MIGUEL HOYOS JULIÁ

ARITMÉTICA

(SEGUNDO GRADO)

N.º 173.

ARITMÉTICA

ARITMÉTICA

(SEGUNDO GRADO)

POR

MIGUEL HOYOS Y JULIÁ

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS

EN EL

INSTITUTO GENERAL Y TÉCNICO DE LOGROÑO

Miguel Hoyos y Juliá

LOGROÑO

IMPRENTA Y LIBRERIA MODERNA

1918

Advertencia a los alumnos

En este segundo grado de Aritmética, no se trata únicamente de aprender **reglas** *para ejecutar las operaciones, ni de saber sólo de memoria ciertas propiedades o* **teoremas,** *sino más bien de* **entender** *aquellas reglas y de* **razonar** *la verdad de estas propiedades, por lo cual los teoremas deben* **demostrarse**, *esto es, explicarse lógicamente los motivos de lo que en ellos se afirme.*

Pero téngase en cuenta que la demostración no debe aprenderse nunca sin haber **antes** *comprendido perfectamente el enunciado. A tal fin, cuando en el libro se enuncian teoremas o reglas, suelen ponerse ejemplos aclaratorios, que el alumno debe variar, hasta haber penetrado bien el sentido de la cuestión. Sin ello, la demostración es* **perjudicial.**

Cuando el alumno halle dificultades en la representación de números por letras, no hay inconveniente en que, por primera vez, reemplace éstas por aquéllos, aunque es bueno que se vaya habituando al uso de expresiones literales.

ARITMÉTICA

[SEGUNDO GRADO]

1. **Unidad y pluralidad.**—Damos por adquiridas las ideas abstractas de *unidad y pluralidad*, que nacen, respectivamente, de la contemplación de un objeto aislado y de la de una colección de varios objetos.

2. **Conjuntos.**—Varios seres u objetos, simultáneamente considerados, forman lo que llamaremos un *conjunto*, del cual son *elementos* esos mismos seres u objetos.

Los conjuntos de objetos tienen propiedades que dependen de la naturaleza de los elementos que los constituyen, o del orden en que éstos se consideren; pero su *pluralidad* no depende ni de una cosa ni de otra, sino que permanece inalterable, aunque cada uno de aquellos objetos se reemplace por otro de naturaleza distinta, o aunque se mude el orden de colocación.

Por ejemplo: si en un *conjunto* (*) de plumas sustituímos cada pluma por un lápiz, habremos formado un conjunto de lápices, y éste conser-

(*) Aun sin advertirlo expresamente, entiéndese que este conjunto es limitado o *finito*.

vará ciertas propiedades de aquél, mientras otras habrán sufrido alteración; v. g.: se conservará la propiedad de ser los elementos aptos para la escritura, y se habrán modificado la naturaleza, y tal vez el color, el peso u otras cualidades *físicas* de los objetos. Pero si al cambiar de elementos tuvimos cuidado de que cada pluma fuese sustituída por un solo lápiz, y de que no quedase ninguna pluma sin ser sustituída, la *pluralidad* del conjunto no habrá experimentado variación.

Respecto al orden, ocurre análogamente. El conjunto de letras que forman la palabra ROMA da origen a otras palabras distintas: AMOR, MORA, RAMO, al cambiar el orden de los elementos; pero la pluralidad de letras de estas palabras continúa la misma.

El conjunto de plumas y el de lápices de que nos hemos valido en el ejemplo anterior se llaman *coordinables*, y esto significa, según hemos indicado, que cada pluma puede ser reemplazada por un lápiz, de modo que al agotarse, por estas sustituciones, el conjunto de plumas, el de lápices se agota al mismo tiempo. En lugar de sustituir cada pluma por su lápiz correspondiente, podríamos formar *parejas* con estos elementos, de suerte que un elemento del primer conjunto tiene en el segundo otro elemento correspondiente a él, y, *recíprocamente*, todo elemento del segundo tiene uno, y sólo uno, correspondiente en el primero; y esto con independencia del orden. (*)

La coordinación de dos conjuntos puede,

(*) Los elementos correspondientes suelen llamarse *homólogos*, y esta correspondencia, *recíproca* o *biunívoca*.

pues, hacerse de diversos modos, si bien para facilitarla se busca de ordinario que los elementos correspondientes tengan algo de común. Por ejemplo, si las plumas antes mencionadas fuesen una verde, otra amarilla, otra azul y otra blanca, y los lápices de los mismos colores, haríamos la coordinación tomando como elementos correspondientes los de igual color, y formarían pareja la pluma verde con el lápiz verde, la pluma amarilla con el lápiz amarillo, etc.

El conjunto de letras ABCD es *coordinable* con el conjunto de letras A'B'C'D', y la manera más cómoda de efectuar la coordinación es tomar como parejas A con A', B con B', C con C' y D con D', con lo cual, al agotarse el primer conjunto, se agota indudablemente el segundo.

3. Además de las anteriores, admitimos como *intuitivas* (*) las siguientes propiedades:

I. Si un conjunto es coordinable con otro, éste lo es con aquél.

II. Si un conjunto es coordinable con otro, y éste con un tercero, el primero es coordinable con el tercero.

(Compruébelo el alumno, sirviéndose de objetos materiales).

4. Hemos dicho que si reemplazamos uno por uno los elementos de un conjunto por los de otro coordinable, la pluralidad no se altera.

Esta idea se expresa de un modo más preciso, diciendo que dos conjuntos *coordinables* tienen igual número de objetos.

(*) Que se ven o comprueban fácilmente.

5. **Número natural.**—La idea de número es, por consiguiente, una idea abstracta que manifiesta lo que tienen de común, en cuanto a la pluralidad, *todos los conjuntos coordinables entre sí.*

En términos más breves diremos:

Número *(natural) es una pluralidad determinada:* la que conviene a un conjunto dado y a todos los coordinables con él.

6. El número, como otra idea cualquiera, se manifiesta por una palabra o por un signo de escritura. Así, la palabra *tres* y este signo: 3, representan cierto número. Y por una figura retórica muy natural, la palabra misma *tres*, y el signo 3, se llaman también números; aunque bien se comprende que podrían haberse elegido otra palabra y otro signo distintos de los anteriores para designar el mismo número, como acontece cuando se cambia de sistema de numeración.

7. El número de que estamos hablando, representante de la pluralidad de un conjunto con independencia del orden en que se consideren los objetos de éste, se llama número *cardinal.* Pero también sirve el número para indicar el lugar que un objeto ocupa en un conjunto de ellos, dispuestos en cierto orden, y cuando así se considera, se llama número *ordinal.*

8. **Cero y uno.**—Propiamente hablando, *un* objeto no constituye un conjunto, ni podemos referirnos a su pluralidad, sino a su *unidad;* pero, para mayor generalidad, convenimos en considerar conjuntos de un solo objeto; y llamamos *número* a la unidad, designando este número con la paladra *uno*, y el signo o cifra 1.

Todavía más: consideramos el conjunto *nulo*, que carece de elementos, y le asignamos el número *cero* y la cifra *o*.

9. **Serie natural.**—Si consideramos un objeto, y luego el conjunto que forman él y otro, a este conjunto y a todos los coordinables con él, corresponde, por su pluralidad, un número (el dos). Si al conjunto de esta manera formado le agregamos un nuevo objeto, resultará otro conjunto, al que corresponde un nuevo número (el tres). Siguiendo de esta manera obtendremos lo que se llama *serie de los números naturales*.

Tenemos conciencia de la posibilidad de que la agregación que ha dado origen a esta serie se continúe indefinidamente, y en este sentido decimos que *la serie de números naturales no tiene fin*.

(Suele también decirse que es *ilimitada* o *infinita*).

10. **Contar** es recorrer ordenadamente la sucesión de los números naturales, enunciando su nombre con arreglo a las leyes de un sistema de numeración.

Contando, a la vez que fijamos la atención sucesivamente en los objetos de un conjunto, obtenemos, al agotarlos, su número, y mediante este número, *determinamos* su pluralidad, esto es, contestamos a la pregunta *¿cuántos* objetos hay?

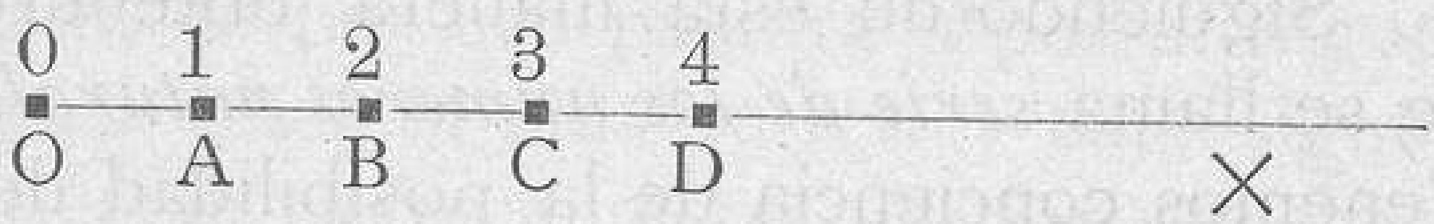
11. Por eso, admitida la existencia del conjunto de *un* objeto y del conjunto *nulo*, consideramos también como *números* al *uno* y al *cero*, que contestarían, respectivamente, en estos casos, a la palabra *¿cuántos?*

12. Si cuando contamos vamos fijando el orden de los objetos (primero, segundo, etc.), obtenemos juntamente con el número *cardinal*

que dice *cuántos* objetos hay, el número *ordinal* que indica *qué lugar* ocupa el último objeto considerado.

12. **Imagen gráfica.**—Para hacer más sensibles estas consideraciones, conviene tener una *imagen gráfica* de la serie natural de los números.

Para ello basta que, a partir del origen O de una semirrecta O X (figura adjunta), tomemos segmentos iguales OA, AB, BC, CD...



Los extremos A, B, C..., de estos segmentos vienen entonces *numerados*, esto es, distinguidos por los números 1, 2, 3... Al origen le corresponde el número *cero*. Esta numeración es, a la vez, ordinal, puesto que designa *el lugar* en que se halla el extremo de la derecha de un segmento determinado, y cardinal, porque dice cuántos segmentos hay hasta el considerado inclusive.

13. **Aritmética** es la parte de la Matemática que trata de los números. La Aritmética *vulgar* estudia los números escritos en el sistema de numeración decimal que usamos corrientemente, y la Aritmética *universal* estudia los números en general, valiéndose para representarlos de las letras del abecedario.

Generalmente se usan las letras minúsculas, a, b, c para designar números que se suponen conocidos; las últimas letras x, y, z, suelen usarse para designar números indeterminados o desconocidos. A veces se usan las letras con ciertos acentos a su derecha en esta forma a' a'' que se lee a *prima* (primera) a'' (a segunda), etc.

Signos aritméticos son caracteres gráficos que sirven para representar o enlazar los números. Tales son, además de las cifras 1, 2, 3..., los signos de igualdad y desigualdad $=$(igual), $>$ (mayor que), $<$ (menor que), y los de las operaciones $+$ (más), $-$ (menos), etc., que deben ser ya conocidos para el que estudie este libro.

En él nos proponemos perfeccionar y ampliar algún tanto las nociones de Aritmética vulgar contenidas en nuestra obrita «*Figuras y Cálculos*» o en otra análoga, y echar los primeros fundamentos de la Aritmética universal, que se estudian con más solidez científica en las Universidades y Escuelas especiales.

14. **Relación de igualdad.**—Las propiedades I y II del párrafo 3 dan evidencia, respecto a los números, a estas otras:

1.ª Todo número es igual a sí mismo.

2.ª Si un número es igual a otro, éste lo es al primero.

3.ª Dos números iguales a otro son iguales entre sí.

15. Claro es que, en el fondo, al expresar las propiedades que anteceden, no hacemos sino afirmar que a todos los conjuntos coordinables corresponde *un mismo* número; pero como el *signo* que empleamos para representar éste puede ser distinto, las anteriores propiedades nos dan los caracteres que atribuímos a la *relación de igualdad* expresada por el signo $=$.

Estos caracteres se llaman:

El que expresa que $a = a$, carácter *reflexivo* o *idéntico*.

El que manifiesta que si $a=b$, $b=a$ (es decir, que pueden invertirse los *miembros* de la igualdad), carácter *simétrico* o *recíproco.*

El que indica que de $a=b$ y $b=c$ se deduce $a=c$ carácter *transitivo* o *progresivo.*

Diremos, pues, que la relación de igualdad entre números es *reflexiva, simétrica* y *transitiva,* para manifestar que goza de las anteriores propiedades.

Operaciones con números naturales

ADICION

16. **Reunir** varios objetos es formar con ellos un conjunto. A esta propiedad corresponde, en abstracto, la siguiente *definición* relativa a los números:

Sumar varias *unidades* es formar con ellas un *número*. Este número es el que correspondería al conjunto de tantos objetos como unidades se consideran.

17. **Reunir** varios conjuntos es formar uno solo en que entren todos los objetos de dichos conjuntos, y solo ellos.

Sumar dos números es formar uno solo con las unidades de ambos.

18. **Sumar** *varios* números, dados en cierto orden, es sumar el 1.º con el 2.º, la suma de ambos con el 3.º, etc. Lo cual se indica:

$(a + b) + c$, o más sencillamente, $a + b + c$.

La primera manera indica mejor que hay que sumar primero a con b, y *el resultado* con c; pero después de adquirir costumbre puede usarse la segunda forma. Para expresar este modo de proceder, diremos que la suma se ejecuta *sucesivamente*, o bien que es una operación *progresiva*.

19. **Propiedad conmutativa**. —Considera-

mos como cierto que el orden en que *reunamos* los objetos de varios conjuntos para obtener otro, no influye en el número de objetos de éste.

De esta propiedad sacamos para la suma de números, esta otra:

El orden de los sumandos de una suma no altera el total.

Esta es la propiedad *conmutativa* de la suma, que se expresa en signos, escribiendo, por ejemplo:

$$a + b = b + a,$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c, \text{ etc.}$$

20. **Propiedad asociativa.**—Si un conjunto se reúne con otro, y lo resultante con un tercero, se obtiene igual conjunto que reuniendo el primero con el conjunto formado por la reunión de los otros dos.

De esta propiedad (que el alumno debe comprobar con objetos materiales) sale para los números la siguiente:

Si a la suma de dos números se le suma un tercero, se obtiene igual total que sumando el primero con la suma de los otros dos.

Esta es la propiedad *asociativa*, aplicada sólo a tres términos o sumandos, que se escribiría:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Se puede ampliar la propiedad a más términos, y entonces la enunciaremos así:

En una suma se pueden sustituir varios sumandos por su suma efectuada.

Ejemplo: $4 + 3 + 5 + 7 = 4 + \mathbf{8} + 7$.

Para expresar esto mismo con letras, se incluyen en un paréntesis los sumandos que se reemplazan por su suma efectuada. Así:

$$a + b + c + d = a + (b + c) + d$$

La propiedad asociativa se aplica *inversamente* cuando en lugar de un sumando se ponen varios de cuya suma resultase aquél, como se expresaría escribiendo las igualdades anteriores con los miembros cambiados, esto es:

$$4 + 8 + 7 = 4 + 3 + 5 + 7$$

$$a + (b + c) + d = a + b + c + d$$

21. **Sumando cero.**—Si un conjunto se reúne con el conjunto nulo, permanece el mismo, puesto que el conjunto nulo carece de objetos. Esto, respecto a los números, quiere decir: *La suma de un número con cero, es el mismo número*. Así:

$$a + 0 = a, \quad 0 + 0 = 0$$

Para que la propiedad conmutativa siga aplicándose a este caso, se hace el *convenio* de que también

$$0 + a = a$$

22. **Propiedad uniforme.**—Si dos conjuntos coordinables, A y B, se reúnen con otros también coordinables, C y D, los resultados son coordinables.

(Compruébelo el alumno).

Como a conjuntos coordinables corresponden iguales números, podemos decir:

Si dos sumas (de a dos sumandos) *tienen los sumandos iguales, las sumas son iguales.*

Es decir, que si

$$a = a' \text{ y } b = b'$$

la suma $a + b$ es igual a la $a' + b'$.

Esto mismo puede escribirse en la forma

$$\begin{array}{c} a = a' \\ b = b' \\ \hline a + b = a' + b' \end{array}$$

y entonces se enuncia diciendo:

Se pueden sumar, miembro a miembro, dos igualdades, y resulta otra igualdad. (Por sumar *miembro* a *miembro*, se entiende efectuar la suma del primer miembro de una igualdad con el primero de la otra, y luego, el segundo miembro con el segundo de la otra).

La propiedad es cierta para más de dos igualdades.

Como caso particular resulta, que *si a los dos miembros de una igualdad* a = b, *se les suma un mismo número*, m, *resulta otra igualdad*,

$$a + m = b + m$$

Porque esto equivale a hacer la suma de igualdades

$$\begin{array}{c} a = b \\ m = m \\ \hline a + m = b + m \end{array}$$

23. **Resumen y aplicaciones.**—En resumen: la adición es una operación *uniforme, conmutativa* y *asociativa*, y que para más de dos sumandos se realiza *sucesivamente*.

Consecuencia de estas propiedades son las que siguen:

En una suma pueden encerrarse varios términos (sumandos) en un paréntesis, o suprimir éste si le hubiere, sin que el total varíe. Ejemplo:

$$a+(b+c)+d+f = a+b+(c+d+f)$$

Para sumar un número con una suma, una suma con un número, o varias sumas, se forma una suma única con todos los términos de los datos.

Ejemplos:

1.º Un número + una suma:

$$a+(b+c)=a+b+c=(a+b)+c.$$

2.º Una suma + un número:

$$(a+b)+c=a+b+c.$$

3.º Una suma + otra:

$$(a+b)+(c+d)=a+b+c+d.$$

Se podrían dar reglas especiales para cada uno de estos casos. (Es buen ejercicio para el alumno el enunciarlas).

24. *Observación.*—La propiedad conmutativa y la asociativa se han establecido en general, esto es, para varios términos, pero se puede demostrar que si una operación que se realiza sucesivamente es uniforme, conmutativa para dos términos y asociativa para tres es conmutativa y asociativa en general, o que si es uniforme y conmutativa para dos y tres términos, es conmutativa y asociativa en general.

25. **Relaciones de desigualdad**.—Se comprende que al tratar de coordinar dos conjuntos

de objetos, disponiendo éstos por parejas (como hicimos con los lápices y las plumas de los ejemplos anteriores) pueden agotarse los objetos de uno de los conjuntos y no los del otro, de modo que en éste quedarán objetos sobrantes, o, lo que es igual, el primer conjunto será coordinable con *una parte* del 2.º. Abreviadamente se dice entonces, que el 1.er conjunto es parte del 2.º y éste es la reunión del primero con otro 3.er conjunto formado por los objetos que habían quedado sobrantes después de la coordinación parcial.

Por esto, y por lo que de la serie de números naturales sabemos, podremos decir que un número a es *menor* que otro b, o éste *mayor* que a, en cualquiera de los casos siguientes:

1.º Cuando un conjunto de objetos cuyo número es a es una parte del conjunto cuyo número de objetos es b.

2.º Cuando b es la suma de a con un tercer número c.

3.º Cuando a está antes que b en la serie natural 0, 1, 2, 3...

En cualquiera de los casos se escribirá $a < b$ o $b > a$.

Dados dos números a y b, sólo pueden ocurrir estos casos, de los que cada uno excluye los otros dos.

1.º $a > b$, 2.º $a = b$, 3.º $a < b$.

Cuando permanece en duda si a es, por ejemplo, igual o menor a b, se escribe:

$$a \leqq b$$

Entonces se dice también que a está *contenido* en b o que b contiene a a.

Es fácil comprobar que si $a < b$ y $b < c$, es también $a < c$.

26. Si

$$\begin{array}{rc} & a = b \\ & c > d \\ \hline \text{será} & a + c > b + d \end{array}$$

Porque siendo $c > d$, será c la suma de d con otro número n, es decir: $c = d + n$, y por tanto

$$a + c = a + d + n > a + d = b + d,$$

o en resumen, $a + c > b + d$.

Análogamente se prueba que si

$$\begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a + c > b + d \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d. \end{array}$$

Lo cual se enuncia diciendo: *se pueden sumar, miembro a miembro, una igualdad y una desigualdad, o dos desigualdades del mismo sentido, y resulta otra desigualdad del mismo sentido.*

Si las desigualdades son de sentido contrario, no se puede decidir de antemano cual será el resultado de sumarlas. Así: $7 > 5$ y $2 < 4$; pero $7 + 2 = 5 + 4$.

MULTIPLICACIÓN

27. **Multiplicar** *un número llamado* **multiplicando**, *por otro llamado* **multiplicador,** *es hallar un tercero, denominado* **producto**, *igual al resultado de sumar el multiplicando tantas veces como indique el multiplicador.*

El multiplicando y el multiplicador se llaman, sin distinción, *factores* del producto.

