NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 70, abril de 2009, páginas 67–74

Derivadas y Antiderivadas

Félix Martínez de la Rosa (Universidad de Cádiz)

Fecha de recepción: 6 de octubre de 2008
Fecha de aceptación: 13 de abril de 2009

Resumen Se analizan algunos resultados relacionados con la función derivada, y se aplican al estudio de la derivabilidad y antiderivabilidad de funciones

Palabras clave Continuidad, Derivada, Antiderivada, Darboux, Cálculo

Abstract There are analyzed some results related to the derivative function, and are applied to the study of the derivability and antiderivability of functions

Keywords Continuity, Derivative, Antiderivative, Darboux, Calculus

1. Introducción

Los resultados que exponen las propiedades de las funciones continuas y derivables son piezas claves, tanto en las asignaturas de matemáticas en el bachillerato como en los cursos iniciales de Cálculo. Dentro del conjunto de esas propiedades, el teorema de los valores intermedios para funciones continuas, el teorema de Rolle y el del valor medio para funciones derivables se sitúan en lugares destacados. Esto es así porque con ellos, logramos comprender y visualizar el comportamiento de esas funciones en un intervalo. Además nos abren las puertas a todo un abanico de teoremas que desarrollan el análisis de esas funciones.

Existen dos enunciados que describen la relación entre la continuidad y la derivabilidad:

a) Si f es derivable en x_0 , entonces f es continua en x_0

b) Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es una derivada.

El apartado a) no requiere muchas más explicaciones. El apartado b) se refiere al hecho de que exista una función F que verifique $f = F'$. A esta función F se le denomina la antiderivada o primitiva de f. Si f es continua, sabemos que el apartado b) es cierto, por el teorema fundamental del Cálculo integral.

Los resultados recíprocos de éstos dos resultados no se cumplen. Sin embargo, mientras que no hay ninguna duda de que una función continua no tiene porqué ser derivable, existe cierta confusión en lo que se refiere al recíproco de b).

De la igualdad $f = F'$:

- ¿Podemos deducir que f es continua?
- ¿Puede existir F aunque f no sea continua?
- ¿Cualquier tipo de discontinuidad de f permite que exista F ?

En este artículo, mostraremos los resultados relacionados con estas cuestiones, y los aplicaremos al estudio de la derivabilidad de funciones continuas y a la existencia de la antiderivada de una función. El artículo se divide en tres partes:

- En la primera, se muestran los resultados teóricos relativos a las propiedades de una función derivada.
- En la segunda, se utilizan esos resultados en el análisis de la derivabilidad de funciones continuas.
- En la tercera, abordamos el análisis de la antiderivabilidad de funciones desde dos puntos de vista: gráfico y analítico.

2. Resultados teóricos

El primer resultado que ofrece información sobre las características de una función derivada puede encontrarse en el conocido libro (Spivak, M., 1986, p.262). En él se muestra una primera relación entre la existencia de la derivada de una función en un punto y la continuidad de la función derivada en ese punto:

Teorema 1 Supongamos que una función F es continua en x_0, y que $F'(x)$ existe para todos los x de algún intervalo que contiene a x_0, excepto posiblemente $x = x_0$. Supongamos, además, que existe $\lim_{x \to x_0} F'(x)$. Entonces existe también $F'(x_0)$ y se verifica que $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} F'(x)$.

Notas sobre el teorema 1.

El teorema 1, arroja la primera luz acerca de la función derivada de una función continua: si $\lim_{x \to x_0} F'(x)$ existe entonces la función derivada F' es continua en x_0.

Interpretación visual: si en la gráfica de una función f definida en un intervalo se aprecia una discontinuidad evitable, entonces f no es de la forma $f = F'$, es decir f no tiene antiderivada.

Por tanto la función derivada de una función continua no puede tener una discontinuidad evitable. Además, la existencia de $F'(x_0)$ no implica que exista $\lim_{x \to x_0} F'(x)$. Esto significa que una función F puede tener derivada en un punto x_0, aunque F' puede tener una discontinuidad en ese punto.

Para saber más acerca del tipo de discontinuidad que una función de la forma $f = F'$ puede tener, se necesita el teorema de Darboux. En 1875, Darboux probó que la función derivada cumple la propiedad de los valores intermedios (la misma que cumplen las funciones continuas). El teorema de Darboux es uno de los enunciados clásicos del Cálculo que, sin embargo, pasa inadvertido en muchos libros y no se suele ser incluido en los temarios, ni en el bachillerato ni en la Universidad. Para darse cuenta del poco interés que despierta este resultado, basta observar que en el libro (Spivak, M., 1986) se le menciona sólo como un ejercicio de la sección de problemas del capítulo 11:

Teorema 2 (de Darboux) Sea $F(x)$ derivable en $[a,b]$ y $F'(a) < F'(b)$ (análogamente para $F'(a) > F'(b)$). Sea $\gamma \in \mathrm{R}$ tal que $F'(a) < \gamma < F'(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = \gamma$.

