como poligonal.	Se considera que una curva está como determinada por “segmentos” de recta. Cuanto más pequeño sean esos segmentos mayor fineza ganará la aproximación a la “curva”.
No se enfatiza sobre la naturaleza de lo que cambia o de lo que se quiere representar, simplemente se re presentan las x y las y o las funciones.	Se parte de identificar qué cambia y la correlación entre eso que cambia.
Se representan las x y las y como entes abstractos y los valores que adquieren dependen del arbitrio del profesor. Se dice, “asignemos los valores: -2,-1, 0 , 1, 2, a x”, “si x vale tanto y vale tanto”	Se hace explícito el proceso de cambio que le confiere razón de ser a eso que cambia, privilegiando a las variables concretas. “Si el tiempo t cambia de 1 a 1.5 averigüemos qué sucede con la distancia s”
Se usa fundamentalmente la fórmula de $f(x)$ para calcular las coordenadas de los puntos.	Se usan esencialmente Δx, Δy para calcular los cambios, estableciendo la relación causal entre los cambios de x y los cambios de y; la fórmula de $f(x)$ se utiliza para calcular Δy.

Tabla 7. Diferencias entre la graficación por tabulación y la graficación covariacional

Los cambios no interesan y no se representan gráficamente esos cambios, solo se unen puntos consecutivos sin cuestionarse sobre su significado variacional.	Se representan gráficamente los cambios y no solo los puntos. Importa esencialmente lo que sucede "entre" los puntos. Interesa obtener una poligonal como "aproximación" a la curva.
Se pasa de un punto a otro sin cuestionarse lo que pasa en el intermedio, tampoco se cuestiona sobre el cuánto cambia las variables.	Para graficar interesa cuánto y cómo cambia la variable independiente y este cambia qué efectos tiene sobre los cambios de la variable dependiente. "Si el tiempo t cambia de 1 a 2 la distancia s aumenta 4 unidades"
No es motivo de análisis la rapidez de la variación ni su representación gráfica. La pendiente se asocia con la derivada hasta cuando ésta es motivo de estudio y no cuando se grafica un función.	Se enfatiza sobre la "rapidez" de los cambios mediante la razón de cambio promedio. Esta se asocia con la inclinación de los segmentos de recta que forma la "curva". Recuérdese que esta es una poligonal.
No es motivo de discusión la fineza o precisión de la curva.	La poligonal, o sea la gráfica buscada, será más precisa si se reducen suficientemente los cambios de la variable independiente.

Bibliografía

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En Cantoral R. (ed.) *El futuro del cálculo infinitesimal, ICME-8*, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica: México D. F.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education,* 33 (5), 352-378.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 7(3), 195-218.

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las graficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(3), 225-250.

Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas, *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 18, 41-57. En línea, recuperado el 6 de agosto de 2009 en http://www.fisem.org

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica: México D.F.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 43(2), 207-230.

Hitt, F. (1988). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (1), 123-134.

L´ Hospital, G. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l´intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research,* 60, 1-64.

Roth, W. M. y Bowen, G. M. (2000). Learning difficulties related to graphics: a hermeneutic phenomenological perspective. *Research in Science Education,* 30(1), 123-129.
Salgado, G. (2007). *Graficación covariacional*. Tesis de Maestría, inédita, CIMATE UAG, Chilpancingo Gro. Méx.
Shilov, G. (1980). *Cómo construir gráficas*. México. D. F.: Editorial Limusa, segunda reimpresión.
Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher,* 21, 14-23.

Crisólogo Dolores Flores nació en Tlalquetzala, Municipio de Huamuxtitlán, Gro, México. Es profesor del postgrado de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), México; es Licenciado y Maestro en Ciencias en Matemática Educativa por la UAG, es Doctor en Ciencias por el Instituto Superior Pedagógico "Enrique J. Varona" de la Habana, Cuba. Trabaja en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional, ha publicado sus principales hallazgos en esta línea en tres libros y más de 10 artículos.

Gerardo Salgado Beltrán, nació en Cocula, Gro., México. Es profesor de la Unidad Académica de Matemáticas, es Licenciado y Maestro en Ciencias en Matemática Educativa por la UAG. Trabaja como profesor de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad, se graduó como Maestro en Ciencias en Matemática Educativa en diciembre de 2007.