La multiplicación así definida no es sino una suma en que todos los sumandos son iguales al multiplicando y hay un número de ellos igual al multiplicador. Así

$$a \times b, \text{ o } a \,.\, b \text{ o sólo } ab,$$

son *productos indicados* que se leen: a multiplicado por b, a por b o sólo ab, y equivalen todos a la suma

$$a + a + a \ldots + a \; (b \text{ sumandos})$$

El producto $1 \,.\, a$ es igual a a, porque

$$1 \,.\, a = 1 + 1 + 1 \ldots \; (a \text{ veces})$$

28. *Multiplicar varios números o efectuar un* **producto de varios factores**, *dados en cierto orden, es multiplicar el primero por el segundo, el producto de ambos por el tercero*, etc.

La multiplicación se efectúa, pues, *sucesivamente.*

29. **Propiedad uniforme**.—*Si dos produc-*

tos (de dos factores) *tienen iguales los factores, son iguales.* O dicho de otro modo: *Se pueden multiplicar, miembro a miembro, dos igualdades, y el resultado es otra igualdad.*

$$\begin{array}{c} a = a' \\ b = b' \\ \hline a \,.\, b = a' \,.\, b' \end{array}$$

Para demostrarlo nos apoyamos en la definición de multiplicar (27) según la cual

$$a \,.\, b = a + a + a \,... \,(b \text{ sumandos})$$

$$a' \,.\, b' = a' + a' + a' \,... \,(b' \text{ sumandos})$$

Estas sumas tienen los sumandos iguales, porque $a = a'$, y tienen igual número de sumandos, porque $b = b'$, luego son iguales.

La propiedad es cierta aunque las igualdades fuesen más de dos.

30. Como caso particular, resulta que *se pueden multiplicar los dos miembros de una igualdad por un mismo número, y los productos son iguales.*

Así: si $a = b$, también $a \,.\, m = b \,.\, m$, porque esto equivale a multiplicar dos igualdades.

$$\begin{array}{c} a = b \\ m = m \\ \hline a \,.\, m = b \,.\, m \end{array}$$

31. **Propiedad distributiva.**—La multiplicación es distributiva respecto de la suma, lo cual significa que:

Para multiplicar un número por una suma se le multiplica por el 1.er sumando, en seguida, *por el 2.°, etc., y se suman los productos parciales.*

De modo que

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$

Se demuestra apoyándose en la definición de multiplicar (27). Según ella, para efectuar el producto $a \,.\, (b + c)$ ha de sumarse a un número de veces igual a $b + c$. Mas para ello, según las propiedades de la suma, podemos, primero sumar b veces a (lo que da $a \,.\, b$), luego c veces (lo que da $a \,.\, c$) y luego ambas sumas: con lo que se obtiene $a \,.\, b + a \,.\, c$.

He aquí el cálculo detallado:

$$a \,.\, (b + c) = \overbrace{a + a + a + a \dots}^{(b + c \text{ veces}} =$$

$$= \overbrace{a + a + a \dots}^{(b \text{ veces}} + \overbrace{a + a + a \dots}^{(c \text{ veces}} = a \,.\, b + a \,.\, c$$

Para multiplicar una suma por un número se multiplica el primer sumando por el número, luego, el segundo sumando por el número, etc., y se suman los productos parciales.

Es decir: que

$$(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c$$

Según la definición de multiplicar, para efectuar el producto de $(a + b)$ por c, hay que sumar esa suma c veces. Mas esto, según las propiedades de la adición, puede efectuarse sumando c veces el sumando a (lo que da $a \,.\, c$), luego c veces el sumando b (lo que da $b \,.\, c$), y luego ambas sumas, con lo que se obtiene $a \,.\, c + b \,.\, c$.

He aquí el cálculo detallado:

$$(a+b)\,.\,c = \overbrace{(a+b)+(a+b)+(a+b)\,...}^{(c \text{ veces}} =$$

$$= \overbrace{(a+a+a\,...)}^{(c \text{ veces}} + \overbrace{(b+b+b\,...)}^{(c \text{ veces}} = a\,.\,c + b\,.\,c$$

32. **Propiedad conmutativa.**—*El orden de colocación de los factores no influye en el producto.*

Para dos factores esto significa que

$$a\,.\,b = b\,.\,a$$

Y, en efecto: por la propiedad uniforme, podemos poner en el primer miembro de la igualdad en vez del número *a* la *suma* indicada de *a* unidades, y haciéndolo así, y aplicando la regla anterior, para multiplicar una suma por un número,

$$a\,.\,b = \overbrace{(1+1+1\,...)}^{(a \text{ veces}}\,.\,b = \overbrace{1.b+1.b+1.b+\,...}^{(a \text{ veces}} =$$

$$= \overbrace{b+b+b\,...}^{(a \text{ veces}} = b\,.\,a$$

33. **Productos por 1 y por 0.**—Habíamos visto que, $1\,.\,a = a$. Para que la propiedad conmutativa se aplique a este caso, *convenimos* en que

$$a\,.\,1 = a$$

Luego, *un producto de dos factores es igual a uno de ellos cuando el otro es* 1.

Según lo convenido en la suma (21) y la definición de multiplicar,

$$0\,.\,a = \overbrace{0+0+0\,...}^{(a \text{ veces}} = 0$$

Para que subsista aún la propiedad conmutativa *convenimos* en que también

$$a \,.\, 0 = 0$$

En particular: o . o = o. Luego, *un producto es cero, cuando lo es alguno de los factores.*

Fácilmente se entiende que esta condición, suficiente, es también necesaria.

34. **Propiedad asociativa.**—*Si el producto de dos números se multiplica por otro, se obtiene igual resultado que multiplicando el primer número por el producto de los otros dos.* Es decir: que

$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$$

Como las multiplicaciones del primer miembro de la igualdad han de hacerse sucesivamente, dicho primer miembro equivale a

$$\overset{(b \text{ veces}}{(a+a+a...)}+\overset{(b \text{ veces}}{(a+a+a...)}+\overset{(b \text{ veces}}{(a+a+a...)} \; [c \text{ paréntesis}]$$

Luego el número a se suma b veces en cada paréntesis, y como el número de éstos es c, en definitiva se suma a un número de veces igual a $b \,.\, c$, lo que produce $a\,(b \,.\, c)$, como se quería demostrar.

35. **Generalización y consecuencias.**—Probado que la multiplicación es uniforme, conmutativa para dos factores, y asociativa para tres, se sabe (24) que será conmutativa y asociativa para cualquier número de factores.

Las consecuencias que de aquí se deducen son análogas a las que se expusieron para la suma (23) Así:

En un producto pueden encerrarse varios fac-

tores en un paréntesis, o suprimir éste si le hubiera.

Ejemplo: $a.(b.c).d.f = a.b.(c.d.f)$

Cambia *el modo* de efectuar la operación, pero no el *producto* o resultado final.

36. *Para multiplicar un número por un producto, un producto por un número, o varios productos, se forma un producto único con todos los factores.*

Ejemplos:

1.º Un número por un producto

$$a.(b.c.d) = a.b.c.d.$$

2.º Un producto por un número

$$(a.b).c = a.b.c.$$

3.º Dos productos

$$(a.b).(c.d) = a.b.c.d.$$

Podrían darse, además, reglas especiales para cada caso. Entre ellas es digna de mención la que dice que *para multiplicar un producto por un número, basta multiplicar* **uno** *de los factores, y el resultado se multiplica por los demás.*

Ejemplo:

$$(4.7.3).5 = \mathbf{35}.4.3$$

37. *Observación.*—Hay que tener muy presente, que si bien en operaciones sólo de suma o sólo de multiplicación la supresión de paréntesis no hace cambiar el resultado, no ocurre así en operaciones combinadas de suma y producto, porque se altera el significado de la escritura. Así,

la operación $(a + b) . c$, da por resultado $a . c + b . c$; mientras que escribiendo aquélla sin paréntesis se obtendría $a + (b . c)$ que es cosa distinta. Mejor aún se comprueba con números: $(7 + 2) . 3 = 9 . 3 = 27$, mientras que sin paréntesis sería: $7 + 2 . 3 = 7 + 6 = 13$.

38. Para multiplicar dos sumas que no puedan realizarse, por venir indicadas con letras, multiplicamos la primera por cada uno de los sumandos de la segunda, o viceversa, y sumamos los resultados parciales.

Ejemplos:

$$(a + b) . (c + d) = (a + b) . c + (a + b) . d$$

$$(a + b) . (c + d) = a . (c + d) + b . (c + d)$$

Con eso queda la cuestión reducida a aplicar reglas anteriores (31). Pero si se quiere directamente el resultado final que por estas reglas se obtendría, se sigue la siguiente:

Para multiplicar dos sumas se multiplican todos los sumandos de la una por el primero de la otra, en seguida otra vez todos los sumandos de aquélla por el segundo de ésta, etc., y se suman los productos parciales. Así se obtendría:

$$(a + b) . (c + d) = a . c + b . c + a . d + b . d$$

39. **Productos desiguales.**—*Si se multiplican una igualdad por una desigualdad, o dos desigualdades del mismo sentido* (en que no haya factores nulos), *resulta otra desigualdad del mismo sentido que las empleadas.*

De modo que

$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c > d \end{array}}{a \,.\, c > b \,.\, d} \qquad \frac{\begin{array}{c} a > b \\ c = d \end{array}}{a \,.\, c > b \,.\, d} \qquad \frac{\begin{array}{c} a > b \\ c > d \end{array}}{a \,.\, c > b \,.\, d}$$

Para demostrar, por ejemplo, la primera desigualdad, compararemos los resultados $a \,.\, c$ y $b \,.\, d$, según la definición de multiplicar, lo que da

$$a \,.\, c = a + a + a \ldots \text{ (} c \text{ sumandos)}$$
$$b \,.\, d = b + b + b \ldots \text{ (} d \text{ sumandos)}$$

Los sumandos a y b son iguales, pero como $c > d$, la primera suma tiene más sumandos que la segunda, luego $a \,.\, c > b \,.\, d$.

Para demostrar la segunda desigualdad tendremos:

$$a \,.\, c = a + a + a \ldots \text{ (} c \text{ sumandos)}$$
$$b \,.\, d = b + b + b \ldots \text{ (} d \text{ sumandos)}$$

El número de sumandos es el mismo, puesto que ahora se supone $c = d$; pero como $a > b$ los sumandos de la primera suma son mayores que los de la segunda, y ésta es la causa de que $a \,.\, c > b \,.\, d$.

Análogamente se razona para el tercer caso.

En particular: *Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un número* (distinto de cero), *los productos forman otra desigualdad del mismo sentido*. Así de $a > b$ sale $a \,.\, m > b \,.\, m$.

Porque esto se deduciría multiplicando la desigualdad $a > b$ por la igualdad $m = m$.

40. Se ha puesto la restricción de no ser cero los factores, porque de lo contrario se llegaría a absurdos. Así, aunque $a > b$, si m es ce-

ro, será $a \, . \, m = b \, . \, m$, puesto que $a \, . \, m$ y $b \, . \, m$ serán ahora iguales a cero.

41. **Múltiplos—Múltiplo** *de un número es el resultado de multiplicarlo por otro.* Este expresa el *orden de multiplicidad.*

Ejemplos:

1.º El producto $a \, . \, m$ es múltiplo de a (de orden m); y de m (de orden a), porque también podría escribirse $m \, . \, a$.

2.º $a \, . \, b \, . \, c \, . \, d$ es múltiplo, por ejemplo, del factor c. El orden de multiplicidad sería $a \, . \, b \, . \, d$, porque el producto dado podría escribirse, considerando $(a \, . \, b \, . \, d)$ como un solo número, en la forma $c \, . \, (a \, . \, b \, . \, d)$.

La serie ordenada de múltiplos de un número se forma multiplicando éste por la serie de números 0, 1, 2, 3... Así, son múltiplos de 4 los números 0, 4, 8, 12..., resultantes de los productos

$$4 \, . \, 0; \; 4 \, . \, 1; \; 4 \, . \, 2; \; 4 \, . \, 3$$

El cero puede, por tanto, considerarse como múltiplo de cualquier número (de orden cero), y *todo número es múltiplo de sí mismo* (de primer orden); pero, generalmente, cuando se habla de los múltiplos de un número se consideran excluídos éstos.

El múltiplo de segundo orden se llama *doble* o *duplo*; el de tercer orden, *triplo;* el de cuarto, *cuádruplo*, etc.

Los múltiplos de 2 se llaman *pares.* Son pares las cifras 2, 4 y 8.

Los múltiplos de otro múltiplo de un número son múltiplos de éste. Así, 8 es múltiplo de

4, y siendo 4 múltiplo de 2, 8 es múltiplo de 2.

Los múltiplos de igual orden de dos números se llaman *equimúltiplos* de éstos. Ejemplos: $a \,.\, m$ y $b \,.\, m$ son equimúltiplos de a y b (de orden m.) 12 y 15 son equimúltiplos de 4 y 5, porque $12 = 4 \cdot 3$ y $15 = 5 \cdot 3$.

Para indicar un múltiplo de un número, cuando no está determinado el orden de multiplicidad, se representa éste por una letra.

Ejemplos: $a \,.\, x$ es un múltiplo de a de cualquier orden, porque $a \,.\, x$ se le puede hacer igual a 0, 1, 2... $2 \,.\, x$ es cualquier número *par;* porque haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = 2$, etc., saldrán los números pares 2, 4, 8... En vez de escribir $a \,.\, x$ se puede escribir $\dot{a}$ (se lee múltiplo de a). Así se tendría $12 = \dot{4}$ (12 múltiplo de 4).

42. **Factor común**—Cuando se suman *productos* que tienen todos un mismo factor, se dice que *se saca* éste cuando se escribe fuera de un paréntesis en el que se encierra la suma de los otros factores.

Ejemplos: En la suma de productos.

$$a \,.\, m + b \,.\, m + m \,.\, c \quad (1)$$

se puede sacar el factor común m escribiendo

$$m \,.\, (a + b + c) \quad (2)$$

Se justifica esto porque al ejecutar la operación (2) se obtendría el resultado (1).

En la suma

$$a \,.\, m + m$$

podemos imaginarnos, en vez de m, el producto $m \cdot 1$, y entonces al sacar el factor m queda

$$m \cdot (a + 1)$$

La suma de varios múltiplos de un número es otro múltiplo. Así, si

$$\left.\begin{array}{l} a = m \cdot x \\ b = m \cdot y \\ c = m \cdot z \end{array}\right\} \text{ sale } a + b + c = m \cdot (x + y + z) = \dot{m}.$$

POTENCIACIÓN

43. **Potenciar** *un número, llamado* **base,** *por otro, llamado* **exponente**, *es hallar un tercero, denominado* **potencia,** *igual al resultado de tomar la base por factor tantas veces como unidades tenga el exponente.*

La potenciación se llama también *elevación a potencias.* Lo mismo significa potenciar a por m, que *elevar* a a la *emésima* potencia.

Se indican ambas cosas así: a^m. El número a es la base; el m, el exponente, y la potencia, el resultado de efectuar el producto

$$a \,.\, a \,.\, a \,... \,(m \text{ factores})$$

para lo cual, claro es que habrá que reemplazar las letras por los números que representan.

De no hacerlo así, la potencia quedará *indicada* en la forma dicha, a^m.

44. La segunda potencia se llama *cuadrado*, y es el producto de la base por sí misma $(a^2 = a \,.\, a)$, y la tercera, *cubo* $(a^3 = a \,.\, a \,.\, a)$.

45. La potencia de exponente 1 es *por convenio* igual a la base, es decir: $a^1 = a$. Luego, *a todo número se le puede suponer el exponente* 1, *sin que se altere.*

Se *conviene* en que a^0 signifique 1.

46. **Producto de potencias**.—*Para multi-*

plicar potencias **de igual base,** *se conserva esta base y se suman los exponentes.*

Ejemplos:

$$3^2 . 3^5 = 3^7;\ a^m . a^n = a^{m+n}$$

Para demostrarlo, tendremos en cuenta que según la definición, a^m significa un producto de m factores iguales a a, y a^n un producto de n factores también iguales a a, y como para multiplicar estos productos habría que formar uno solo con todos los factores, el número a resultaría tomado como factor $m + n$ veces, y esto da a^{m+n}.

He aquí el cálculo detallado:

$$a^m . a^n = \overset{(m \text{ factores}}{(a . a . a \ldots)} . \overset{(n \text{ factores}}{(a . a . a \ldots)} =$$

$$= \overset{(m+n \text{ factores}}{a . a . a . a \ldots} = a^{m+n}$$

En particular:

$$a^2 . a = a^2 . a^1 = a^3;\ a^3 . a = a^3 . a^1 = a^4;\ a^4 . a = a^5 \text{ etc.}$$

47. *Para elevar una potencia a otra potencia se conserva la base y se multiplican los exponentes.*

Ejemplo:

$$(3^2)^4 = 3^8;\ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Porque según la definición, el *número* (a^m) se eleva a la *enésima* potencia, efectuando el producto

$$\overset{(n \text{ factores}}{a^m . a^m . a^m \ldots} = a^{\overset{(n \text{ sumandos}}{m + m + m \ldots}} = a^{m \cdot n}$$

48. **Potencias de productos y sumas.**— *Para elevar un producto a una potencia, se ele-*

van, uno por uno, todos los factores, y se multiplican los resultados.

Ejemplos:

$$(2 \,.\, 3 \,.\, 4)^3 = 2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 4^3$$

$$(a \,.\, b \,.\, c)^m = a^m \,.\, b^m \,.\, c^m$$

Porque, según la definición, el número $(a.b.c)$ se eleva a la potencia *emésima*, haciendo el producto

$$\overbrace{(a \,.\, b \,.\, c) \,.\, (a \,.\, b \,.\, c) \ldots}^{(m \text{ paréntesis}}$$

En este producto habrá el factor a, tomado m veces, y lo mismo el b y el c, luego, asociando estos factores, saldrá $a^m. \, b^m. \, c^m$.

49. **Cuadrado de una suma.**—Para elevar una *suma* a una potencia habría que multiplicarla por sí misma varias veces. Como el resultado general es complicado, nos limitamos al siguiente caso particular.

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer sumando, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \,.\, a \,.\, b + b^2$$

Según la definición, $(a + b)^2$ es el resultado de la multiplicación siguiente:

$$(a + b) \,.\, (a + b)$$

Para efectuar esta multiplicación se sigue la regla general (38), o bien se observa que al multiplicar $a \,.\, a$ sale a^2, al multiplicar $b \,.\, b$ sale

b^2, y el producto $a \cdot b$ se obtiene dos veces: una, al multiplicar el término a de la primera suma por el b de la segunda, y otra, al multiplicar el b de la primera por el a de la segunda. Saldría, pues, en resumen, $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$, que equivale a lo que se quería.

50. *Si al cuadrado de un número se le suma su duplo más 1, se obtiene el cuadrado del número siguiente.*

Ejemplo: Si a 16, que es 4^2, le añadimos $2 \cdot 4 + 1 = 9$, se obtiene 25, que es 5^2.

En general: el número siguiente al representado por la letra a, debe representarse por $(a + 1)$, puesto que tiene una unidad más. Pero

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2 \cdot a + 1$$

y esto hace ver que si al cuadrado a^2 le sumamos el duplo de a, más 1, $2 \cdot a + 1$, obtendremos $(a + 1)^2$, como expresa el enunciado.

Relaciones de desigualdad.—Si $a \gtreqqless b$, multiplicando esta desigualdad o igualdad por sí misma varias veces, saldrá: $a^n \gtreqqless b^n$.

OPERACIONES INVERSAS

Definiciones y primeras propiedades

51. A las tres operaciones, adición, multiplicación y potenciación, llamadas *directas*, corresponden otras *inversas*, a saber: la **substracción** u operación de *restar*; la **división** u operación de *dividir*; la **radicación** u operación de *extraer raíces*, y la **logaritmación** u operación de *tomar logaritmos*.

Conviene definir seguidamente estas operaciones, para apreciar mejor la semejanza de su respectivo objeto.

Substracción.—**Restar** *de un número, llamado minuendo, otro igual o menor, llamado* **substraendo,** *es hallar un tercero, denominado* **diferencia,** *tal, que sumado con el substraendo produzca el minuendo.*

El signo es —, que se lee *menos*, y se coloca entre el minuendo y el substraendo, que son los *términos* o *datos* de la operación. Así, $8 - 6$ es una substracción o diferencia *indicada*. Y 2 es la diferencia *efectuada*, porque este número 2, sumado con el substraendo 6, produce el minuendo 8. Escribiremos, pues:

$$8 - 6 = 2$$

Con la condición impuesta de ser $a > b$, la diferencia $a - b$ es realizable, y expresa un número *único*, porque si se fuesen sumando a b los números 1, 2, 3..., se iría obteniendo una sola vez cada uno de los números mayores que b; y, por tanto, se obtendría una vez el número a. Si para ello hay que sumar b con el número d, éste será la diferencia entre a y b, y se escribirá:

$$a - b = d$$

Esta igualdad tiene igual significado que la

$$a = b + d$$

y ésta expresa que: *el minuendo es igual al substraendo más la diferencia.*

52. Si $a = b$, la diferencia $a - b$ es cero; porque $b + 0 = b$ es en este caso igual a a.

También se tiene $a - 0 = a$, porque $a + + 0 = a$.