Notas sobre el teorema 2.

Del teorema 2 se deduce que una función f que no cumpla la propiedad de los valores intermedios en un intervalo, no puede ser la derivada de otra, es decir no es del tipo $f = F'$.

Interpretación visual: si en la gráfica de una función f se aprecia un agujero en su rango, entonces f no tiene antiderivada.

El análisis completo del tipo de discontinuidad que puede tener una función derivada, puede verse, por ejemplo, en el artículo (Klippert, J., 2000). Su demostración (que no incluimos aquí), se logra gracias al teorema de Darboux:

Teorema 3 Sea *F* derivable en $[a,b]$, y $x_0 \in (a,b)$. Si F' es discontinua en x_0 entonces:

- **a)** F' no tiene una discontinuidad evitable en x_0.
- **b)** F' no tiene una discontinuidad de salto en x_0.
- **c)** $\lim_{x \to x_0^-} F'(x) \neq \pm\infty$ y $\lim_{x \to x_0^+} F'(x) \neq \pm\infty$.

Notas sobre el teorema 3.

La única posibilidad de que F' tenga una discontinuidad en un punto x_0 es que o bien $\lim_{x \to x_0^-} F'(x)$ no exista, o bien $\lim_{x \to x_0^+} F'(x)$ no exista.

Interpretación visual: Si en la gráfica de una función f no se aprecian discontinuidades evitables, de salto, o de salto infinito, entonces la función f podría ser del tipo $f = F'$.

Por tanto, la única discontinuidad que se le permite a una función f para que tenga antiderivada es la no existencia de alguno de los límites laterales en algún punto.

A este último tipo de discontinuidad generalmente no se le presta demasiada atención: la no existencia de algún límite lateral en un punto no parece aportar mucha información, más allá de la manera errática con el que la función parece comportarse cerca del punto. Pero con el teorema 3 se puede apreciar que, mientras que una función f con una discontinuidad evitable, de salto o infinita en un punto no puede tener antiderivada, una función que no tenga límite lateral en un punto sí puede tenerla.

3. Estudio de la derivabilidad de funciones continuas

Los problema acerca de la continuidad y derivabilidad de funciones, son habituales tanto en bachillerato como en los primeros cursos de Cálculo. Una vez que se comprueba que la función es continua en un punto x_0, se estudia la derivabilidad en ese punto calculando el límite de la definición de Cauchy:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

Esto funciona bien para funciones sencillas, pero si las expresiones se complican algo, el cociente que aparece dentro del límite también lo hace, y su cálculo se vuelve farragoso. En estos casos los recursos teóricos anteriores son una alternativa válida para resolver estos problemas.

Los tres ejemplos que damos a continuación, abarcan todas las situaciones que nos podemos encontrar al estudiar la derivabilidad de las funciones.

Ejemplo 1. Hallar *a* y *b*, para que sea derivable en $x=-1$ la función:

$$F(x)=\begin{cases} ax^2+b & si\, x\le -1 \\ ax^3+x+2b & si\, x>-1 \end{cases}$$

Solución. Igualando los límites laterales en $x=-1$, se obtiene la condición $a+b=-a-1+2b$, que hay que fijar para asegurar la continuidad. Además

$$F'(x)=2ax \text{ si } x<-1 \;\; ; \; F'(x)=3ax^2+1 \text{ si } x>-1$$

Se verifica que $\lim\limits_{x\to -1^-}F'(x)=-2a$ y $\lim\limits_{x\to -1^+}F'(x)=3a+1$, por tanto:

- **a)** Si $-2a=3a+1$, existe $\lim\limits_{x\to -1}F'(x)$, y del teorema 1 se deduce que *F* es derivable en $x=-1$.
- **b)** Si $-2a\ne 3a+1$, entonces F no tiene derivada en $x=-1$, pues si existiese entonces F' tendría una discontinuidad de salto en $x=-1$, lo que no es posible por el teorema 3(b).