53. Si $a < b$, la diferencia $a - b$ es imposible en el campo de los números naturales 0, 1, 2...; porque ninguno de éstos, sumado con b, puede dar a.

54. **División.—Dividir** *un número, llamado* **dividendo,** *por otro, llamado* **divisor,** *es hallar un tercero, denominado* **cociente,** *que multiplicado por el divisor produzca el dividendo.*

El signo consiste en dos puntos **:**, colocados entre el dividendo y el divisor, que son los *datos* de la operación, o también en una rayita, sobre la cual se escribe el dividendo, y debajo el divisor.

Así, 8 : 4, o bien $\frac{8}{4}$, son divisiones o cocientes *indicados*. El cociente efectuado es 2, porque este número, multiplicado por el divisor 4, produce el dividendo 8. Escribiremos, pues:

$$8 : 4 = 2, \text{ o también } \frac{8}{4} = 2$$

En la segunda forma suele leerse: 8 *partido* (en vez de dividido) por 4.

La división no siempre es posible en números enteros. Porque al multiplicar el divisor por la serie 0, 1, 2, 3..., no se obtienen todos los números enteros, sino sólo los *múltiplos* del divisor. Si, pues, el dividendo no fuese múltiplo del divisor, no habría ningún número que multiplicado por éste diese aquél, y la división sería imposible.

Cuando la división es realizable, se dice también que es *exacta*. Entonces el dividendo es *múltiplo* del divisor o *divisible* por él. El divisor se llama por su propio nombre, *divisor*, y también *factor* del dividendo. Son, pues, sinónimas las expresiones: número *múltiplo* de otro, y número *divisible* por ese otro; y este segundo número es *divisor* o *factor* de *aquél*. También se dice que le *divide*.

Ejemplos: La división 20 : 5 es exacta. 20 es múltiplo de 5, y 5, divisor de 20. O bien: 20 es divisible por 5, y 5 divide a 20 o es factor suyo.

(Pónganse muchos ejemplos para adquirir fijeza en el uso de estas denominaciones).

Cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, la división sólo puede, con números enteros, realizarse parcialmente, resolviendo el siguiente problema:

Averiguar el mayor número (cociente) que, multiplicado por el divisor, da un producto contenido en el dividendo, y la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente. Esta diferencia se llama *resto.*

Cuando se resuelve este problema se dice que se hace una división *inexacta.*

Si D es el dividendo, d el divisor, c el cociente, y r el resto, se tiene:

$$r = D - d \cdot c$$

que es la fórmula del resto.

Se ve fácilmente que el cociente y el resto son *únicos.*

55. **Radicación.—Extraer la raíz de índice** n *de un número* a, *llamado* **radicando,** *es hallar otro número* r, *llamado* **raíz,** *que elevado a la potencia enésima produzca el radicando.*

Se indica la raíz de índice n del número a, mediante el signo $\sqrt[n]{a}$ (se lee: raíz enésima de a). Si r es la raíz, tiene que verificarse que $r^n = a$. De modo que la igualdad

$$\sqrt[n]{a} = r$$

equivale a la

$$r^n = a$$

Cuando el índice es 2 no se escribe, y la raíz se llama *cuadrada.*

Así, la $\sqrt{25}$ (raíz cuadrada de 25) es 5, porque $5^2 = 25$.

La radicación no es siempre posible en números naturales. Refiriéndonos, como ejemplo, a la raíz cuadrada, observaremos que formando los cuadrados de los números

$$0, 1, 2, 3, 4...$$

se obtienen los *cuadrados perfectos*

$$0, 1, 4, 9, 16...$$

pero no otros números. De modo que, si el radicando es, p. ej., 15, que no es cuadrado perfecto, la operación es imposible.

Se puede, no obstante, realizar en parte, resolviendo el siguiente problema:

Averiguar el mayor número (raíz), *cuyo cuadrado* **esté contenido** *en el radicando, y la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz.* Esta diferencia se llama *resto.*

Ejemplo: La $\sqrt{15}$ se dice que es 3, porque 3 es el mayor número cuyo cuadrado, 9, está contenido en 15. El resto sería $15 - 9 = 6$.

En general, siendo a la raíz cuadrada de N y r, el resto ha de ser

$$r = N - a^2$$

La raíz y el resto son únicos.

56. **Logaritmación.**—La *radicación* es, como se ha visto, inversa de la *potenciación*, puesto que el radicando puede considerarse como una potencia de exponente conocido (que es el índice), y cuya base (la raíz) es lo que quiere averiguarse.

En la *logaritmación* se pretende hallar el *exponente* de una potencia conociendo la base y un número igual a dicha potencia. El exponente se llama *logaritmo.* Así: hallar el logaritmo de un número b, en el sistema de base a, es buscar el número x, tal que

$$a^x = b.$$

De esta operación no diremos más en este libro.

57. **Observaciones generales.**—Bien sabido lo que precede, se advertirá que las operaciones inversas, cuando son realizables exactamente, tienen todas el siguiente objeto: *Dado un número que se supone ser el resultado de hacer una operación directa con otros dos números, y conociendo uno de éstos hallar el otro.*

Por eso, abreviadamente, se dice:

La substracción tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (minuendo) y uno de ellos (substraendo), hallar el otro (diferencia).

La división tiene por objeto: dado un producto de dos factores (dividendo) y uno de ellos (divisor), hallar el otro (cociente).

La radicación tiene por objeto: dada una potencia (radicando) y su exponente (índice) hallar la base (raíz).

La logaritmación tiene por objeto: dada una potencia (número) y su base (base logarítmica) hallar el exponente (logaritmo).

Ejemplos: 1.° Si 9 es una suma y 4 uno de los sumandos, el otro es $9 - 4$.

2.° Si 20 es un producto y 5 uno de los factores, el otro es $20 : 5$.

3.° Si 125 es una potencia y 3, el exponente, la base sería $\sqrt[3]{125}$.

4.° Si 125 es una potencia y 5 la base, el exponente sería el logaritmo de 125 (en base 5).

Mas en general:

$$\text{Si } a + x = b, \text{ será } x = b - a$$

$$\text{Si } a \,.\, x = b, \text{ será } x = \frac{b}{a} \ (\text{o } b : a)$$

$$\text{Si } x^m = b, \text{ será } x = \sqrt[m]{b}$$

58. Las igualdades anteriores en que hay un número x desconocido se llaman *ecuaciones*; el número x debiera llamarse *incógnito*, pero por venir representado por una letra, lo llamaremos *incógnita*.* *Resolver* la ecuación, o *despejar* la *incógnita* es determinar a quién es igual ésta. La primera ecuación se resuelve, pues, restando (de b, a) la segunda, dividiendo (b por a), etc.

El estudio de las ecuaciones corresponde al Algebra. Aquí sólo resolvemos las ecuaciones anteriores o algunas que resultan fácilmente de ellas.

Para eso nos fijamos en que un número que está en un miembro de la igualdad puede quitarse de él y *pasarlo al otro miembro* como *substraendo*, si era *sumando*; como *divisor*, si era *factor*; como *índice* de raiz, si era *exponente*; y viceversa.

Con esta observación y procediendo por pasos sucesivos, puede despejarse la incógnita en ecuaciones muy sencillas.

Ejemplo: para despejar x en la ecuación

$$2 + \frac{3 \,.\, x}{5} = 8$$

(*) Para habituarnos a la nomenclatura del Algebra.

pasamos el *sumando* 2 del primer miembro al segundo, y sale

$$\frac{3 \,.\, x}{5} = 8 - 2, \text{ es decir, } \frac{3 \,.\, x}{5} = 6$$

Ahora pasamos el *divisor* 5 del primer miembro al segundo (como factor) y obtenemos

$$3 \,.\, x = 6 \,.\, 5 \text{ o sea } 3 \,.\, x = 30$$

y, finalmente, resolvemos esta ecuación escribiendo

$$x = \frac{30}{3} = 10.$$

Este número 10 puesto en lugar de x en la ecuación dada, hace cierta la igualdad, convirtiéndola en otra evidente, que se llama *identidad*.

$$2 + \frac{3 \,.\, 10}{5} = 8 \text{ se convierte en } 2 + 6 = 8$$

que es una identidad.

La ecuación $A = \pi \,.\, r^2$ nos da primero

$$r^2 = \frac{A}{\pi} \text{ y en seguida } r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

NUMERACIÓN DECIMAL

Práctica de la adición y la multiplicación

59. **Fundamento del sistema de numeración.**—Como suponemos conocidas prácticamente la numeración y las operaciones sencillas, nos limitamos a exponer los fundamentos generales.

Los sistemas de numeración reposan, esencialmente, en la consideración de un grupo de unidades simples como conjunto provisionalmente indivisible, al cual se le llama *unidad colectiva* de primer orden, y en formar otras unidades colectivas de diversos órdenes, pero de modo que cada una se forme repitiendo la anterior igual número de veces que el de unidades simples que constituyen la primera unidad colectiva; número que, por ser muy importante, se llama *base* del sistema de numeración.

El sistema *decimal* que usamos tiene por base el número *diez*, y sus unidades colectivas son, como sabemos, la decena, centena, millar, etc.

Resulta de lo dicho que

10 veces 1 forman una *decena* = 10
10 veces 10 forman una *centena* = 100
10 veces 100 forman un *millar* = 1000

y como

$$10 = 10^1$$
$$100 = 10^2$$
$$1000 = 10^3 \text{ etc.,}$$

se ve que: *Todá unidad colectiva es una potencia de la base* 10, *cuyo exponente viene expresado por el orden de aquella unidad colectiva.*

La unidad colectiva de orden n será, pues, 10^n

De lo que se sabe acerca de la multiplicación de potencias de igual base (46) resulta

Una decena $\times$ una unidad = una decena
Una decena $\times$ una decena = una centena
Una centena $\times$ una decena = un millar, etc.

O en general: La unidad de orden m por la de orden n es una unidad de orden $m + n$. (Porque $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$).

60. *Para multiplicar la unidad seguida de ceros por un número, o viceversa, basta escribir a la derecha del número tantos ceros como los que seguían a la unidad.*

Ejemplos:

1.º $1000 \times 7 = 7000$
2.º $7 \times 1000 = 7000$

El segundo ejemplo sale del primero por la propiedad conmutativa; luego sólo hay que demostrar el primero.

Pero según la definición de multiplicar, $1000 \times \times 7$ es lo mismo que 7 veces mil, es decir, que 7000.

61. El principio general de la numeración es que todo número consta de una colección de unidades de diversos órdenes, siendo las de cada orden en número inferior a 10.

Ejemplo: $7543 = 7$ millares $+ 5$ centenas $+ + 4$ decenas $+ 3$ unidades.

Según las observaciones anteriores puede escribirse:

$$7543 = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3.$$

En general, siendo *d*, *c*, *b*, *a* las cifras de un número N tomadas de izquierda a derecha

$$N = dcba = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a.$$

El número que conste de *d* decenas y *u* unidades será, por tanto, $d \cdot 10 + u$.

62. **Fundamento de la regla de sumar.**— Como sabemos, al sumar varios números sumamos sus unidades; luego, sus decenas, etc., agregando a las unidades de un orden las que de ese mismo orden resulten en la suma inmediata anterior.

El fundamento de esta regla es, pues, la propiedad *asociativa* de la suma, aplicada directa o inversamente.

63. **Fundamento de las reglas de multiplicar.**—Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una aplicamos la propiedad *distributiva*, porque procedemos como si el multiplicando fuese una suma de unidades de diversos órdenes.

Ejemplo: 457×3 equivale a

(7 unidades + 5 decenas + 4 centenas), $\times$ 3

y por eso hacemos los productos parciales 7×3, 5×3 (considerándolo como decenas), y 4×3 (considerándolo como centenas).

Al multiplicar dos números de varias cifras aplicamos también la propiedad *distributiva*, porque procedemos como si *el multiplicador* fuese una suma de unidades de diversos órdenes.

Ejemplo: 245×647 equivale a

$$245 \times (7 \text{ unidades} + 4 \text{ decenas} + 6 \text{ centenas})$$

y por eso hacemos los productos parciales 245×7, 245×4 (que se corre un lugar para que represente decenas), 245×6 (en el lugar de las centenas). Como la materia es conocida para el alumno, no hacen falta más explicaciones.

SUBSTRACCIÓN

Nuevas propiedades

64. Dadas las primeras definiciones (que deben recordarse), y sabido que la diferencia $a - b$ (siendo $a \gtreqless b$) es un número único, c, tal que $b + c = a$, vamos a estudiar más detalladamente esta operación, comenzando por el siguiente importante teorema:

Si al minuendo y al substraendo de una diferencia se les suma un mismo número, la diferencia permanece invariable.

Quiere decirse que si

$$a - b = c$$

también

$$(a + n) - (b + n) = c. \quad \text{(I)}$$

Para probar la certeza de esta igualdad, podemos fijarnos en los conjuntos de objetos, y observar que, si de un conjunto de a objetos quitamos b de éstos y quedan c, cuando a aquel conjunto le agreguemos n objetos resultará otro con $a + n$ objetos, y si de éste quitamos los b objetos que quitábamos antes, y los n que habíamos agregado (esto es, $b + n$), quedarán los mismos c.

Pero es preferible razonar de otro modo. La igualdad

$$(a+n)-(b+n)=c \quad \text{(I)}$$

equivale, por la definición, a la

$$c+(b+n)=a+n \quad \text{(II)}$$

Pero, por haberse supuesto que $a-b=c$, será:

$$c+b=a$$

y sumando n a los dos miembros

$$c+b+n=a+n$$

que es la misma igualdad (II), equivalente a la (I), que queríamos demostrar.

65. En la propiedad anterior nos fundamos para resolver la única dificultad que puede presentarse al restar dos números de varias cifras, a saber: que una cifra del minuendo sea menor que la correspondiente del substraendo, como ocurre en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r} 43 \\ -\ 28 \\ \hline 15 \end{array}$$

Al minuendo le agregamos 10 unidades, y decimos: de 8 a 13, 5. Al substraendo le agregamos 1 decena y decimos: de 3 a 4, 1. Como 10 = una decena, hemos sumado el mismo número al minuendo y al substraendo, y la diferencia obtenida será la verdadera.

Diferencias desiguales.—Se tiene:

$$\begin{array}{c} a>b \\ c=d \\ \hline a-c>b-d \end{array} \quad « \quad \begin{array}{c} a=b \\ c>d \\ \hline a-c<b-d \end{array} \quad « \quad \begin{array}{c} a=b \\ c<d \\ \hline a-c>b-d \end{array}$$

Se puede considerar como evidente, refiriéndose a conjuntos de objetos, que si de dos conconjuntos quitamos igual número de objetos, quedará con más aquel que más tuviera, y esto prueba la primera desigualdad; que si dos conjuntos tienen igual número de objetos, aquel de quien quitemos más quedará con menos, y viceversa, lo que justifica las otras dos desigualdades.

Pero más rigurosamente se razona acordándose de lo dicho en la suma. (26). Por ejemplo: para la desigualdad segunda diríamos: $a - c$ será *menor* que $b - d$, porque si fuese $a - c \gtreqless b - d$ sumando esta desigualdad con la $c > d$ resultaría $a > b$, contra nuestro supuesto de ser $a = b$.

66. **Sumas y restas.**=La operación más general que podemos hacer sumando o restando es la serie de sumas y restas, tal como

$$a + b - c - d + f \text{ etc.}$$

Suponiendo que todas las restas que hay que efectuar sean posibles, convendremos en que la operación se efectúe sucesivamente, esto es, ejecutándola con los dos primeros términos, luego con el resultado y el tercero, etc.

Examinaremos primero el caso de que sólo haya tres términos: se presentarán las siguientes combinaciones de signos:

$$\begin{gathered} a + b + c \\ a + b - c \\ a - b + c \\ a - b - c \end{gathered}$$

En el primer caso sabemos realizar la operación, puesto que es una suma; y en el segundo también, porque equivale a $(a + b) - c$, que es una diferencia.

El tercero equivale a $(a - b) + c$, es decir, que se presenta en él la operación *nueva* de sumar *una diferencia* con *un número*; y el cuarto caso conduce a la operación $(a - b) - c$ de restar *de una diferencia un número*. Debemos, pues, aprender a efectuar estas dos operaciones nuevas, lo que se consigue con las reglas que siguen :

67. *Para sumar una diferencia con un número, se suma el minuendo con el número, y del resultado se resta el substraendo.*

Ejemplos :

$$(7 - 5) + 3 = 10 - 5; \quad (a - b) + c = (a + c) - b. \quad \text{(I)}$$

Acudiendo a los conjuntos de objetos, la igualdad (I) nos dice, que si de un conjunto de a objetos quitamos b de ellos, y agregamos luego c objetos nuevos, obtenemos el mismo resultado que si a los a objetos primitivos les agregamos los c nuevos y del conjunto quitamos los mismos b objetos que quitábamos antes. (En el fondo esto equivale a considerar como evidente que igual da *quitar* primero y *agregar* después, que agregar primero y quitar después *los mismos objetos*).

Pero la igualdad (I) puede probarse acudiendo a la definición de la substracción. Según ella, para que el primer miembro de la igualdad sea el resultado de la diferencia indicada en el segundo, basta que sumando dicho primer miembro con b resulte $(a + c)$. Y así ocurre, en efecto, porque

$$(a - b) + c + b \quad (2)$$

es una suma en que podemos asociar los sumandos

$(a - b)$ y b, y como $(a - b)$ es una diferencia, y b su substraendo, al sumar ambos números se obtendrá a, y la suma (2) se convertirá en $(a + c)$, como queríamos demostrar.

68. *Para restar de una diferencia un número, se resta del minuendo la suma del substraendo con el número.*

Ejemplos :

$(8 - 5) - 2 = 8 - 7$; $(a - b) - c = a - (b + c)$ (II).

La igualdad (II) se justifica, si se emplean conjuntos de objetos, observando que, si de un conjunto de a objetos quitamos primero b de ellos y luego c de los que quedan, llegamos a igual resultado que si del conjunto primitivo hubiésemos quitado de una sola vez los $(b + c)$ objetos que en dos veces quitamos antes.

Pero también podemos justificar la igualdad (II) viendo que si al minuendo y al substraendo de la primera diferencia

$$(a - b) - c,$$

les sumamos el número b, se obtiene el segundo miembro de la igualdad.

69. Sabemos, por lo que antecede, ejecutar cualquiera de las cuatro operaciones de tres términos mencionadas en el número (66) y vemos que, salvo la primera, que es sólo una suma, todas las demás quedan reducidas a una diferencia única, reemplazando los dos sumandos o los dos substraendos por su suma efectuada. Esto es general, es decir que :

70. *Toda serie de sumas y restas* (posibles) *equivale a una diferencia entre la suma de los*

sumandos o términos aditivos, y la de los substraendos o términos substractivos.

En efecto: Si la operación comienza por varios sumandos podremos reemplazar éstos por su suma, que será un sólo número. Hecho esto, y considerando la operación que se presente con los tres primeros términos, sea la que quiera, siempre quedará, como hemos visto, reducida a una diferencia, que al sumarle o restarle el cuarto término dará otra diferencia, etc., por lo que el resultado final será una diferencia.

Comprobémoslo con un ejemplo. Sea la operación

$$2 + 3 - 1 + 6 - 2 - 3 + 4 - 7$$

Poniendo en vez de $2 + 3$ su suma, 5, queda

$$5 - 1 + 6 - 2 - 3 + 4 - 7$$

La operación con los tres primeros términos es

$$(5 - 1) + 6$$

que por la regla (67) se convierte en la diferencia

$$(5 + 6) - 1$$

A esta diferencia hay que restarle el 4.º término, 2, y según la regla (68) esto nos da otra diferencia, la

$$(5 + 6) - (1 + 2)$$

A ésta hay que restarle el término 3, lo que por la misma regla nos daría

$$(5 + 6) - (1 + 2 + 3)$$

Ahora hay que sumar el término 4, aplicando la regla (67), lo que conduce a

$$(5 + 6 + 4) - (1 + 2 + 3)$$

Y, finalmente, para restar ahora 7, según (68), escribimos

$$(5+6+4)-(1+2+3+7)$$

Con lo que se ve, como decíamos, que resulta una diferencia que tiene por minuendo la suma de todos los términos aditivos, y por substraendo la suma de todos los términos substractivos.

71. *Consecuencia importante.*—El orden en que se ejecuten las operaciones de suma o resta, *siempre que todas ellas sean posibles*, no influye en el resultado final; puesto que éste es siempre la diferencia única entre la suma de los términos aditivos y la de los substractivos.

72. Conviene que, además de las reglas de los números 67 y 68 que nos enseñan a sumar un número a una diferencia o restarlo de ella, sepamos también restar de un número una diferencia. Para lo cual empleamos la regla siguiente:

Para restar de un número una diferencia se suma el número con el substraendo, y del resultado se resta el minuendo.

Ejemplo:

$$10-(8-4)=14-8; \quad 6-(9-5)=11-9;$$

$$a-(b-c)=a+c-b \quad \text{(III)}$$

La igualdad (III) puede justificarse acudiendo a los conjuntos de objetos; pero es preferible observar que si al minuendo a y al substraendo $(b-c)$ del primer miembro, se les suma el mismo número c, se obtiene el segundo miembro, lo que prueba la igualdad.

73. **Multiplicación de diferencias.**—Vimos (31) cómo se multiplicaba una suma por un número. Análogas son las reglas que siguen:

Para multiplicar una diferencia por un número se multiplican sus dos términos (minuendo y substraendo) *por el número, y se resta el* **producto en que entra el substraendo**.

Ejemplos :

$(7-5) . 3 = 21 - 15$ « $(a - b) . c = a . c - b . c$

Porque

$$(a-b) . c = \overbrace{(a-b) + (a-b) + (a-b) + \ldots}^{c \text{ veces}} =$$

$$= \overbrace{(a + a + a \ldots)}^{c \text{ veces}} - \overbrace{(b + b + b \ldots)}^{c \text{ veces}} = (a . c - b . c)$$

Por la propiedad conmutativa

$$c . (a - b) = c . a - c . b.$$

74. *Para multiplicar dos diferencias se procede como si una de ellas estuviese efectuada, es decir, como si fuese un solo número.*

Ejemplos :

$$(a - b) . (c - d) = (a - b) c - (a - b) . d = (a . c - b . c) - (a . d - b . d).$$

y aplicando ahora la regla para restar una diferencia (72) el resultado final puede escribirse

$$a . c - b . c - a \; d + b . d$$

De aquí la regla siguiente, que da directamente este resultado final : *Para multiplicar dos diferencias se multiplican los términos de la primera por el primer término de la segunda; luego otra vez los términos de la primera por el segundo término de la segunda. Los productos se suman, excepto aquellos en que entre* **un solo substraendo,** *los cuales se restan.*

Obsérvese que el último producto, en que han entrado *dos* substraendos, se ha sumado.

75. **Casos particulares.**—*Cuadrado de una diferencia.*—La regla anterior enseña que

$$(a-b)^2=(a-b).(a-b)=a^2-b.a-a.b+$$
$$+b^2=a^2-2.a.b+b^2.$$

(Compárese este cuadrado de la diferencia $(a-b)$ con el cuadrado de la suma $(a+b)$ hallado antes (49).

Producto de una suma por una diferencia. Se efectúa análogamente:

$$(a+b).(a-b)=a^2+b.a-a.b-b^2=a^2-b^2. \quad (1)$$

o bien: *el producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de sus cuadrados.*

Diferencia de cuadrados.—Es el caso inverso del anterior, que se enuncia: *la diferencia de los cuadrados de dos números* (a y b) *es igual al producto de la suma de las bases* (a + b) *por la diferencia de esas mismas bases* (a — b).

Porque invirtiendo la igualdad (1) se obtiene

$$a^2-b^2=(a+b).(a-b).$$

DIVISIÓN

Nuevas propiedades y reglas

76. **Nuevas definiciones.**— Además de la definición dada en el número (54) conviene conocer otras dos de carácter práctico, útiles, por tanto, para la resolución de problemas.

(a *La división tiene por objeto hacer de un número* (el dividendo) *tantas partes iguales* (al cociente) *como unidades tiene otro número* (el divisor).

En efecto: El *producto* tiene tantas partes iguales al *multiplicando* como unidades tiene el *multiplicador*.

Pero en la división podemos decir:

en vez de *producto* — *dividendo*
en vez de *multiplicando* — *cociente*
en vez de *multiplicador* — *divisor*,

luego: el *dividendo* tiene tantas partes iguales al *cociente* como unidades tiene el *divisor*; que es lo que expresa la definición dada.

(b *La división tiene por objeto averiguar las veces que un número* (el dividendo) *contiene a otro* (el divisor).

El número de veces dicho es el cociente.

En efecto: Tomando como multiplicador el cociente podíamos decir:

en vez de *producto*. . . . . *dividendo*
en vez de *multiplicando*. . *divisor*
en vez de *multiplicador*. . *cociente*.

y como el producto contiene al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, el dividendo contiene al divisor tantas veces como unidades tiene el cociente.

77. **Fórmula del resto.**—Ya dijimos (54) que siendo D el dividendo, d el divisor, c el cociente y r el resto, se verificaba

$$r = D - d \cdot c$$

que es lo que llamamos *fórmula del resto*.

78. **Fórmula del dividendo.**—*El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto.*

Es decir que la *fórmula del dividendo* es

$$D = d \cdot c + r$$

Esta fórmula se saca de la del resto *despejando* D. Para ello, pasamos $d \cdot c$ al primer miembro y sale

$$r + d \cdot c = D$$

que, invirtiendo la igualdad, da la fórmula anterior.

Recíproco—Siempre que un número, D, sea igual al producto de otros dos $d \cdot c$ más otro número r **menor** que d, al dividir D por d resultará de cociente c y de resto r.

En otros términos: si se verifica la igualdad

$$D = d \cdot c + r \text{ (siendo } r < d\text{)} \quad (I)$$

serán c el cociente y r el resto de la división $D : d$.

En efecto: si aumentamos el segundo miembro poniendo en vez del número r el d, que es mayor, saldrá

$$D < d \, . \, c + d$$

y esto enseña que el número d está contenido c veces en D, pero no una vez más; luego el cociente es c; y el resto tiene que ser la diferencia entre D y $d \, . \, c$, que es precisamente r, puesto que según (1) r es el número que sumado con $d \, . \, c$ nos da D.

Ejemplos:

Si sabemos que $1743 = 23 \, . \, 75 + 18$

por ser $18 < 23$ sabemos, sin necesidad de hacer la división, que al dividir 1743 por 23 saldrá de cociente 75 y de resto 18.

2.° Si encontramos la igualdad

$$a = b \, . \, 5 + 3$$

y sabemos que 3 debe ser menor que el número que representa la letra b, podemos afirmar que dividiendo a por b el cociente será 5 y el resto 3.

79. *Si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente permanece el mismo, pero el resto queda multiplicado por el número.*

Tomemos la fórmula del dividendo

$$D = d \, . \, c + r \quad (r < d).$$

Multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por n, teniendo en cuenta, para multiplicar el segundo, la regla de multiplicar una suma por un número (31), con lo que saldrá:

$$D \cdot n = d \cdot c \cdot n + r \cdot n$$

Como $r < d$ se sabe que $r \cdot n < d \cdot n$ (39) y, asociando factores, puede escribirse:

$$(D \cdot n) = (d \cdot n) \cdot c + r \cdot n \text{ (siendo } r \cdot n < d \cdot n).$$

Lo cual nos dice, según el *recíproco* del número anterior, que al dividir $(D \cdot n)$ por $(d \cdot n)$ el cociente será el de antes, c, pero el resto será $r \cdot n$, que es lo que queríamos demostrar.

80. *Para dividir un producto por uno de sus factores se suprime éste y se toma como cociente el producto de los demás factores.*

Ejemplos:

$$(4 \cdot 7 \cdot 5) : 5 = 4 \cdot 7 \text{ , } (a \cdot b \cdot c) : b = a \cdot c.$$

En el segundo ejemplo, v. g.: hay que demostrar que $a \cdot c$ es el cociente. Lo será si multiplicado por el divisor b produce el dividendo. Y así es, porque

$$a \cdot c \cdot b = a \cdot b \cdot c$$

81. *Para dividir un producto por un número, que sea divisor de uno de los factores, se divide este factor por el número, y el resultado se multiplica por los otros factores.*

Ejemplos:

$$(7 \cdot 20 \cdot 6) : 5 = (20 : 5) \cdot 7 \cdot 6 = 4 \cdot 7 \cdot 6$$

$$(a \cdot b \cdot c) : n = (a : n) \cdot b \cdot c$$

(siendo exacta la división $a : n$).

Hay que probar que $(a : n) . b . c$ es el cociente. Lo será si multiplicado por el divisor n produce el dividendo. Y así es, porque como el cociente $(a : n)$ asociado con el factor n daría a,

$$(a : n) . b . c . n = [(a : n) . n] . b . c = a . b . c$$

Para dividir dos potencias, de la misma base, se forma otra de igual base cuyo exponente sea la diferencia de los exponente.

Ejemplos:

$$2^7 : 2^3 = 2^4 \quad \text{»} \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

porque

$$a^{m-n} . a^n = a^m \quad (46)^*$$

82. *Para dividir una suma por un número se divide el primer sumando, el resto se agrega al segundo sumando y esta suma se divide por el número, etc. El cociente total es la suma de los cocientes parciales, y el resto el de la última división hecha.*

Ejemplo: $(17 + 24) : 5$. Hacemos la división de 17 por 5, que da de cociente 3, y de resto 2. Este resto lo asociamos con 24, y la suma 26 la dividimos por 5, obteniendo el cociente 5, y el resto 1.

Decimos que el cociente total es $3 + 5 = 8$, y el resto, 1.

Para demostrarlo aplicamos la fórmula del dividendo a la primera división, y da

$$17 = 5 . 3 + 2$$

(*) Esto está de acuerdo con el convenio de que $a^o = 1$. Porque si dividimos dos potencias iguales, $a^m : a^m = 1$. Pero, por otra parte, la regla anterior conduciría al resultado $a^m : a^m = a^{m-m} = a^o$

Sustituímos el sumando 17 por su igual, y la suma dada $(17 + 24)$ se convierte en

$$5 \,.\, 3 + 2 + 24 = 5 \,.\, 3 + 26 \quad (1)$$

La fórmula del dividendo en la segunda división practicada nos daría

$$26 = 5 \,.\, 5 + 1$$

Sustituímos 26 por su igual en (1) y saldrá

$$5 \,.\, 3 + 5 \,.\, 5 + 1$$

Sacamos el factor común 5, y resulta, en fin,

$$17 + 24 = 5 \,.\, (3 + 5) + 1$$

Y como sabemos que $1 < 5$, según el recíproco del número (78), podemos afirmar que al dividir la suma $17 + 24$ por 5, el cociente será $3 + 5$, y el resto, 1.

Consecuencias.—Si todos los sumandos de una suma son divisibles por un número, la suma también lo es. (Compárese con el número en que se enunciaba lo mismo en otra forma), (42, al final.)

Porque al aplicar la regla anterior, los restos parciales, y por tanto el resto final, son iguales a cero. Obsérvese que esta condición *suficiente* no es *necesaria*, es decir, que la suma puede ser divisible por un número sin que lo sean forzosamente los sumandos. Así ocurre cuando la suma de los restos que dan los sumandos es un múltiplo del divisor.

Observación.—Sobre la división de una diferencia por un número, se hablará más adelante.

83. **Reglas para dividir** —*Para hallar el*

número de cifras que ha de tener el cociente se le añaden al divisor uno, dos, tres, etc., ceros, hasta formar un número mayor que el dividendo. El número de ceros estrictamente necesarios para ello es el número de cifras del cociente.

Ejemplo: El cociente de la división

$$824257 : 428$$

tendrá cuatro cifras, porque es preciso añadir cuatro ceros a la derecha del divisor para formar un número mayor que el dividendo (compruébese)

En efecto:

el dividendo es mayor que $428000 = 428 \times 1000$;

luego el cociente por lo menos es 1000; pero el dividendo es menor que 428×10000, luego el cociente no llega a 10000. Dicho cociente tendrá, pues, 4 cifras.

84. **Casos de la división.**—1.º Si el divisor y el cociente tienen una sola cifra, se busca ésta por tanteo mental hasta hallar el número que multiplicado por el divisor da el producto más próximo inferior al dividendo.

85. **Segundo caso.**—*Que el divisor tenga varias cifras y el cociente haya de tener una sola.* —**Regla**—*Se separan de la izquierda del dividendo cifras bastantes** *para contener a la primera de la izquierda del divisor y se divide por ésta el número que forman aquéllas. El cociente obtenido en esta división auxiliar puede ser mayor que el de la división propuesta, y se comprueba mul-*

(*) Una o dos, según los casos.

tiplicándolo por el divisor: si el producto puede restarse del dividendo, la cifra comprobada es el verdadero cociente; en caso contrario, se rebaja en 1 y vuelve a comprobarse.

La operación se indica reemplazando los puntos : por dos rectas perpendiculares que forman la *caja* de la división como se ve al margen.

$$2874 \,\big|\, \underline{652} \quad (a)$$

Como $2 < 6$ separaremos, en este ejemplo, dos cifras de la izquierda del dividendo, y el número 28 que ellas forman se dividirá por 6. Esta división *auxiliar*, 28 : 6, da por cociente 4, y vamos a ver que este número es igual o mayor que el verdadero cociente de la división *(a)*.

En efecto: como 5×6 **excede** a 28, también 5 por 6 *centenas* (que son las del divisor) excederá a 28 *centenas* **en alguna centena,** luego asímismo excederá al dividendo 2874, porque este se compone de 28 centenas y las 74 unidades, que no llegan a una centena. Luego si 5 por **una parte** del divisor (sus 6 centenas) excede al dividendo, también 5 por *todo* el divisor excederá al dividendo; de modo que el cociente de *(a)* no llegará a 5, y será 4 o menor que 4.

Para salir de esta duda multiplicamos 4 por el divisor y vemos si el producto puede restarse del dividendo.

86. Esta comprobación debe hacerse por la siguiente

Regla.—Se multiplica la cifra ensayada por la primera de la izquierda del divisor, y el producto se resta de las unidades del mismo orden del dividendo; si la substracción no puede realizarse la cifra comprobada es excesiva, y habrá que rebajarla en 1; pero si esta primera substracción fuese posible, se multiplica la cifra que se ensaya por la siguiente del divisor y se resta del número que forman el resto obtenido en la primera substracción parcial y la siguiente cifra del dividendo, y se continúa así hasta obtener como resto de una de estas substracciones parciales una cifra igual o mayor que la que se comprueba, pues en cuanto así ocurra la cifra comprobada será el verdadero cociente.

En el ejemplo anterior comprobaremos la cifra 4 diciendo: 4×6 centenas $= 24$ centenas, restadas de las 28 del divisor se obtiene ya una diferencia 4, *igual* a la cifra ensayada: ésta será la pedida, porque multiplicada por *todo* el divisor dará un producto contenido en *todo* el dividendo. Para ver que es así, elijamos un caso extremo, en que el dividendo sea lo menor posible y el divisor lo mayor posible; caso el más desfavorable para nuestro intento: tal ocurriría si el dividendo fuese 2800 y el divisor 699. Pero aun en este caso, como $28 = 4 \cdot 6 + 4 = 4 \cdot 7$, las 28 centenas del dividendo serían iguales a 4×7 centenas, y como el divisor no llega a 7 centenas, su producto por 4 podrá restarse del dividendo. En el caso del ejemplo primero, 2874 : 652, se verifica lo mismo, pues ahora el dividendo es mayor que 28 centenas, y el divisor permanece menor que 7 centenas. Es, pues, cierto lo que afirmábamos.*

87. Hallada la verdadera cifra del cociente,

(*) Claro que si el resto de la primera substracción parcial fuese *mayor* que la cifra ensayada, 4, como ocurriría en el ejemplo 2974 : 652, la substracción total $2974 - 652 \times 4$ seguiría siendo posible.

se multiplica, como de ordinario, por el divisor, y al mismo tiempo que se hace este producto se va restando del dividendo para hallar el resto final de la división, como al margen se expresa. La *prueba* consiste en ver que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto.

2874	652
266	4

88. **Tercer caso.**—*Que el divisor y el cociente hayan de tener varias cifras.* **Regla.** *De la izquierda del dividendo se separan las cifras estrictamente necesarias para formar un número que contenga al divisor.** *Se considera el dividendo como una suma, cuyo primer sumando sea el valor relativo del número separado, y los demás el de cada una de las cifras siguientes, y se aplica la regla para dividir esta suma por el divisor.* (82)

Ejemplo: En la división 753346 : 346 separamos en el dividendo tres cifras que forman el número 753, mayor que 346. Consideramos el dividendo como si fuese la suma

753 millares + 3 centenas + 4 decenas + 6 unidades,

y dividimos esta suma por 346; para lo cual dividimos el primer sumando, 753 millares, lo que da de cociente 2 millares, y de resto 61 millares.

Este resto hay que asociarlo con el sumando siguiente, 3 centenas, para lo cual basta escribir

(*) Según los casos, serán precisas tantas cifras como tiene el divisor o una más.

la cifra 3 a la derecha del resto 61, pues 613 centenas es, en efecto, igual a 61 millares + 3 centenas.

$$\begin{array}{l|l} 753346 & 346 \\ \cline{2-2} 613 & 2177 \\ 2674 & \\ \ \ 2526 & \\ \ \ \ \ 104 & \end{array}$$

Ahora dividiríamos nuevamente 613 por 346, etc.

Todo lo cual se hace como al margen se expresa. (*)

89. **Cuarto caso.**—*Que el divisor termine en ceros.*—**Regla.**—Se prescinde de los ceros en que termina el divisor, y de igual número de cifras tomadas de derecha a izquierda en el dividendo, y se dividen los números resultantes. Así se obtiene el verdadero cociente, pero el resto total se forma escribiendo a la derecha del que produzca la división practicada las cifras de que se había prescindido en el dividendo.

Ejemplo: 275'43 : 400. Hacemos la división de 275 por 4. El cociente de ésta, 68, lo es también de la primera, pero el resto se forma con el resto 3 de la división 275 : 4 y las cifras separadas en el dividendo; dicho resto es, pues, 343.

Para demostrarlo acudimos a la fórmula del dividendo que para la división 275 : 4 nos da

$$275 = 4 \times 68 + 3 \quad (3 < 4)$$

Multiplicando el dividendo y el divisor por 100, sabemos que el cociente es el mismo, pero el resto viene multiplicado por 100 (79), luego

$$27500 = 400 \times 68 + 300 \quad (300 < 400)$$

(*) Se suprimen ciertos detalles por suponerse que el alumno sabía ya de antemano, *practicar* la operación.

Sumando a los dos miembros 43,

$$27543 = 400 \times 68 + 343 \quad (343 < 400)$$

Y, ahora, por el recíproco del número (78), vemos que el cociente seguirá siendo 68, y el resto será 343.

La demostración se puede aplicar análogamente a otro ejemplo.

Caso particular.—En el caso particular de ser el divisor la unidad seguida de ceros la regla anterior nos obligará a separar de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros siguen a la unidad. La parte separada a la izquierda sería el cociente, y la separada a la derecha el resto.

Ejemplo: 2748 : 100. Escribiríamos 27'48, y 27 sería el cociente, y 48 el resto.

RADICACIÓN

Reglas

90. Expuestas ya las primeras definiciones de esta operación, que deberán ser repasadas, vamos a ver cómo se realiza con números enteros.

Reglas. —*Primer caso.—Que el radicando sea menor que 100.* Entonces su raíz será menor que 10, y para hallarla se busca mentalmente el mayor número de una cifra cuyo cuadrado esté contenido en el radicando. La diferencia entre éste y dicho cuadrado será el resto.

Ejemplo: $\sqrt{39}$. Como el cuadrado de 6 es el mayor de los contenidos en 39, la raíz es 6. El resto es $39 - 6^2 = 3$.

Segundo caso.—Que el radicando sea superior a 100 e inferior a 10000. Entonces la raíz estará entre 10 y 100 y será un número de dos cifras.

Regla—a) Se extrae la raíz de las centenas del radicando y ésa será la primera cifra de la raíz.

b) Se eleva la cifra hallada al cuadrado, y se resta de las centenas del radicando. A la derecha del resto se escriben las dos últimas cifras del radicando, y así se obtiene el primer residuo.

c) Se dividen las decenas del primer residuo por el duplo de la cifra ya obtenida en la raíz, y así se halla una cifra que hay que comprobar.

d) Para comprobar la cifra hallada se la escribe a la derecha del número que sirvió de divisor; se multiplica el número resultante por la cifra que se comprueba y se ve si este producto puede restarse del primer residuo. En caso afirmativo la cifra comprobada es la de las unidades de la raíz. En caso contrario se le rebaja 1 y vuelve a comprobarse, etc.

Ejemplo explicado: *a)* El radicando tiene 47 centenas, y la raíz de 47 es 6, que se ha escrito en la *caja*.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{47'58} & 6 \\ \cline{2-2} 11\,58 & 129 \times 9 \end{array}$$

b) $6^2 = 36$, que restado de 47 da 11. Seguido este número de 58, da el primer residuo 1158.

c) El número, 115, de decenas de este residuo se ha dividido por $2 \times 6 = 12$, y se ha hallado por cociente 9.

d) Para comprobar la cifra 9 se ha escrito a la derecha del divisor 12, y el número 129 se ha multiplicado por 9. Como el producto no puede restarse de 1158, la cifra 9 es excesiva.—Procederá comprobar el 8, que es la verdadera cifra de la raíz. Esta es 68 y el resto 134.

91. *Demostración.*—Como se sabe que la raíz ha de tener dos cifras y ha de ser el *mayor* número cuyo cuadrado esté contenido en el radicando, llamando a dichas cifras d y u el número del sistema decimal que tiene d decenas y u unidades se escribirá $d \,.\, 10 + u$, (61) y este número será la raíz si damos a d y u los mayores valores posibles para que $(d \,.\, 10 + u)^2$ esté contenido en el radicando.