Ejemplo 2. Estudiar la derivabilidad en $x=0$ de $F(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & si\, x\le 0 \\ x^3 & si\, x>0 \end{cases}$

Solución. Esta función es continua en $x=0$. Además

$$F'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \text{ si } x<0 \;\; ; \;\; F'(x)=3x^2 \text{ si } x>0$$

En este caso F no tiene derivada en $x=0$. Observemos que $\lim_{x\to 0^-} F'(x)=\infty$, por tanto si existiese F' en $x=0$, tendríamos una contradicción con el teorema 3(c).

Ejemplo 3. Estudiar la derivabilidad en $x=0$ de la función:

$$F(x)=\begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x} & si\, x\neq 0 \\ 0 & si\, x=0 \end{cases}$$

Solución. Esta función es continua en $x=0$. Observemos que

$$F'(x)=2xsen\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x\neq 0$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} F'(x)$ no existe. En este ejemplo, el teorema 3 no decide acerca de la derivabilidad de F en $x=0$ y debemos usar la definición para saberlo. Se verifica que $\lim_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=0$. Por tanto, F es derivable en $x=0$ mientras que F' no es continua en $x=0$.

4. Estudio de la existencia de antiderivadas

Se dice que una función f tiene antiderivada (o primitiva) en $[a,b]$ si existe F tal que $F'(x)=f(x)$ para cada x de $[a,b]$.

El teorema fundamental del Cálculo integral es uno de los tópicos que se explican en segundo de bachillerato y en los primeros cursos de Cálculo. Este teorema asegura que si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x)=\int_a^x f$ es derivable y $F'(x)=f(x)$ para cada x de $[a,b]$. Por tanto cada función continua posee antiderivada.

4.1 Análisis gráfico de la existencia de antiderivada

En los cursos de bachillerato y de Cálculo, se utiliza mucho el recurso de la observación directa de una gráfica para deducir las propiedades de la misma, independientemente de la fórmula que tenga la función. Así, los alumnos aprenden a visualizar la continuidad, derivabilidad, crecimiento, puntos críticos, concavidad y otras propiedades, lo que les ayuda a representar correctamente la gráfica de funciones.

Con esta filosofía se propone el ejemplo 4. En él se dan una serie de gráficas, sin detallar la fórmula de la función, con el objetivo de analizar, mediante la observación apoyada en los resultados teóricos, la existencia de la antiderivada.

Ejemplo 4. Analizar la existencia de antiderivada de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:

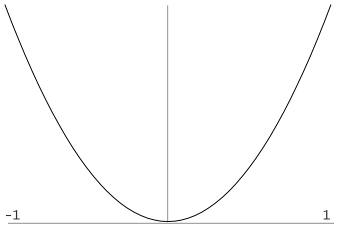

Figura 1

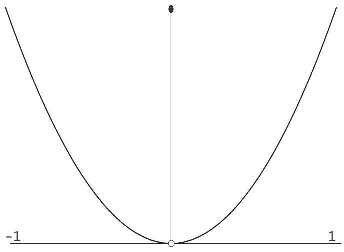

Figura 2

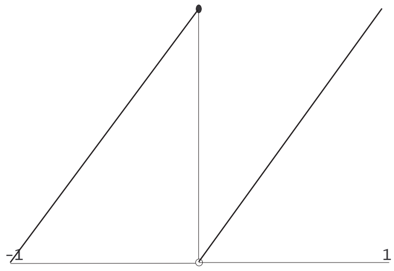

Figura 3

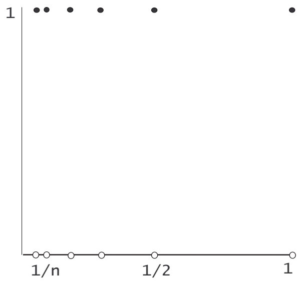

Figura 4

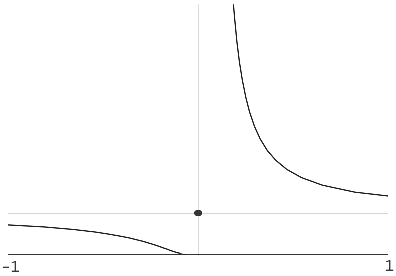

Figura 5

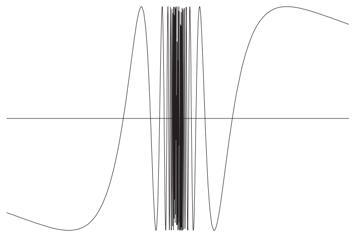

Figura 6

Solución. La función de la figura 1 es continua, por tanto tiene antiderivada por el teorema fundamental del Cálculo.