Sea éste el del ejemplo, 4758. Recordando el cuadrado de una suma, y teniendo en cuenta que el cuadrado del primer sumando $d \,.\, 10$ será $d^2 \,.\, 100$, vemos que en el radicando 4758 ha de estar contenida la suma

$$d^2 \,.\, 100 + 2 \,.\, d \,.\, 10 \,.\, u + u^2 \,. \quad (\mathrm{I})$$

Como $d^2 \,.\, 100$ son d^2 centenas, habrán de estar contenidas en las 47 centenas del radicando. Luego d será *el mayor* número cuyo cuadrado esté contenido en 47, es decir, la raíz cuadrada de 47. Con esto queda probada la parte *a)* de la regla, y averiguado que a la cifra d hemos de darle el valor 6.

b), *c)* Si de 4758 restamos $d^2 \,.\, 100$, esto es 3600, obtenemos el primer residuo 1158 en el cual debe estar contenida la suma.

$$2 \,.\, d \,.\, 10 \,.\, u + u^2$$

cuyo valor, reemplazando d por el número ya hallado, 6, da

$$12 \,.\, 10 \,.\, u + u^2 \quad (\mathrm{II})$$

Pero $12 \,.\, 10 \,.\, u$ son $12 \,.\, u$ decenas, que habrán de estar contenidas en las 115 que tiene el 1.er residuo, es decir,

$$12 \,.\, u \lesseqgtr 115.$$

Ahora bien, esto no se podría verificar si u fuese mayor que el cociente de la división $115 : 12$, porque entonces $12 \,.\, u$ excedería a 115, luego u no puede ser mayor que dicho cociente, que en el ejemplo elegido es 9.

d) Además, el valor (II) decíamos que habrá de estar contenido en el 1.er residuo, 1158. Pero el valor (II) puede escribirse sacando u como factor común,

$$(120 + u) \,.\, u.$$

Para ver, pues, si u puede ser 9, formamos el producto

$$(120 + 9) . 9 = 129 . 9$$

y veremos si puede restarse de 1158. En caso de no ser posible daremos a u el valor 8, o el 7, etc., hasta que la substracción sea posible.

92. *Tercer caso.—Que el radicando exceda de 10.000.* Este caso se reduce a la aplicación repetida de los anteriores, como se probaría si en vez de designar por d la *cifra* de las decenas de la raíz se designase el número (de varias cifras) que forman las decenas dichas.

Sea, por ejemplo, el radicando 47583425. Dividámosle en grupos de a dos cifras empezando por la derecha. Resultará 47˙58˙34˙25. La raíz del número 4758 se sabe hallar por el caso anterior. Pero esta raíz, 68, constituye las decenas de la raíz de 4758˙34, cuyas unidades podremos determinar. Mas la raíz así hallada constituye las decenas de la raíz del radicando propuesto, y se podrá proceder a determinar sus unidades. Vemos, pues, que la regla del segundo caso es aplicable en general, con sólo variarla como sigue:

a) En vez de decir centenas del radicando, digamos primer período de la izquierda.

b) En vez de dividir por el duplo de la cifra hallada dividiremos por el duplo del número que forman todas las cifras halladas en la raíz.

Resulta, pues, que solo la primera cifra de la raíz se halla por radicación. Las demás se hallan por división.

Advertencias.—1.ª Aunque el cociente que proporciona alguna cifra de la raíz sea mayor que 9 no se comprobará número mayor que éste, porque las cifras se obtienen una por una.

2.ª La cifra cero no es menester comprobarla.

3.ª El resto no puede exceder al duplo de la raíz.

Porque si llamando N al radicando, a a la raíz y r al resto, fuese $r > 2 . a$, sería por lo menos $r = 2 . a + 1$ y como de la fórmula

$$r = N - a^2$$

se saca, despejando N,

$$N = a^2 + r$$

en el caso de ser $r = 2 . a + 1$ se tendría

$$N = a^2 + 2 . a + 1 = (a + 1)^2 \qquad (50)$$

y la $\sqrt{N}$ no hubiera sido a, como se suponía, sino $a+1$.

Propiedades de los números naturales

CONGRUENCIAS

93. *Dos números son* **congruentes,** *con respecto a otro, llamado módulo, cuando al dividirlos por él dan restos iguales.* Si no son congruentes se llaman *incongruentes.*

Ejemplo: 12 y 17 son *congruentes* respecto al *módulo* 5, porque al dividirlos por 5 dan ambos el resto 2

Se indica la congruencia con el signo $\equiv$ (congruente con...)

$$12 \equiv 17 \text{ (módulo 5)}$$

es una *congruencia* cuyo primer miembro es 12, el segundo es 17, y el módulo 5.

La relación de congruencia es reflexiva, simétrica y transitiva (14); esto es: Todo número es congruente consigo mismo; si un número es congruente con otro, éste lo es con aquél; y dos números congruentes con un tercero lo son entre sí. Porque en todos los casos el resto es invariable.

Si elegimos un módulo, p. ej.: el 5, todos los números se pueden dividir en grupos o *clases*, siendo los de cada clase congruentes entre sí e incongruentes con los demás. He aquí cómo:

Primera clase.—Números *múltiplos* de 5, congruentes con *cero*, por dar como resto 0. Son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 5 \equiv 0 \\ 10 \equiv 0 \\ 15 \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{módulo } 5$$

Segunda clase.—Números que por tener una unidad más que los anteriores dan el resto 1, es decir, son congruentes con 1. (Pues 1 : 5 da de cociente 0, y de resto, 1).

$$\left.\begin{array}{r} 6 \equiv 1 \\ 11 \equiv 1 \\ 16 \equiv 1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{módulo } 5$$

Tercera clase.—Números que tienen dos unidades más que un múltiplo del módulo, y son congruentes con 2.

$$\left.\begin{array}{r} 7 \equiv 2 \\ 12 \equiv 2 \\ 17 \equiv 2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{módulo } 5.$$

Cuarta clase.—Números congruentes con 3.

Quinta clase.—Números congruentes con 4.

No hay más clases, pues si un número tuviese cinco unidades más que un múltiplo del módulo 5 sería otro múltiplo de 5 y pertenecería otra vez a la primera clase.

94. Los números de una misma clase se di-

ferencian, como se ve, en un múltiplo del módulo.

95.—*Observación* —Recordaremos la fórmula del dividendo (78) y aplicándola al caso de la división de un número a por un módulo m, siendo r el resto, se podrá escribir, en virtud de la notación ya empleada,

$$a = \dot{m} + r$$

Hacemos esta observación porque hemos de emplear con frecuencia esta forma.

96. **Propiedades fundamentales.**—*Si dos números son congruentes su diferencia es un múltiplo del módulo.*

Porque esos números pertenecerán a una misma clase, y se ha dicho (94) que entonces su diferencia será un múltiplo del módulo.

97. *Recíproco.—Si la diferencia de dos números es un múltiplo de otro tomado como módulo, aquellos números son congruentes con relación a éste.*

Sean a y b los números, y m, el módulo.

Suponemos que

$$a - b = \dot{m}$$

Despejando a, tendremos:

$$a = \dot{m} + b$$

El resto que dé a al dividirlo por m será el que dé la suma $\dot{m} + b$; pero, aplicando la regla (82) para dividir esta suma por m, por ser cero el resto del primer sumando el de la suma será el mismo que da b.

Luego de la igualdad

$$a - b = \dot{m}$$

se desprende la congruencia

$$a \equiv b \text{ (módulo } m).$$

Y como la igualdad $a - b = \dot{m}$ entraña la $a = b + \dot{m}$ y al revés, resulta que una congruencia puede escribirse en tres formas :

1.ª $a \equiv b$ (mód. m) 2.ª $a - b = \dot{m}$

3.ª $a = b + \dot{m}$

98. *Consecuencias.—Para que la diferencia de dos números sea divisible por un número basta que el minuendo y el substraendo den restos iguales al dividirlos por dicho número.—Si el minuendo y el substraendo son divisibles por un número la diferencia también lo es.*

Un número es congruente con el resto que resulta al dividirlo por otro tomado como módulo.

Pues si el número es a, el módulo m, y el resto r, se verificará entre el dividendo el divisor y el resto la relación $a = \dot{m} + r$, que equivale a la congruencia $a \equiv r$ (módulo m).

99. *Todo número que sea divisor del dividendo y del divisor, lo es del resto, y recíprocamente, si lo es del divisor y del resto, lo es del dividendo.*

Sea a el dividendo; m, el divisor, y r, el resto.

Recordemos ante todo que un divisor de m lo será de $\dot{m}$ (42). Además

por la fórmula del resto, $r = a - \dot{m}$;

por la fórmula del dividendo, $a = \dot{m} + r$, La primera nos enseña que todo divisor de x y $\dot{m}$ lo es de su diferencia r; y la segunda que todo divisor de $\dot{m}$ y r lo es de su suma a.

100. *La suma, miembro a miembro, de varias congruencias del mismo módulo es otra congruencia de igual módulo.*

$$\left.\begin{array}{r} a \equiv b \\ c \equiv d \end{array}\right\} \text{(módulo } m)$$

$$a + c \equiv b + d \quad \text{(módulo } m)$$

Porque escritas las congruencias en la tercera forma (97) y supuesto que los primeros miembros son mayores que los segundos

$$\begin{array}{r} a = \dot{m} + b \\ c = \dot{m} + d \\ \hline (a + c) = \dot{m} + (b + d) \end{array}$$

por ser la suma de múltiplos de m otro múltiplo del mismo número, o bien

$$a + c \equiv b + d \text{ (módulo } m).$$

Si fuese, por ejemplo, $c < d$ se cambiarían los miembros de esta congruencia, y se escribiría $d = \dot{m} + c$.

101. *Multiplicando por un mismo número los dos miembros de una congruencia se obtiene otra.*

Ejemplo :

Si $19 \equiv 14$ (mód 5), también $19 \times 3 \equiv 14 \times 3$ (mód. 5).

Porque haciendo la suma de tres congruencias iguales a la primera se obtiene la segunda.

102. *El producto de dos congruencias de igual módulo es otra congruencia.*

Ejemplo : De

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv b & (\text{módulo } m) \\ c \equiv d & (\text{íd.}) \end{array}\right\} \text{se obtiene } a\,.\,c \equiv b\,.\,d\ (\text{módulo } m).$$

Para demostrarlo, multipliquemos los dos miembros de la primera congruencia por el primero de la segunda, y los dos de la segunda por el segundo de la primera y saldrá :

$$\left.\begin{array}{ll} a \times c \equiv b \times c & (\text{módulo } m) \\ b \times c \equiv b \times d & (\text{íd}) \end{array}\right\} \text{luego } a\,.\,c \equiv b\,.\,d\ (\text{mód } m).$$

103. **Restos potenciales** *de 10 con respecto a un módulo* m. *Se llaman así los restos que producen las sucesivas potencias de 10 al dividirlas por* m.

Desde luego la potencia de exponente *o*, como es igual a 1 (45) produce el resto 1.

Para hallar los demás llamemos r_1 el que produce 10^1 y se tendrá, por ser el dividendo congruente con el resto (98), la primera de las congruencias del margen.

$$\left.\begin{array}{l} 10^1 \equiv r_1 \\ 10^2 \equiv r_1 \times r_1 \equiv r_2 \\ 10^3 \equiv r_2 \times r_1 \equiv r_3 \\ 10^4 \equiv r_3 \times r_1 \equiv r_4 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

La segunda se halla multiplicando la primera por sí misma, y viendo el resto que da $r_1 \times r_1$, al cual llamaremos r_2. La tercera, o *cualquiera de las demás*, se hallan multiplicando la *precedente* por la *primera*.

Ejemplos:

Para los módulos 10, 2 y 5	Para los módulos 3 y 9	Para el módulo 11	Para el módulo 7
$10^0 \equiv 1$	$10^0 \equiv 1$	$10^0 \equiv 1$	$10^0 \equiv 1$
$10 \equiv 0$	$10 \equiv 1$	$10 \equiv 10 \equiv -1$	$10 \equiv 3$
$10^2 \equiv 0$	$10^2 \equiv 1$	$10^2 \equiv 1$	$10^2 \equiv 2$
$10^3 \equiv 0$	$10^3 \equiv 1$	$10^3 \equiv 10 \equiv -1$	$10^3 \equiv 6 \equiv -1$
etc.	etc.	$10^4 \equiv 1$	$10^4 \equiv 4 \equiv -3$
		etc.	$10^5 \equiv 5 \equiv -2$
			$10^6 \equiv 1$
			y se repite

Observación.—En los módulos 11 y 7, los números -1 -3, etc., han de restarse de un múltiplo del módulo, pues significan que la división se ha hecho por *exceso*.

Así, por ejemplo: $10 = 11 - 1$, $1000 = 1001 - 1$, etc. Si los dos miembros de estas igualdades se multiplican por un número, por ejemplo n, saldrá: $10 \cdot n = 11 \cdot n - n$, que en forma de congruencia es $10 \cdot n \equiv -n$. Es decir: que en estas congruencias se puede hacer también la multiplicación de los dos miembros por un número, conservando el signo — que lleva el segundo miembro.

104. *Para averiguar con quien es congruente un número del sistema decimal con respecto a un módulo, se descompone el número en sus unidades de diversos órdenes y se multiplica cada cifra del número por los dos miembros de la congruencia relativa a la unidad colectiva correspondiente. Después se suman las congruencias resultantes.*

Ejemplo: ¿Con quién es congruente 2473 respecto al módulo 9?

1.°

$$2473 = 2 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2 + 7 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0$$

2.° Multiplicamos los dos miembros de las congruencias del cuadro anterior referentes al módulo 9 respectivamente por 3, 7, 4, 2, que son las cifras del número, y sale

$$\left.\begin{array}{r} 3 \times 10^0 \equiv 3 \\ 7 \times 10^1 \equiv 7 \\ 4 \times 10^2 \equiv 4 \\ 2 \times 10^3 \equiv 2 \end{array}\right\} \text{ o bien } \left\{\begin{array}{r} 3 \equiv 3 \\ 70 \equiv 7 \\ 400 \equiv 4 \\ 2000 \equiv 2 \end{array}\right.$$

y sumando,

$$2473 \equiv 2 + 4 + 7 + 3$$

El número 2473 da, pues, al dividirlo por 9, el mismo resto que la suma $2 + 4 + 7 + 3 = 16$.

Observación.—Puede abreviarse restando 9 de la suma de las cifras en cuanto ésta exceda de dicho número.

Ejercicios.—(Estos ejercicios se resuelven de un modo análogo).

1.° Con respecto a los módulos 10, 2 y 5, el resto de un número es el mismo que dé la cifra de sus unidades.

2.° Con respecto a los módulos 9 y 3 todo número es congruente con la suma de sus cifras.

3.° Con respecto al módulo 11 un número es congruente con el obtenido sumando y restando alternativamente sus cifras, empezando de derecha a izquierda. Si hay substracciones imposibles se aumenta 11 al minuendo para hacerlas realizables.

106. Con respecto al módulo 7 haremos las siguientes observaciones:

1.ª Si el número no tiene más de 3 cifras se sigue la regla general, y el número es congruente con la suma de los productos de sus cifras, tomadas de derecha a izquierda, por 1, 3 y 2.

Ejemplo:

$$458 \equiv 8 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 31, \text{ o bien } 458 \equiv 31 \equiv 3$$

2.ª Si el número tiene más de 3 cifras se le considera como si estuviera escrito en el sistema de numeración de base 1000, para lo cual basta considerar cada *grupo de tres cifras* como si fuera una sola cifra, y entonces se procede como antes se hizo para el 1.

(La razón de esto es que $10^0 \equiv 1$, $10^3 \equiv -1$, $10^6 \equiv 1$).

Caracteres de divisibilidad.—Como un número es divisible por el módulo cuando es congruente con cero respecto a dicho módulo, de las reglas anteriores se deducen los *caracteres* (señales o signos) de divisibilidad, que siguen:

Un número es divisible por 10 si termina en un cero; por 10^n si termina en n ceros.

Un número es divisible por 2 si termina en cero o cifra par; y por 5 si acaba en cero o en 5.

Un número es divisible por 9 o por 3 si lo es la suma de sus cifras.

Un número es divisible por 11 si al sumar y restar, alternativamente, sus cifras (de derecha a izquierda), aumentando en 11 el minuendo cuando sea preciso para poder realizar la substracción, resulta cero u 11.

107. La investigación del resto que da un número al dividirle por un módulo, además de ser teóricamente muy interesante, tiene aplicación en la *prueba* de las operaciones. El módulo preferible para esto es el 9, porque el resto se halla con gran facilidad suprimiendo 9 siempre que se pueda al sumar las cifras; y también porque es necesario emplear todas éstas. A él nos referiremos, por consiguiente, en lo que sigue:

Prueba de la suma.—Se funda en que si

$$\left.\begin{array}{r} a \equiv r \\ b \equiv r' \\ \hline a + b \equiv r + r' \end{array}\right\} \text{módulo } 9.$$

Luego si la suma $a + b$ da de resto R debe ser

$$r + r' \equiv R. \text{ (módulo 9)}.$$

Regla. —Se halla el resto de cada sumando, se suman estos restos y se halla el resto de este resultado, y este mismo debe ser el resto del total.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r l} 4273 & \text{...Resto } \left.\begin{array}{r} 7 \\ +6 \end{array}\right\} \text{Resto de 13 ...}\mathbf{4} \\ 8124 & \quad » \\ \hline 12397 & \quad » \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{4} \end{array}$$

Prueba de la multiplicación.—Se funda en que si

$$\begin{array}{r} a \equiv r \\ b \equiv r' \\ \hline a \,.\, b \equiv r \,.\, r' \end{array}$$

Luego si el producto $a \,.\, b$ es congruente con R,

$$r \,.\, r' \equiv R.$$

Regla.—Se hallan los restos de los factores y se multiplican; el resto de este producto debe ser el mismo que el del producto de los números dados.

Ejemplo :

$$\begin{array}{r} 4791 \\ 384 \\ \hline 19164 \\ 38328 \\ 14373 \\ \hline 1839744 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} \text{...Resto ... } 3 \\ \text{» } \times 6 \end{array}\right\} \text{ Resto de } 18 \text{ ... } \mathbf{0} \qquad \text{Resto . . . . } \mathbf{0}$$

Prueba de la división.—Es combinación de las anteriores, puesto que el dividendo es *suma* de un *producto* con un número.

Regla.—Se hallan los restos del divisor y del cociente y se multiplican; el resto de este producto se suma con el del resto de la división, y el resto de esta suma debe ser igual al del dividendo.

Ejemplo :

$$\begin{array}{l|l} 49726 & 27 \\ \cline{2-2} 227 & 1841 \\ 112 & \\ 046 & \\ 19 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} \text{... Resto ... } 0 \\ \text{» } \times 5 \end{array}\right\} \text{ Resto de } 0 \,.\, 5 \text{ ... } \mathbf{0}$$

19 . . . . $+\mathbf{1}$

El dividendo debe dar de resto . . . . $\mathbf{1}$

Prueba de la raíz cuadrada.—Se funda en que

$$N = a^2 + R$$

y si

$$\begin{array}{rr} a \equiv r \quad \text{será} & a^2 \equiv r^2 \\ \text{y si} & R \equiv r' \\ \hline & a^2 + R \equiv r^2 + r' \end{array}$$

Regla.—Se halla el resto de la raíz y se eleva al cuadrado: el resto del número resultante se suma con el que da el resto de la operación, y la suma debe ser congruente con el radicando.

Ejemplo:

$\sqrt{6\,3\,7}$ | 25 ... Resto 7; resto de $7^2 = 49$ ... **4**
2 3.7 | 45 . 5
1 2 . . . . **+ 3**
El resto del radicando debe ser **7**

Observación.—Se notará que la manera de efectuar las pruebas por 9 es la misma ordinaria, sólo que en vez de operar con los números dados se opera con los restos *mínimos* (menores que 9).

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

108. Como indica su nombre, *el máximo común divisor de varios números es el mayor de sus divisores comunes.*

El procedimiento natural para hallarlo sería averiguar todos los divisores de los números dados, buscar los comunes y elegir entre éstos el mayor.

Ejemplo:

12 tiene los divisores 1, 2, 3, 4, 6, 12

8 tiene los divisores 1, 2, 4, 8

Son comunes 1, 2 y 4. Luego 4 es el máximo común divisor de 12 y 8. En abreviatura se escribe:

m. c. d. $(12, 8) = 4$, o más breve: $D(12, 8) = 4$

Pero como el problema de hallar todos los divisores de un número no siempre es fácil, se usa para hallar el m. c. d. de varios números otro procedimiento que vamos a estudiar.

Antes diremos: *Se llaman números primos entre sí, aquellos cuyo m. c. d. es 1.*

Ejemplo: 8 y 9.

109. *M. c. d. de* **dos** *números.—Para hallar el m. c. d. de dos números se divide el mayor por el menor, éste por el resto de la división si lo*

hubiere, etc., hasta hallar un resto cero. El último divisor, que es también el penúltimo resto, es el m. c. d.

Ejemplo: Sean los números 328 y 90. Se harán las divisiones del margen, en las cuales se ha colocado el cociente *sobre* el divisor.

	3	1	1	1	4	3
328	90	58	32	26	6	2
58	32	26	6	2	0	

El m. c. d. es 2, *último* divisor o *penúltimo* resto.

Demostración.—Recordando que todo divisor del dividendo y del divisor lo es del resto, y recíprocamente (99) vemos que un divisor de la primera pareja 328 y 90 lo será de la segunda, 90 y 58 (puesto que 58 es el primer resto), y siéndolo de ésta lo será de la tercera, 58 y 32, y de 32 y 26, y de 26 y 6, y de 6 y 2, y recíprocamente. Pero el m. c. d. de 6 y 2 es 2, porque 2 es divisor de 6 y de sí mismo, y un número mayor que 2 no podría ser divisor de 2. Luego, D (328, 90) = 2.

Observación.—Cuando un resto es mayor que la mitad del divisor es conveniente, para abreviar, hacer la división por exceso.

La regla anterior caería en defecto si nunca se llegase a obtener una división exacta; pero esto es imposible, porque los restos sucesivos son números enteros decrecientes, y no puede haber infinitos.

Se habrá advertido que el procedimiento empleado consiste en sustituir una primera pareja de números por otra formada del que sirve de divisor y del resto.

De esta observación se desprenden los teoremas siguientes.

110. *Si se multiplican dos números por otro, su m. c. d. queda también multiplicado; y análogamente si se dividen*

Pues al multiplicarse o dividirse la primera pareja queda multiplicado o dividido el primer resto: luego queda multiplicada o dividida la segunda pareja, y el segundo resto, etc.

Y como el m. c. d. es el penúltimo resto también queda multiplicado o dividido.

Ejemplos:

Si D $(30, 24) = 6$, será D $(30 \times 3, 24 \times 3) = 6 \times 3$.

Si D $(30, 24) = 6$, será D $(30 : 3, 24 : 3) = 6 : 3$.

Caso particular.—Si se dividen dos números por su m. c. d. los cocientes son primos entre sí.

Ejemplo:

Si D $(30, 24) = 6$, será D $(30 : 6, 24 : 6) = 6 : 6 = 1$.

Luego los números 5 y 4 resultantes de los cocientes $30 : 6$ y $24 : 6$, por tener el m. c. d. igual a 1 son primos entre sí (108).

Inversamente: Si dos números primos entre sí se multiplican por otro, su m. c. d. es este otro.

Porque siendo a y b los números primos entre sí, su m. c. d. será 1, y si a y b se multiplican por otro número n, su m. c. d. será $1 \times n$, es decir n.

Si se dividen dos números por otro y los cocientes son primos entre sí, ese otro número era el **m c. d.** Sean A y B los números que divididos por otro, n, dan los cocientes a y b, primos entre sí. Si los cocientes a y b los multiplicamos por

n, sabemos que n será el m. c. d. de los productos resultantes. Pero siendo a el cociente A : n, al multiplicar $a \times n$ resulta A (y análogamente $b \times n =$ B), luego el D (A, B) $= n$.

111. *Teorema.—Si un número es divisor de un producto de dos factores. y es primo con uno de ellos, será divisor del otro factor.*

Ejemplo : Si 4 es divisor de $5 \times n$, como 4 es primo con 5, tendrá que ser 4 divisor de n. Luego n podrá ser 4, 8, 12, etc.

Demostración.—Como 4 y 5 son primos, los productos $4 \times n$ y $5 \times n$ tienen por m. c. d. el número n (110).

Pero ambos productos $4 \times n$ y $5 \times n$ son divisibles por 4; luego su m. c. d., n, también lo será.

112. **Aplicación.**—Si se dividen los dos miembros de una congruencia por un divisor común *primo* con el módulo se obtiene otra congruencia de igual módulo.

Sea la congruencia $a \,.\, p \equiv b \,.\, p$ (módulo m); que puede escribirse

$$a \,.\, p - b \,.\, p = \dot{m} \text{ y también } p \,.\, (a - b) = \dot{m}$$

Pero para que m sea divisor de $p \,.\, (a - b)$, siendo primo con el factor p, deberá ser divisor de $(a - b)$, esto es,

$$a - b = \dot{m}, \text{ o bien } a \equiv b \text{ (módulo } m)$$

que es lo que se quería demostrar, puesto que a y b son los cocientes de dividir $a \,.\, p$ y $b \,.\, p$ por p.

113. *M. C. D.* **de varios números.**—*Para hallar el* **m. c. d.** *de varios números, se sustituyen dos de ellos por su m. c. d., y queda así un núme-*

ro menos. Repitiendo la operación se reduce este caso al anterior, en que sólo había dos números.

Ejemplo: Para hallar el m. c. d. de los *cuatro* números 42, 30, 24 y 18, sustituímos los números 18 y 24 por su m. c. d., 6; y consideramos ahora los *tres* números 42, 30 y 6. Si ahora reemplazamos 30 y 6 por su m. c. d., que también es 6, sólo quedarían los *dos* números 42 y 6.

Es preciso demostrar ahora que, en efecto, pueden sustituirse dos de los números por su m. c. d. Porque todo divisor de los cuatro números dados lo será en particular de 24 y 18, y por consiguiente, de su m. c. d., 6. Y recíprocamente, un divisor de 6 lo será de sus múltiplos 18 y 24, de modo que si además lo es de 30 y 42 lo será de los cuatro números dados. Así, pues, la serie

$$42,\ 30,\ 24,\ 18$$

tiene los mismos divisores que la serie

$$42,\ 30,\ 6,$$

y el máximo divisor será también el mismo.

Observaciones.—1.ª Generalmente conviene sustituir por su m. c. d. los dos menores números.

2.ª Si hay entre los números dados algunos que sean múltiplos de otros, pueden suprimirse aquéllos.

3.ª Las propiedades del m. c. d. de varios números son análogas a las del de dos, y se deducen de éstas. Por ejemplo: si varios números se multiplican o dividen por otro, su m. c. d. queda multiplicado o dividido también.

Mínimo común múltiplo

114. Como su nombre expresa, *el mínimo común múltiplo de varios números es el menor de sus múltiplos comunes.*

El procedimiento natural para hallarlo sería ir formando todos los múltiplos de uno de los números hasta encontrar uno que fuera múltiplo de los demás números.

Ejemplo: Para hallar el mínimo común múltiplo de 30 y 24 formemos la serie de múltiplos de 30,

30, 60, 120...

y como 120 es el primero de los números de esta serie, que además de ser múltiplo de 30 lo es de 24, dicho número 120 sería el mínimo común múltiplo.

Se indica en abreviatura: *m. c. m.* (30, 24) = = 120, y también M (30, 24) = 120.

El procedimiento anterior se reemplaza por otro más breve, fundado en el siguiente

115. **Teorema.**—*El m. c. m. de dos números se obtiene multiplicando uno de ellos por el cociente resultante de dividir el otro por el m. c. d. de ambos.*

Ejemplo: El m. c. m. de 30 y 24 será: $30 \times \frac{24}{6}$ porque 6 es el m. c. d. Como $\frac{24}{6} = 4$ resulta M (30, 24) = 30 × 4 = 120.

Demostración.—Sea 30 . x *el menor* múltiplo de 30 que lo es también de 24. Tendremos:

$$30 \,.\, x = \dot{24}$$

Dividiendo por 6, que es el m. c. d., sale

$$5 \,.\, x = \dot{4}$$

Esto enseña que 4 es divisor del producto 5 . x, y como es primo con 5 (porque los cocientes 4 y 5 de dividir los números 24 y 30 por su m. c. d. son primos entre sí), (110) será 4 divisor de x, y *el menor* valor que se podrá dar a x será 4. El M (30, 24) es, pues, $30 \times 4 = 120$.

Observaciones.—1.ª Si en el cálculo anterior damos a x en vez del valor 4 el valor 4 . n, obtenemos un múltiplo de 30 y 24 que no es el mínimo. Su forma es, pues,

$$30 \,.\, 4 \,.\, n = 120 \,.\, n$$

luego *todo múltiplo común* de 30 y 24 *lo es de su m. c. m.* 120.

2.ª Poniendo en lugar de 30 su igual 5 . 6, resulta para el m. c. m. el valor de 5 . 6 . 4 = = 5 . 24 = 24 . 5, lo que prueba que el enunciado era aplicable al 24, aunque la demostración la hicimos para el 30.

3.ª Designando en general por a y b dos números, por D su m. c. d, por a' y b' los cocientes a : D y b : D, y por M el m. c. m, éste tendrá una de las formas

$$M = a \,.\, \dot{b'}$$
$$M = b \,.\, \dot{a'}$$

Las propiedades del m. c. m. se deducen de estas formas, como veremos en lo sucesivo.

116. *Si se multiplican dos números por otro, su m. c. m. queda multiplicado también.*

Ejemplo:

$$M\ (30, 24) = 120,\ M\ (30 \times 3, 24 \,.\, 3) = 120 \,.\, 3$$

Los nuevos números serán, por ejemplo, $a \,.\, n$ y $b \,.\, n$, su m. c. d. será ahora $D \,.\, n$, pero los cocientes $(a \,.\, n) : (D \,.\, n)$ y $(b \,.\, n) : (D \,.\, n)$ son, como antes, a' y b' (79) luego el mínimo común multiplo será ahora

$$(a \,.\, n) \,.\, b' = (a \,.\, b') \,.\, n = M \,.\, n$$

117. *Si dos números son primos entre sí su m. c. m. es su producto.*

Ejemplo: el m. c. m. de 8 y 9 es 8 . 9 = 72

Si a y b son primos, $D = 1$ y $b : D = b$, luego

$$M = a \,.\, b$$

118. *Si el m. c. m. de dos números se divide por ellos, los cocientes son primos entre sí.*

Las dos formas de M son

$$\left.\begin{array}{l} M = a \,.\, b' \\ M = b \,.\, a' \end{array}\right\} \text{ y de ellas sale } \begin{array}{l} M : a = b' \\ M : b = a' \end{array}$$

Pero a' y b' son primos entre sí, por ser los cocientes de dividir dos números por su m c. d.

119. *M. C. M.* **de varios números**.—*Para hallar el m. c. m. de varios números se sustituyen dos de ellos por su m. c. m., y se opera así con un número menos.*

Ejemplo: Para hallar el m. c. m. de los *cuatro* números 42, 30, 24 y 18, sustituímos 42 y 30 por su m. c. m. 180 y operamos sólo con los *tres* números 180, 24 y 18.

Demostración.—Un múltiplo de los cuatro números dados lo es en particular de 42 y 30, y por consiguiente, de 180. E inversamente, un múltiplo de 180 lo es de sus divisores 42 y 30, luego si también lo es de 24 y 18, lo será de los cuatro números. Luego la serie

42, 30, 24, 18

y la serie

180, 24, 18

tienen los mismos múltiplos, y el menor de ellos será el m. c. m.

Observaciones.—1.ª Suelen reemplazarse por su m. c. m. los dos números mayores.

2.ª Si entre los números dados hay algunos divisores de otro se pueden suprimir aquéllos.

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

120. **Número primo** *es el que carece de divisores*, a excepción de él mismo y de 1.

Ejemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13... son primos, porque cualquiera de ellos v. g., el 7 sólo es divisible por él, 7, y por 1.

Números compuestos.—Se llaman así todos los que no son primos. Un número compuesto siempre tiene, por consiguiente, algún divisor o factor. Así: 30 es divisible por 5 y por otros números.

121. Un número compuesto es un producto de factores primos iguales o distintos.

Ejemplos:

$$8 = 2 . 2 . 2 = 2^3, \quad 15 = 3 . 5, \quad 12 = 2 . 2 . 3 = 2^2 . 3$$

La forma general es $N = a^m . b^n . c^p ...$

Para demostrar esto observamos que siendo N compuesto, ha de tener algún divisor. Si el menor de estos divisores es a, a tendrá que ser *primo*, pues si no también él tendría otro divisor a', menor que a, que por ser divisor de a lo sería de su múltiplo N. Luego N tenía un divisor a' menor que a, lo que no es posible, puesto que habíamos admitido que a era el menor divisor de N.

Teniendo N el divisor a, será de la forma

$$N = a . N'$$

Pero para N' razonaremos igual, y tendrá, o el mismo factor primo a u otro b, de modo que respectivamente

$$N' = a \cdot N'' \text{ o } N' = b \cdot N''$$

y sustituyendo en la igualdad anterior

$$N = a^2 \cdot N'' \text{ o } N = a \cdot b \cdot N''$$

Continuando iguales razonamientos para N'' se llegará a obtener para N la forma general antes expresada.

122. **Serie de números primos.**—*Dado un número primo*, p, *siempre se puede encontrar otro número primo mayor que él.*

Supongamos formado el producto de todos los números primos hasta p inclusive, que será

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p = P$$

Si llamamos n a *cualquiera* de estos números primos, el producto P será $\dot{n}$, y por tanto

$$P \equiv 0 \text{ (módulo } n) \text{ y } P + 1 \equiv 1 \text{ (módulo } n)$$

Ahora, P + 1 podrá ser primo o no serlo. Si lo es, como evidentemente es mayor que p, ya existe un número primo mayor que p; y si no es primo P + 1 será compuesto de factores *primos*. Mas estos factores no son de los comprendidos entre 2 y p inclusives, puesto que con respecto a cualquiera de ellos, n, es P + 1 congruente con 1; luego, tendrán que ser mayores que p. Existen, pues, números primos mayores que p.

123. **Tabla de números primos.**—Aunque la serie de números no tenga fin, *podrían* encerrarse *todos* en una *fórmula*, así como todos los múltiplos de 2, por ejemplo, no obstante ser tam-

bién en número indefinido, pueden comprenderse en la fórmula $2 \times x$. Pero no habiéndose hallado esta fórmula que produzca todos los números primos y únicamente ellos, es preciso construir cuadros o tablas en las que se consignen los números primos.

Cualquiera podría construir una de estas tablas escribiendo la serie natural de los números y suprimiendo en ella todos los múltiplos de 2, de 3, etc., fijándose en que como cada número tiene una unidad más que el anterior, el que esté dos lugares después del 2 es $2+2=4$; el que esté 2 lugares después será $4+2=6$; etcétera. Es decir, que así se destruirán todos los múltiplos de 2. Y análogamente se procedería para el 3, suprimiendo los que se encuentren de tres en tres lugares, etc. Pero como este procedimiento, aunque capaz de abreviarse, siempre es prolijo, se prefiere consultar una tabla.

Para nuestros cálculos bastará saber que los números primos menores que 100 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, y 97.

124. *Un número primo divisor de un producto de dos factores es divisor de alguno de ellos.*

Demostración.—Supongamos que el producto $a \times b$ sea divisible por 3. Decimos que lo serán también a o b.

Porque si a no es divisible por 3, no puede tener con él divisor común distinto de 1. Luego a y 3 son primos entre sí y este teorema se convierte en el ya conocido del número (111).

Observación.—Como un producto de varios factores puede siempre reducirse a otro de dos, el teorema es cierto aunque sean varios los factores.

125. *Un número primo no puede ser divisor de un producto de factores también primos, sino en el caso de ser igual a alguno de ellos.*

Ejemplo: Si a es divisor del producto $3 \times \times 7 \times 11$ será igual a 3, o a 7, o a 11. Porque tiene que ser divisor de alguno de estos números, que no tienen otros divisores que ellos mismos.

126. *De cualquier modo que se descomponga un número en factores primos, resultarán los mismos factores y repetidos las mismas veces.*

Porque si por una parte resultase el número igual al producto de factores primos iguales o distintos, $a \times b \times c$, y por otra igual al producto $a' \times b' \times c'$, cada uno de estos últimos sería divisor del número, es decir, de $a \times b \times c$, y tendría que ser igual a alguno de estos factores.

127. **Teorema.**—*Si un número* **cualquiera** *es primo con los factores de un producto lo es con éste, y viceversa.*

Ejemplo: El número 8, primo con 9 y con 15, lo es con 9×15.

En general; si n es primo con a y con b, lo será con $a \cdot b$. En efecto, por hipótesis

$$D(n, a) = 1$$

multiplicando por b

$$D(n \cdot b, a \cdot b) = b$$

Si el número n y el producto $a \cdot b$ tuviesen un factor común, ese factor lo sería de $n \cdot b$ y $a \cdot b$, y por tanto, de su m. c. d. b. Lo cual contradice la hipótesis de ser n primo con b.

Recíprocamente.—Si n y $a \cdot b$ son primos, n no puede tener ningún factor común con a ni con b, porque los factores de a y b lo son del producto $a \cdot b$, y entonces n y $a \cdot b$ no serían primos entre sí, como se había supuesto.

Observación.—Claro es que al decir: no tienen factor común, se entiende *distinto de* 1, puesto que 1 es factor de todos los números.

128. *Casos particulares.—Un número primo con la base de una potencia es primo con la potencia (por ser ésta un producto de factores iguales a su base).*

Las potencias de dos números primos entre sí son primas entre sí.

129 Para que un número A sea múltiplo de otro B (o B divisor de A), es necesario y suficiente que A tenga *todos* los factores primos de B con exponentes *por lo menos* iguales.

Ejemplos: Si $A = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ y $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ no puede ser B divisor de A, porque en A no entra el factor 7.

Si $C = 2^2 \cdot 3^5$ tampoco es A múltiplo de C porque el factor 3 entra en A con menor exponente que en C

Si D es $2^3 \cdot 3^2$ *será* divisor de A porque en A entran todos los factores de D con exponente igual o mayor.

Demostración: Si $A = \dot{B} = B \cdot Q$, tendrá A que contener, además de los factores de B, los de Q, luego se cumplirá la condición.

Recíprocamente: Si A contiene todos los factores de B, por lo menos con exponentes iguales, se podrá formar con los factores de A, por lo menos, el número B (y entonces $Q = 1$), y, en general, el número B y otro número Q, luego $A = B . Q$.

Así; cuando $A = 2^3 . 3^4 . 5$ y $Q = 2^2 . 3^3$ es

$$\begin{cases} 2^3 . 3^4 . 5 = (2^2 . 3^3) . (2 . 3 . 5) \\ \quad A \quad = \quad B \quad . \quad R \end{cases}$$

Esto quiere decir que todo número de la forma $a^m . b^n . c^p$ es divisor de otro de la forma $a^\alpha . b^\beta . c^\gamma$ siempre que

$$m \leqq \alpha, \; n \leqq \beta, \; p \leqq \gamma$$

130. M. C. D.—*El m. c. d. de varios números descompuestos en factores primos se obtiene multiplicando los factores primos que se hallen en todos ellos, afectados de los menores exponentes con que figuren.*

Ejemplo: El m. c. d. de los números.

$$\left.\begin{aligned} A &= 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \\ B &= 2^2 \times 5^4 \times 7 \\ C &= 2^3 \times 5^4 \times 11^2 \end{aligned}\right\} \text{es } D = 2^2 \times 5^3$$

Efectivamente: D es divisor de A, B y C, porque cumple las dos condiciones necesarias para ello. Otro divisor cualquiera de A, B, C tendría algún factor menos que D, o alguno de ellos con menor exponente. Luego D es el *mayor* divisor común.

131. M. C. M.— *El m. c. m. de varios números descompuestos en factores primos se obtiene multiplicando todos los factores primos que haya en los números, afectados de los mayores exponentes con que figuren.*

Ejemplo: El m. c. m. de los mismos números del ejemplo anterior es $M = 2^4 \times 3^2 \times 5^4 \times \times 7 \times 11^2$. M es múltiplo de A, B y C, porque cumple con las condiciones necesarias para ello (129). Otro múltiplo cualquiera de A, B y C tendría algún factor más de los que entran en M, o alguno de éstos con mayor exponente y sería mayor que M. Luego éste es el m. c. m. de A, B y C.

132. Esta manera de hallar el m. c. d. y el m. c. m. facilita las demostraciones de algunos teoremas. Por ejemplo:

Si varios números se dividen por su m. c. d., los cocientes son primos entre sí.

Porque para dividir un producto por factores suyos éstos se suprimen, luego al dividir los números por su m. c. d. se suprimen todos los factores comunes. Los cocientes no tendrán, por consiguiente, ningún factor *común*, y serán primos. (Compruébese con un ejemplo).

Hemos aplicado este procedimiento para repetir la demostración de un teorema conocido; pero se puede aplicar a demostrar otros nuevos, entre los cuales elegimos el siguiente.

El m. c. d. de dos números ,a y b, *no se altera multiplicando uno de ellos por un factor n primo con el otro.*

En efecto, al hallar el m. c. d. de a y $b \cdot n$, si n es primo con a ninguno de los factores de n podrá entrar en dicho m. c. d., puesto que no son *comunes* con a; luego resultará el mismo m. c. d. de a y b.

133. *Hallar todos los divisores de un número.*—Para hallar los divisores o factores primos

pueden usarse varios procedimientos, puesto que se sabe que el resultado es el mismo (126); pero de ordinario se sigue el siguiente:

Se ve si el número es divisible por 2, y si lo es se hace la división (mentalmente) y se escribe el cociente debajo del número y el 2 separado por una raya en la forma que indica el ejemplo del margen.