La función de la figura 2 tiene una discontinuidad evitable, y la de la figura 3 tiene una discontinuidad de salto. Ambas cumplen la propiedad de los valores intermedios pero no tienen antiderivada debido al teorema 3(a) y 3(b).

La función de la figura 4 tiene una discontinuidada en el origen y en cada $x = \dfrac{1}{n}$. Ya que su rango sólo está formado por 0 y 1, no tiene antiderivada por el teorema de Darboux.

La función de la figura 5 tiene una asíntota vertical por la derecha en el eje *x*. Debido al teorema 3(c) no tiene antiderivada.

Las función de las figura 6 no tiene límite ni por la derecha ni por la izquierda en el origen. Por tanto los resultados teóricos no resuelven si existe o no existe antiderivada.

4.2 Existencia de antiderivada en casos "raros"

Ya dijimos antes que cada función continua posee antiderivada, gracias al teorema fundamental del Cálculo integral. El que una función discontinua tenga antiderivada es una circunstancia rara, pero no tanto. El ejemplo 3 ya nos proporciona una función que ilustra este hecho. Tomemos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x sen\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$$

La función f tiene antiderivada, aunque tiene una discontinuidad en 0. Observemos que se verifica que $f(x) = F'(x)$, donde F es la función del ejemplo 3.

En el ejemplo 5, damos otras dos funciones que verifican este hecho. Un estudio más intensivo (y más complicado) de este tipo de funciones puede verse en el artículo (Hartmann, F.; Sprow, D., 1995)

Ejemplo 5. Probar que las siguientes funciones tienen antiderivada en cada punto de *R*.

a) $f(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} + sen\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$

b) $g(x) = sen\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $g(0) = 0$

Solución. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tienen un comportamiento similar a la figura 6. Ninguna de las dos funciones son continuas en $x = 0$, porque no existen sus límites cuando *x* tiende a 0. Por el teorema 3, podrían tener antiderivada.

La función $F(x) = x^2\cos\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $F(0) = 0$, verifica que $F'(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} + sen\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, y $F'(0) = 0$.

Por otro lado la función $h(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $h(0) = 0$, es continua en todo *R*, y su antiderivada es $H(x) = \int_0^x h$.

Por último, la función $F - H$ es la antiderivada de *g* (otra solución puede verse en el artículo (Klippert, J., 2000).

Finalmente, en los primeros cursos de Cálculo se explica que una función puede ser integrable aún no siendo continua. En todo caso, si *f* es integrable en $[a,b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f$ verifica que $F'(c) = f(c)$ en cada punto *c* del intervalo en el que *f* sea continua (ver Spivak, M., 1986, p. 357).

En el ejemplo 6 veremos que la igualdad anterior puede darse, también, en puntos donde *f* no sea continua.

Ejemplo 6. Dada la función (cuya gráfica es la de la figura 4):

$$f:[0,1] \to R \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x = \dfrac{1}{n} \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$$

Probar que no es continua en $x = 0$, que es integrable en $[0,1]$ y que la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ verifica que $F'(0) = f(0)$.

Solución. Es claro que *f* no es continua en $x = 0$ ya que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Para ver que la función es integrable en $[0,1]$ es suficiente probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición *P* de $[0,1]$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Es evidente que para cada partición *P* de $[0,1]$, la suma inferior de *f* en *P*, $L(f,P)$, vale cero. Comprobemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición *P* tal que la suma superior de *f* en *P* verifique que $U(f,P) < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in N$ tal que para cada $n \geq k$ es $\frac{1}{n} \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$. Por tanto si elegimos una partición $P = \{t_0 = 0, t_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, t_n = 1\}$ tal que cada $\frac{1}{n}, n < k$, esté contenido en un único intervalo de longitud menor que $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, tenemos:

$$U(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

Por tanto *f* es integrable en $[0,1]$, $\int_0^1 f = 0$, y la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ verifica que $F'(0) = f(0)$.

Bibliografía

Hartmann, F.; Sprow, D. (1995). “*Oscillating Sawtooth Functions*”. Mathematics Magazine, vol. 68, nº 3, pp. 211-213.

Klippert, J. (2000). “*On a discontinuity of a derivative*”. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol.31, nº 2, pp. 282-287.

Spivak, M. (1986). “*CALCULUS. Cálculo infinitesimal*”. Ed. Reverté.

Félix Martínez de la Rosa. Catedrático de E. U. de Matemática aplicada en la Facultad de CC. EE. y Empresariales de la Universidad de Cádiz. Investigaciones en educación matemática acerca de la diferenciación de funciones reales de una y dos variables, y sobre la visualización.
E-mail: felix.martinez@uca.es