396	2
198	2
99	3
33	3
11	11

Si el cociente es otra vez divisible por 2 se repite lo dicho. Cuando se obtenga un número que no sea divisible por 2, se ve si lo es por 3, o por 5, etc., y se continúa de análogo modo hasta hallar un número primo, que sólo será divisible por él mismo.

En el ejemplo propuesto $396 = 2 \times 198 = 2 \times 2 \times 99 = 2 \times 2 \times 3 \times 33 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3^2 \times 11$.

Observación.—Si es fácil descomponer el número en dos factores compuestos, basta descomponer separadamente éstos y multiplicar los resultados.

Ejemplo: Si se tratase del número 396000 lo descompondríamos en 396×1000. Y como $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$ y $1000 = 2^3 \times 5^3$ será $396000 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 2^3 \times 5^3 = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times 11$.

Regla.—Para hallar todos los divisores de un número, se escribe en una fila 1 y todas las potencias del primer factor primo, desde la 1.ª hasta aquella con que entre en el número. Se traza por debajo de la fila así formada una raya, y se procede a multiplicar todos los números que hay encima de la raya por la 1.ª potencia del factor primo siguiente formando una fila, después por la 2.ª potencia del mismo factor formando otra fila, etc. Se traza otra raya, y se multiplican los números de todas las filas que hay encima de esta segunda raya por las potencias sucesivas del tercer factor, etc. Todo como se ve en el ejemplo, correspondiente al número 396 (advirtiendo que se han hallado ya los valores de las potencias dichas).

1	2	4
3	6	12
9	18	36
11	22	44
33	66	132
99	198	396

Los números escritos en el cuadro anterior son los productos parciales que resultarían si se hubiesen multiplicado las sumas.

$$(1+2+2^2)\times(1+3+3^2)\times(1+11).$$

y son todos y los únicos divisores de 396. Porque cualquiera de esos productos parciales es un número compuesto de los factores primos 2, 3 u 11 con exponentes que no exceden a los que estos factores llevan en 396; y cumple, por tanto, con las condiciones necesarias para ser divisor de 396. Y cualquier divisor de 396 tendrá sólo los factores primos 2, 3, 11, con exponentes iguales o menores que los que llevan en 396 y habrá sido obtenido al efectuar el producto de las sumas dichas.

Como en la primera de estas sumas hay $2+1$ números, en la segunda $2+1$ y en la tercera $1+1$, el número de términos resultantes al multiplicarlas es

$$(2+1).(2+1).(1+1.)$$

Es decir: *El número de divisores es el producto de los exponentes de los factores primos del número después de aumentado cada exponente en 1.*

La suma de los divisores sería el valor del producto de las sumas consideradas, esto es,

$$(1+2+4).(1+3+9).(1+11)=7\times13\times12=1092.$$

En general, los divisores de $N=a^m.b^n.c^p$ se hallan al multiplicar las sumas

$$(1+a+a^2+...a^m).(1+b+b^2+...b^n).(1+c+c^2+...c^p)$$

CANTIDADES: SU MEDIDA

Conceptos fundamentales

134. **Magnitud.**—La idea de *magnitud*, análoga en cierto modo a la de pluralidad, nace de la contemplación de las cosas que, por tener un carácter común con respecto al cual se llaman *homogéneas*, pueden ser comparadas entre sí.

A veces las cosas mismas cuya magnitud estimamos, se llaman también magnitudes, y en este sentido puede decirse que, por ejemplo, un segmento de recta es una magnitud.

Ejemplos: Todos los segmentos de recta tienen un carácter común que los hace comparables: tal es su *longitud*. Las vasijas o recipientes son comparables por su *capacidad*, las monedas por su *valor*, etc.

No poniendo más restricciones entrarían también en la categoría de magnitudes las cualidades abstractas que el hombre posee: bondad, amor, lealtad, etc.

135. **Cantidades: sus caracteres.**—Nosotros estudiamos sólo un género de magnitudes, las *cantidades*, y por ello supondremos en las cosas a que vamos a referirnos, los siguientes atributos:

1.° Que por el carácter común que las hace homogéneas pueda siempre apreciarse de un modo particular para cada género de cosas, pero siempre sin dejar lugar a dudas, cuando dos de esas cosas son *iguales* o *desiguales*.

Ejemplos: De los segmentos de recta sabemos que son iguales o desiguales en longitud, según sean o no coincidentes por superposición (*). De dos vasijas podremos afirmar que son iguales en capacidad cuando llenando una de ellas de un líquido y vertiendo éste en la otra, quede también llena. De dos objetos materiales podremos decir que son iguales en peso cuando se equilibran en los platillos de una balanza, etc.

2.° Que la relación de igualdad o desigualdad establecida entre dos magnitudes, A y B, sea reflexiva simétrica y transitiva (15), y la relación de desigualdad satisfaga a la condición de que si $A > B$ sea $B < A$, y viceversa, y que si $A > B$ y $B > C$ sea $A > C$.

3.° Que se pueda definir de un modo preciso la suma de dos magnitudes del género considerado, y esta suma sea otra magnitud del mismo género.

Ejemplo: La suma de las longitudes de dos segmentos es la longitud de un tercer segmento que se forma poniendo aquéllos consecutivos sobre una recta.

La suma de las capacidades de dos vasijas es la de una tercera que se llenaría justamente al verter en ella el líquido que contengan las otras dos, etc.

Obsérvese que a veces sólo se hace esto de un modo ideal, por ejemplo: la suma de los valores de una moneda de peseta y de otra de cinco céntimos no es valor de ninguna moneda acuñada; pero nada impide

(*) *Congruentes*, suele decirse mejor.

concebir que existiese efectivamente una moneda cuyo valor fuese de ciento cinco céntimos.

En cambio, no concebimos que puedan sumarse de un modo exacto las *bondades* de dos personas, etc.

4.° Que, recíprocamente, toda magnitud de las consideradas pueda concebirse como suma de varias magnitudes del mismo género, que se llaman *partes* de aquélla.

Ejemplos: La longitud de un segmento, la capacidad de una vasija, el peso de un cuerpo, etc., son divisibles en partes sin perder su naturaleza. Pero no en todas las cosas ocurre así. Las partes de una silla no son sillas, ni las de un hombre son hombres, etc.

5.° Que la suma definida con las magnitudes dadas sea uniforme, conmutativa y asociativa.

6.° Que por la suma de magnitudes iguales se pueda obtener una magnitud mayor que otra cualquiera prefijada (del mismo género).

136. **Unidad concreta.**—Supuestas las anteriores condiciones, llamaremos *unidad concreta*, o de medida, a la magnitud de uno cualquiera de los objetos considerados.

Así el metro es una unidad concreta, porque es la longitud de cierto segmento; el litro es una unidad concreta, porque es la capacidad de una vasija de 1 $dm.^3$ de volumen interno, etc.

La unidad concreta es, al mismo tiempo (en virtud de lo dicho), una cantidad, y recíprocamente cualquiera cantidad puede servir de unidad concreta entre sus homogéneas.

Por ejemplo: el peso de este libro podría servir de unidad de peso, etc.

Cantidad entera.—La suma de cierto número de unidades concretas es una *cantidad entera.*

Ejemplos: 7 metros, 8 litros, etc.

Si la cantidad suma de n unidades se toma como unidad, resultará compuesta de n partes iguales, llamadas *alícuotas*. Cada parte de estas se llama, en general, *enésima* o *eneava* parte de aquella unidad.

Ejemplo: Si la cantidad 5 pesetas la tomamos por unidad, llamándola *duro*, cada peseta será una parte alícuota del duro (que aquí se dice *quinta* parte).

137. **Producto de una cantidad por un número.**—Por ser la cantidad entera suma de n unidades iguales, se considera como *producto* de una de éstas por n.

Ejemplos:

$$1 \text{ duro} = 1 \text{ peseta} \times 5$$

$$1 \text{ m} = 1 \text{ dm} \times 10$$

En general, siendo C la cantidad que tiene n unidades iguales a U, se escribirá

$$C = U \,.\, n \quad (1)$$

A veces se cambia el orden escribiendo

$$C = n \,.\, U \quad (2)$$

pero lo mismo en la forma (1) que en la (2) debemos entender que esto significa

$$C = n \text{ veces } U$$

Cuando escribimos

$$\text{Un metro} = 10 \text{ dm.}$$

entendemos también que el metro es 10 veces un decímetro.

El número de unidades de que consta una cantidad entera se dice *que mide* dicha cantidad o que expresa su *medida* hecha con aquella unidad. En el ejemplo anterior se dirá que n es el número que mide a C, o que n expresa la medida de C hecha con la unidad U.

138. **Razón.**—El número que mide la cantidad C con la unidad U se llama también *razón* de la cantidad C con la *cantidad* U, porque es el resultado de *compararlas*. Cuando se mira así, la cantidad C, primera de las que se comparan, se llama *antecedente*, y la cantidad segunda U se llama *consecuente*. La igualdad (I) dice entonces que

$$\textit{Antecedente} = \textit{Consecuente} \times \textit{Razón}.$$

La razón es, pues, en el caso considerado, el número que expresa la medida del antecedente cuando se toma el consecuente por unidad, y también el número por quien hay que multiplicar la segunda cantidad para obtener la primera.

Por haberse escrito

$$\mathrm{C} = \mathrm{U} \cdot n$$

es natural escribir

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{U}} = n$$

es decir, que para indicar la razón de dos cantidades se usa la raya del cociente. Por eso se lee también: C partido por U igual a n, entendiendo que todas las expresiones anteriores tienen igual significado.

Así podemos decir indistintamente: un metro igual a 10 decímetros; el número que expresa la medida del metro tomando por unidad el dm. es 10; la razón de 1 metro con 1 dm. es 10, y 1 metro partido por 1 dm. igual a 10, porque en todos los casos, lo que queremos manifestar, es que *la suma de 10 decímetros es 1 metro.*

El alumno debe habituarse a emplear sin confusión estos diversos enunciados, todos ellos de uso frecuente en la práctica.

139. **Medida.**—*Medir* una cantidad entera es fijar la unidad de medida y determinar el número que expresa dicha medida.

Toda *cantidad entera* es *mensurable* con una de sus partes *alícuotas*. El número que expresa la medida es un número natural, pero se le llama también *número entero*, trasladando a él el adjetivo calificativo de la cantidad.

Todo número natural o entero es, por consiguiente, el representante abstracto de una cantidad entera.

140. **Relaciones entre cantidades y números.**—De los caracteres antes atribuídos a la igualdad, desigualdad y suma de las cantidades, y de los que poseen las mismas relaciones referidas a los números, resulta:

Que a dos cantidades iguales, medidas con la misma unidad, corresponden dos números iguales; a mayor cantidad, mayor número, y a la suma de dos cantidades, el número resultante de sumar los que expresan, en dicha unidad, las medidas de los sumandos.

Que a una cantidad A que sea la suma de *m* cantidades B, corresponde el múltiplo de orden *m* del número que mide a B. Por eso se dice entonces que A es múltiplo de B (de orden *m*). En particular, a doble cantidad, doble número, etc.

Recíprocamente: Un número que representa la medida de una cantidad, representa también todas las cantidades iguales a ella, supuesta la misma unidad concreta, etc.

141. **Nueva definición de número.**—Podemos, pues, definir ahora los números diciendo que *el número es un ente abstracto que determina la medida de una cantidad* (y de todas las iguales a ella).

Y podemos definir las cantidades diciendo que **cantidad** *es la magnitud determinable por números* (supuesta una unidad).

Dos cantidades se llaman *conmensurables* cuando admiten una unidad común; es decir, cuando son ambas múltiplos de una misma cantidad.

NÚMEROS NEGATIVOS

142. **Preliminares.** — Para comprender el alcance de las definiciones que luego hemos de dar, conviene anteponer las siguientes consideraciones:

La Geometría nos enseña que si sobre una recta, XY, tomamos un segmento, AB, éste puede suponerse engendrado por el movimiento de

X A B C Y

un punto que partiendo del origen A llega hasta el extremo B, en el sentido que llamaremos *positivo* o *de avance*, o bien partiendo del origen B llega al extremo A en el sentido que diremos *negativo* o *de retroceso*.

En otros términos: el segmento AB y el BA, aunque de la misma longitud, son de opuesta *cualidad* o *sentido*.

Sabemos también, que la suma de dos segmentos del mismo sentido, AB y BC, es el segmento AC, de igual sentido, que podríamos suponer engendrado por un punto móvil que parte del origen A, del primer sumando, y se detiene al llegar al extremo C, del segundo sumando.

Tendremos, pues,

$$AB + BC = AC. \quad (1)$$

Si medimos con una misma unidad estos segmentos, y son, respectivamente, a, b y c los números que expresan las medidas, la igualdad (1) se traduce en números por la

$$a + b = c \quad (2)$$

Podríamos enunciar estas observaciones diciendo:

I. *La suma de dos segmentos de igual sentido es otro segmento del mismo sentido cuya longitud es la suma de las longitudes de aquéllos.*

Es claro, que si del segmento AC restamos ahora el BC, la diferencia será el AB, de modo que

$$\mathrm{AC} - \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \quad (3)$$

y a esta igualdad corresponde, numéricamente, la

$$c - b = a \quad (4)$$

Pero para realizar mecánicamente la substracción indicada en la igualdad (3) podríamos haber supuesto un punto móvil que *avanzando* desde A a C, *retrocediese* en seguida de C a B; esto es, recorriese en sentido *positivo* el minuendo AC, y en sentido *negativo* el substraendo BC.

Como entonces la substracción no difiere de la suma, sino en el cambio de sentido de uno de los segmentos, podemos ampliar el concepto de la adición llamando **suma algébrica** *de dos segmentos al segmento que se obtiene recorriendo el primero y luego el segundo, tomando como origen de éste el extremo de aquél*, con lo cual la diferencia (3) se convierte en la *suma algébrica* AC + CB, y podrá escribirse:

$$AC + CB = AB \quad (5)$$

La ventaja que este convenio puede reportarnos es la de que mientras el concepto de substracción parece envolver (como en los números naturales realmente ocurre) la condición de ser el substraendo menor que el minuendo, la *suma algébrica* puede efectuarse aunque el sumando negativo sea mayor que el positivo. Así, ninguna imposibilidad hay en que sumemos algébricamente el segmento positivo BC con el negativo CA, lo que nos daría

$$BC + CA = BA \quad (6)$$

y esto, escrito en forma de diferencia, se formula:

$$BC - AC = BA \quad (7)$$

Convendremos, pues, en que esta igualdad (7) tenga la significación de la (6), y por tanto: Una diferencia (de segmentos) en que el substraendo sea mayor que el minuendo, equivale a la *suma algébrica* del minuendo con el substraendo **cambiado de sentido.** Con lo cual serán realizables todas las diferencias, y lo único que acontecerá es que, cuando el substraendo sea mayor que el minuendo, si éste es positivo, la diferencia será un segmento *negativo*. Además, vemos que:

II. *La suma algébrica de dos segmentos de opuesto sentido es otro del sentido del mayor y cuya longitud es la diferencia de las longitudes de aquéllos.*

Ahora bien: para que al pasar de la consideración de los segmentos a la de los números que los miden no se rompa la armonía que debe existir entre las cantidades y los números, según dijimos, (140) es preciso que los números vayan provistos de algún signo que indique la cualidad o sentido de los segmentos a que se refieren.

Desde luego podríamos inventar, a tal fin, un signo cualquiera, por ejemplo: el signo *(p)* para los números que representen medidas de segmentos de sentido positivo, y el *(n)* para los que fueren de sentido negativo. Así la traducción en números de la *suma algébrica* (6), sería

$$[(p)\,b]+[(n)\,c]=(n)\,a.$$

Pero es más sencillo, y más conveniente, usar en vez del signo *(p)* el signo +, y en vez del signo *(n)* el signo —, con lo cual la igualdad precedente se escribiría

$$(+b)+(-c)=-a$$

y esto significa que si al segmento *positivo* cuya longitud es b, le sumamos algébricamente el segmento *negativo* de longitud c, resulta el segmento *negativo* de longitud a.

Nótese bien, para evitar confusiones, que el signo + o — que acompaña *dentro* de los paréntesis a los números b y c, indica *la cualidad* y no ninguna operación, mientras que el signo + situado *entre* los paréntesis sigue teniendo la significación de signo *de sumar*.

También debemos observar que siendo arbitrario el elegir como positivo uno u otro de los dos sentidos en que puede suponerse recorrido un segmento, mientras éste se considere aislado, el número, sin signo, que expresa la longitud de un segmento puede afectarse del signo +, es decir, considerarlo como positivo; y, por tanto, igual significan, por ejemplo:

7, que (+ 7); 5, que (+ 5); etc.

143. **Clases de enteros.**—De lo dicho resulta que los números enteros pueden ser:

1.º *Naturales*, o sin signo, como 1, 2, 3, etc.

2.º *Positivos* (esto es, representantes de longitudes de segmentos de sentido positivo) que llevan + como (+ 1), (+ 2), (+ 3), etc.

3.º *Negativos* (que representan longitudes de segmentos de sentido negativo) los cuales llevan antepuesto el signo —, como (— 1), (— 2), (— 3), etc.

4.º Además, consideramos el número *o*, que indistintamente puede escribirse *o*, (+ *o*) y (— *o*).

144. **Imagen gráfica.** — Así como dimos una imagen gráfica de los números naturales, podemos darla de los números enteros, representándolos por segmentos medidos sobre cada una de las semirrectas que determina el punto O sobre la recta XY, asignando al punto O el cero, y colocando los números positivos hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda en la siguiente forma:

X ... —4 —3 —2 —1   0 +1 +2 +3 +4 ...   Y

145. **Cantidades de opuesta cualidad.**—Lo que acerca de los segmentos positivos y negativos y de su suma algébrica hemos dicho puede

aplicarse de modo análogo a otras cantidades que admitan ser consideradas en dos opuestos sentidos, de tal suerte, que, llamando positivo a uno de ellos y negativo al otro, se verifique que el conjunto de una unidad positiva y otra negativa equivalga al conjunto nulo; lo cual se expresaría en números por la igualdad

$$(+1) + (-1) = 0.$$

Así, por ejemplo: el tiempo puede admitir, a partir de un instante presente, los dos sentidos opuestos de *pasado* y *futuro*; las cantidades de dinero que un comerciante toma en cuenta pueden ser opuestas según deban figurar como *gastos* o *ingresos*; un kilogramo en el platillo de la derecha de una balanza, *más* un kilogramo en el de la izquierda se anulan en cierto modo, es decir, dejan la balanza en el fiel, etc.

A todos estas cantidades de cualidad opuesta se les podrían extender las consideraciones hechas respecto de la longitud; porque midiendo dichas cantidades resultarían números, que, por ahora, supondremos enteros, y ya hemos visto que éstos pueden representarse gráficamente mediante segmentos positivos o negativos.

Por eso, en lo sucesivo, al hablar de números positivos o negativos supondremos que provienen de la medida de cualesquiera cantidades que admitan esa doble cualidad.

146. **Suma de enteros.**—Para que la suma de números enteros esté conforme con la de las cantidades cuya medida representan, debemos definir aquélla de tal modo, que, amoldándose, por una parte, a lo que de la suma algébrica he-

mos dicho, no contradiga, por otra, lo que ya sabemos respecto de las operaciones con números naturales.

A estas condiciones se ajustan las definiciones siguientes:

I. *Por suma de dos números ambos positivos o ambos negativos se entiende otro número de igual signo que los sumandos y de valor* (*) *igual a la suma de los valores de aquéllos.* (Véase I n.º 142).

II. *Por suma de dos números de signo contrario se entiende el número de signo igual al que lleve el de mayor valor, y cuyo valor es la* **diferencia** *de los valores de los sumandos* (II, n.º 142).

Ejemplos:

$$(+2)+(+5)=+7$$
$$(-2)+(-5)=-7$$
$$(+2)+(-5)=-3$$
$$(-2)+(+5)=+3$$
$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$
$$\left.\begin{aligned}(+a)+(-b)&=+(a-b) \text{ si } a>b\\ (+a)+(-b)&=-(b-a) \text{ si } a<b\end{aligned}\right\}$$

Por suma de *varios* números, dados en cierto orden, se entiende el resultado de sumar el 1.º con el 2.º, la suma de ambos con el 3.º, etc.

147. **Propiedades de la suma algébrica.** La suma algébrica de dos números es *conmutativa*. Por-

(*) Al decir *valor*, entendemos el que se obtiene prescindiendo del signo. Suele llamarse valor absoluto.

que en cuanto al valor ya lo sabíamos, y el signo no depende del orden de los sumandos.

Cuando la suma tiene tres términos, se presentan, respecto a los signos, los siguientes casos:

$(+a)+(+b)+(+c)$	$(-a)+(-b)+(-c)$
$(+a)+(+b)+(-c)$	$(-a)+(-b)+(+c)$
$(+a)+(-b)+(+c)$	$(-a)+(+b)+(-c)$
$(+a)+(-b)+(-c)$	$(-a)+(+b)+(+c)$

los cuales hemos ordenado de modo que los que figuran a la derecha son análogos a los de la izquierda, aunque con todos los signos cambiados.

Las consideraciones antes expuestas sobre la suma algébrica de segmentos para hacer intuitiva la definición, nos aseguran, con igual carácter intuitivo, que si cambiásemos en la suma algébrica de tres segmentos el sentido de todos ellos, los resultados, iguales en longitud, serían solamente opuestos en sentido, y esto, respecto a los números que miden aquellos segmentos, quiere decir que las operaciones de la derecha del cuadro anterior darán un resultado de igual valor, pero de signo opuesto, al de las correspondientes operaciones de la izquierda.

Además, es notorio que si al hacer sumas de segmentos realizamos sucesiva e inmediatamente dos *avances* podemos reemplazarlos por un avance único, y lo mismo si son dos *retrocesos;* es decir, que podemos asociar dos sumandos *consecutivos* de igual sentido. Esto, en cuanto a los números, significa que pueden *asociarse* dos sumandos *consecutivos* de igual signo.

Con este precedente puede deducirse que la suma algébrica de tres sumandos, unos positivos y otros negativos, equivale a la suma algébrica de los positivos más la de los negativos.

En efecto: si la suma es la

$$(+a)+(+b)+(-c)$$

basta asociar los dos primeros términos y se tendrá

$$[+(a+b)]+(-c).$$

Si la suma fuese la

$$(+a)+(-b)+(-c),$$

asociando los dos últimos saldría

$$(+a)+[-(b+c)]$$

Y si fuese la suma

$$(+a)+(-b)+(+c)$$

podríamos, por la definición de suma de varios sumandos, asociar los dos primeros, y substituir el resultado por la suma igual $(-b)+(+a)$, con lo que se obtendría

$$(-b)+(+a)+(+c)=(-b)+[+(a+c)],$$

y por la propiedad conmutativa para dos términos

$$[+(a+c)]+(-b),$$

que era lo que pretendíamos probar.

148. **Convenio de escritura.** — Haremos ahora el siguiente convenio, que simplifica mucho la escritura:

La suma algébrica de varios sumandos se indica escribiendo éstos unos a continuación de otros, sin más signo que el que por su cualidad de positivos o negativos les pertenece.

Además, si el primer término es positivo, puede suprimirse su signo (142).

De este modo las fórmulas anteriores se convierten en

$$a + b + c$$
$$a + b - c$$
$$a - b - c,$$

y, según hemos visto, resulta :

$$a + b - c = (a + b) - c$$
$$a - b - c = a - (b + c)$$
$$a - b + c = (a + c) - b.$$

Como *estos mismos son los resultados* que se obtienen haciendo operaciones de suma y resta con tres números naturales a, b y c cuando las substracciones son realizables, estamos seguros de no llegar a ninguna contradicción, y de que la *suma algébrica* de números enteros comprende como caso particular la serie de sumas y restas de números naturales.

Además, siendo la suma algébrica de dos o tres términos conmutativa, y pudiendo admitirse como intuitiva la propiedad uniforme, será también cierta la asociativa, (24) y la suma algébrica gozará, por tanto, de las mismas propiedades que la suma aritmética, o de números naturales.

149. **Posibilidad de toda substracción.** — En virtud de lo que antecede, la substracción puede siempre considerarse como operación realizable, pues aunque el minuendo sea menor que el substraendo, por ejemplo, en 2 — 5, bastará considerar esta operación como *suma algébrica* de dos *enteros*, uno positivo y otro negativo,

$$(+2) + (-5)$$

y esta suma es realizable y da por resultado el número *negativo* -2. Mas es claro que no siendo éste un número natural, representante sólo de una pluralidad determinada, sino un número *entero* apto para representar la *medida de una cantidad*, sólo adquirirá significación cuando dicha cantidad, considerada en general, admita el doble sentido positivo y negativo que hemos atribuído a las longitudes medidas sobre una recta, a partir de un punto.

150. **Serie de sumas y restas.**— Siendo realizable en el campo de los números enteros la operación de restar, podremos considerar que la serie de sumas y restas

$$4-7+2-1-5+4$$

por ejemplo, es también realizable, puesto que equivale a la *suma algébrica de enteros*

$$(+4)+(-7)+(+2)+(-1)+(-5)+(+4)$$

y como ésta es realizable, ya sea sucesivamente, ya considerando separadamente la suma de términos positivos y la de los negativos, diremos:

La serie de sumas y restas $4-7+2-1-5+4$, puede efectuarse de dos modos. Progresivamente, diciendo: $4-7=-3$ (resultado de la suma de *enteros* $(+4)+(-7)$); $-3+2=-1$, $-1-1=-2$; $-2-5=-7$; $-7+4=-3$; o bien diciendo: primero, $4+2+4=10$; $7+1+5=13$, y luego $10-13=-3$.

Queda demostrado que de ambos modos el resultado final es el mismo. Si dicho resultado es un número natural, será siempre interpretable. Si es negativo, será interpretable cuando considerado como medida de una cantidad pueda ésta tener la cualidad negativa.

Para completar lo que nos proponemos, sólo nos falta considerar la substracción de *enteros*.

151. **Substracción de enteros.**— *Dados dos números enteros* (positivos o negativos), *se llama* **diferencia** *el número que sumado con el segundo, da el primero.*

Dicho número existe y es único. Existe, porque si representamos por α y β los números dados el número $\alpha + (-\beta)$, sumado con el β da

$$(+\alpha) + (-\beta) + (+\beta) = +\alpha$$

puesto que se pueden asociar $-\beta$ y $+\beta$, y su suma es cero.

Que la diferencia es única, es consecuencia de haber admitido que la suma es uniforme.

La substracción algébrica se convierte, por consiguiente, en suma, con sólo cambiar el signo del substraendo.

Ejemplos:

$$4 - (-7) = 4 + 7, \quad 4 - (+7) = 4 - 7,$$

y en general

$$\begin{array}{lcl} a - (+b) = a - b & & a - b = a - (+b) \\ a - (-b) = a + b & \text{o} & a + b = a - (-b) \end{array}$$

Observemos que esto equivale a cambiar de signo al número que se encierra en un paréntesis cuando éste va precedido del signo $-$, o a suprimir el paréntesis precedido del signo —, *cambiando de signo el número encerrado en él.*

Lo mismo se puede hacer en la serie de sumas y restas. Así

$$a - (b - c) = a - (+ b - c) = a - b + c = a + c - b$$

Y obsérvese que este resultado es el mismo que se obtuvo al restar de un número una diferencia cuando era posible aritméticamente la operación.

152. *Consecuencia final.*—En la operación

$$a + b - (c - f) + (g + h) - (i + j) + m$$

se puede: suprimir los paréntesis precedidos del signo +; y suprimir los paréntesis precedidos del signo —, pero cambiando los signos que figuran dentro del paréntesis. Así se obtiene

$$a + b - c + f + g + h \quad i - j + m$$

En esta operación se puede, inversamente, encerrar en paréntesis precedidos del signo + los términos que se desee, conservando a cada uno de ellos su signo; y encerrar en paréntesis precedidos del signo — los términos que se quiera, pero cambiando el signo que les afecta.

Así podrá escribirse, por ejemplo,

$$a + (b - c + f) - (- g + h) - (i + j) + m$$

Para obtener rápidamente el resultado final, lo mejor es suprimir los paréntesis y sumar separadamente los términos positivos y los negativos.

Casos particulares:

$$-(-a) = +a$$
$$-(+a) = -a$$

153. **Multiplicación y división** —La multiplicación y división de números negativos (o positivos y negativos) se efectúa determinando primero el signo del resultado por la regla que sigue, y verificando luego la operación como con los números naturales.

Regla de los signos.— *Un producto de dos factores, o un cociente, lleva el signo + si los dos términos son de igual signo, y el — si son de signo contrario.*

Ejemplos:

$(-2).(-5) = +10$; $(-4).3 = -12$; $6.(-5) = -30$; $(-a).(+b) = -a.b$; $(-a).(-a) = +a^2$;

$\frac{40}{-8} = -5$; $\frac{-30}{-6} = 5$; $\frac{-4.a}{-a} = 4$; $\frac{-12.m}{m} = -12$,

etcétera.

Un producto de varios factores lleva el signo + o el — según que el número de factores **negativos** *sea par o impar.*

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Primeras propiedades

154. La nueva definición de número (141), y las consideraciones relativas a la medida de las cantidades conmensurables, conducen a la admisión de otros números distintos de los enteros.

Unidades fraccionarias.—Cuando una cantidad se repite *n* veces para formar otra, la primera es, como ya dijimos, una *enésima* parte de la segunda. Esta enésima parte de una cantidad que podría tomarse como *unidad entera* es, a su vez, si queremos, una nueva *unidad*, pero *fraccionaria;* y así considerada se llama *eneavo* o *unidad fraccionaria de denominador* n.

La unidad entera contiene n *eneavos.*

Según demos al denominador *n* el valor 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se dirá en vez de eneavo, medio, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo o noveno; pero si el denominador es 11, 12, etc., se sigue la nomenclatura general diciendo: onceavo, doceavo, etc.

La unidad entera tiene, pues, 2 medios, 3 tercios, etc.

155. **Fracciones y números fraccionarios.** —*Fracción* es un conjunto de unidades fraccionarias de igual denominador.

Ejemplo: 5 *treceavos* de metro. Aquí la unidad entera es el metro; la unidad fraccionaria, el treceavo del metro y el número 5 de estas unidades fraccionarias que tomamos para formar la fracción es el numerador de ella, porque, efectivamente, *numera* los treceavos que consideramos.

Al medir una cantidad con una unidad homógenea con ella, puede ocurrir que la cantidad no sea un conjunto exacto de unidades enteras, pero sí un conjunto de unidades fraccionarias obtenidas dividiendo la unidad entera en partes iguales. Entonces, para expresar la medida, necesitamos *dos* números naturales: uno que indica de cuántas unidades fraccionarias consta la fracción o cantidad dada, y se llama *numerador*, como hemos dicho; y otro que es el *denominador* de la unidad fraccionaria que empleamos para hacer la medida, e indica, según se sabe, el número de partes en que se dividió la unidad entera.

Para generalizar lo dicho (139) al resultado de la medida, tomado en abstracto, se le debe llamar *número*, agregando, para evitar confusión, el calificativo *fraccionario*. Por eso, el conjunto de los dos números naturales que expresan una fracción se considera como un solo *número fraccionario*.

Como el número fraccionario expresa en abstracto la medida de una fracción de cierta unidad, se dice indistintamente, por abreviar, fracción o número fraccionario.

La nomenclatura y escritura de fracciones se suponen ya conocidas.

156. **Razón fraccionaria.**—Siendo el núme-

ro fraccionario el resultado de la medida de una cantidad conmensurable con otra (que es la unidad elegida), es natural extender a este caso las definiciones y notaciones conocidas (137 y 38). Si midiendo la cantidad C con la cantidad U resulta el número fraccionario $\frac{m}{n}$, este número será la *razón* de C con U, lo cual se expresa escribiendo

$$C = U \cdot \frac{m}{n} \quad o \quad C = \frac{m}{n} U \text{ (se lee: } m \text{ eneavos de U)}$$

También puede escribirse :

$$\frac{C}{U} = \frac{m}{n} \text{ (se lee: razón de C con U, } m \text{ eneavos)}$$

Cualquiera de estas expresiones significa que C es m veces la *enésima* parte de U, o, lo que es igual, que existe una nueva unidad (la enésima parte de la primera) que está contenida n veces en U y m veces en C.

157. **Números racionales.**—De ahora en adelante podemos, en virtud de lo que antecede, considerar dos clases de números : los *enteros* (que son los mismos números naturales, desde otro punto de vista), y los *fraccionarios*. A unos y otros se les da, juntamente, el nombre de *números* **racionales.**

Dos números *racionales* son iguales, o mejor, *equivalentes*, cuando expresan la medida de una misma cantidad.

158. **Valor de la unidad y de un entero.**—Como n eneavos forman la unidad entera, podemos escribir

$$1 = \frac{n}{n}$$

Y como a unidades enteras contienen $a \cdot n$ eneavos, decimos que

$$a = \frac{a \cdot n}{n}$$

es decir, que *un entero equivale a una fracción cuyo numerador es el producto de aquel entero por un número, y el denominador es este número.*

Ejemplos: Poner el entero 6 en forma de fracción de denominador 7. Se tendrá:

$$6 = \frac{6 \cdot 7}{7} = \frac{42}{7}$$

Expresar x en n-avos. $x = \frac{x \cdot n}{n}$

159. **Teorema fundamental.**—*Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número (natural), la fracción resultante es equivalente a la primera.*

Así

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

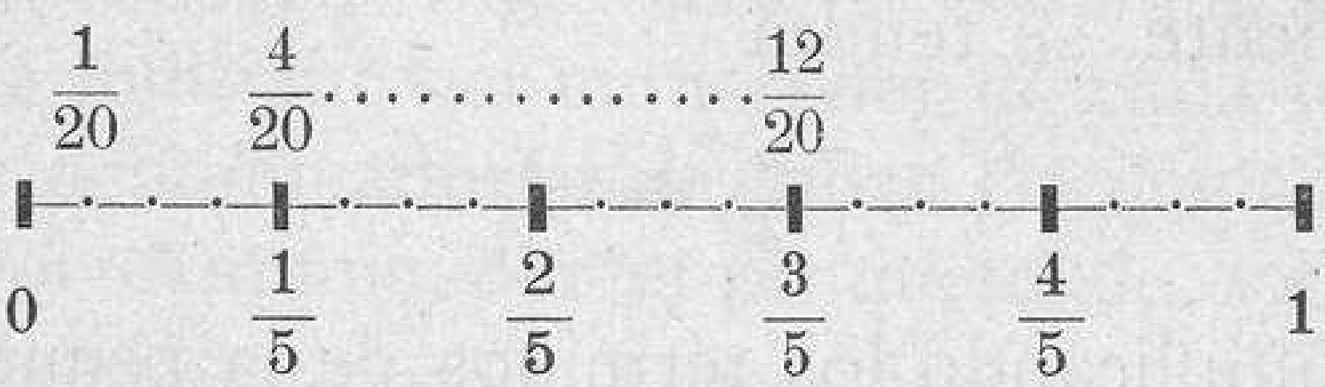
Tomemos un *b-avo* de la unidad entera y dividámoslo en n partes, con lo que resultarán $b \cdot n$ partes en la unidad entera. Si en vez de un solo *b-avo* tomamos a *b-avos*, resultarán $a \cdot n$ partes de las dichas. Luego los a *b-avos* equivalen a $a \cdot n$ $(b \cdot n)$*-avos.*

Repetiremos la demostración con un ejemplo numérico para facilitar el lenguaje. Vamos a probar que

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$$

Diremos: Tomemos *un quinto* de la unidad entera y dividámosle en 4 partes, con lo que resultarán 20 partes en la unidad entera. Si en vez de un solo quinto tomamos 3 quintos, resultarán 12 partes de las dichas, es decir, 12 veinteavos.

Véase comprobado este ejemplo en la figura adjunta:



Recíproco.—Es claro que si multiplicando por n los dos términos de $\frac{a}{b}$ resulta la fracción equivalente $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, dividiendo los dos términos de ésta por n resulta aquélla, luego:

Si se dividen los dos términos de un fracción por un *divisor común*, se obtiene otra equivalente.

160. **Simplificación**—Simplificar una fracción es hallar otra equivalente de términos menores.

Cuando los dos términos tienen un divisor común (distinto de 1) se consigue evidentemente la simplificación dividiendo los dos términos por dicho divisor.

Ejemplos:

$$\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}, \quad \frac{21}{28} = \frac{21:7}{28:7} = \frac{3}{4}, \quad \frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a}{b}.$$

161. **Fracción irreducible.**—Si se dividen los dos términos de una fracción por su m. c. d., resulta simplificada y con los términos *primos entre sí* (110). La fracción así obtenida se llama *irreducible* (que no se puede *reducir* o simplificar),

porque *otra cualquiera equivalente a ella tiene sus términos equimúltiplos de los de la dada, y, por tanto, no menores.*

En efecto: Sea la fracción $\frac{a}{b}$ en que suponemos a y b primos entre sí. Si la fracción $\frac{x}{y}$ es la equivalente, se tendrá

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}.$$

Multiplicando los términos de la primera por y, y los de la segunda por b, se tendrá:

$$\frac{a \cdot y}{b \cdot y} = \frac{x \cdot b}{b \cdot y},$$

pero dos fracciones de igual denominador no pueden ser iguales más que siendo iguales sus numeradores, luego

$$a \cdot y = x \cdot b \quad (1)$$

Como x es divisor del segundo miembro, tendrá que serlo del primero, esto es, del producto de dos factores $a \cdot y$, y como es primo con a, tendrá que ser divisor de y (111). El número y, múltiplo de b, será, pues, de la forma

$$y = b \cdot n$$

y poniendo en vez de y su igual $b \cdot n$ en la igualdad (1), resulta

$$a \cdot b \cdot n = x \cdot b$$

de lo que se deduce $x = a \cdot n$. Los números x e y son, pues, múltiplos de a y b del mismo orden de multiplicidad, es decir, son equimúltiplos de a y b (41).

162. **Reducción a denominador común.**— En la demostración anterior hemos reducido las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{x}{y}$ a *denominador común*, lo cual quiere decir: transformarlas en otras equivalentes que tengan entre sí igual denominador.

Para reducir fracciones a denominador común se multiplica el numerador de cada fracción por los denominadores de todas las demás, y se pone por denominador el producto de todos los denominadores.

Ejemplo: Sean las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$.

Resultará

$$\frac{2}{3} = \frac{2.(5.7)}{3.(5.7)} \quad » \quad \frac{4}{5} = \frac{4.(3.7)}{5.(3.7)} \quad » \quad \frac{6}{7} = \frac{6.(3.5)}{7.(3.5)}$$

Caso particular.—Si se tratase de dos fracciones tales como $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{15}$ en que fácilmente se advierte por qué número hay que multiplicar el denominador de la primera para obtener el de la segunda, basta multiplicar por dicho número los dos términos de la primera fracción para tener su equivalente de igual denominador que la segunda. Así, observando que $3 . 5 = 15$, será

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ y ésta y la $\frac{4}{15}$ tienen igual denominador

Se puede, más en general, hallar el mínimo denominador común de varias fracciones, haciéndolas irreducibles y multiplicando los dos términos de cada una por el cociente de dividir el m. c. m. de los denominadores por el denominador de la fracción que se considera.

Ejemplo: Sean las fracciones $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{1}{18}$. El m. c. m. de los denominadores es 72.

$$\left.\begin{array}{lll} 1.^{er}\text{ numerador} & (72:\ 8)\ .\ 5=45 \\ 2.^{o}\quad\text{íd.} & (72:\ 6)\ .\ 7=84 \\ 3.^{er}\quad\text{íd.} & (72:18)\ .\ 1=\ 4 \end{array}\right\} \frac{5}{8}=\frac{45}{72}\text{ » }\frac{7}{6}=\frac{84}{72}\text{ » }\frac{1}{18}=\frac{4}{72}$$

163. **Comparación de fracciones.**—Si partimos de una fracción irreducible $\frac{3}{5}$, p. ej., y formamos la serie de equimúltiplos de sus términos (a excepción del de orden 0, y del de 1.^{er} orden), obtendremos todas las fracciones iguales a la propuesta

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\ldots\ldots \text{ etc.}$$

Para comparar dos fracciones cualesquiera se reducen a un común denominador, y la misma relación de igualdad o desigualdad que exista entre los numeradores existirá entre aquellas fracciones.

Así, para $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, reduciéndolas a común denominador saldrán, respectivamente, las equivalentes

$$\frac{a.d}{b.d} \text{ y } \frac{c.b}{b.d}$$

y según sea $a\ .\ d \gtreqless c\ .\ b$, será $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$.

Caso particular: Si las fracciones tienen igual numerador, por ejemplo: $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$, se tendría, que según

$$a\ .\ c \gtreqless a\ .\ b, \text{ sería } \frac{a}{b} \gtreqless \frac{a}{c}$$

pero $a \cdot c \gtreqless a \cdot b$ según sea $c \gtreqless b$, luego separando los signos, si

$$c > b \text{ es } \frac{a}{b} > \frac{a}{c}, \text{ y si es } c < b \text{ es } \frac{a}{b} < \frac{a}{c},$$

es decir:

De dos fracciones de igual numerador es *menor* la que tiene *mayor* denominador, y viceversa.

164. **Entero en forma fraccionaria.**—Sabemos que

$$a = \frac{a.n}{n}$$

Pero si dividimos los dos términos de la fracción $\frac{a.n}{n}$ por n, saldrá la forma $\frac{a}{1}$, que deberemos conceptuar como igual al entero a.

Es decir: que *a todo entero se le puede dar la forma fraccionaria poniéndole por denominador* 1.

Claro es que, propiamente hablando, $\frac{a}{1}$ no es una fracción, porque su denominador no indica una parte de la unidad, sino la unidad misma; pero aparte de lo que acabamos de ver se justifica también que $a = \frac{a}{1}$ considerando $\frac{a}{1}$ como *razón* de la cantidad medida por el número a con la unidad 1, y esta razón es precisamente igual al entero a.

Se obtiene además de este modo la ventaja de que *todos* los números *racionales* se pueden representar bajo la forma fraccionaria $\frac{a}{b}$ siendo a y b números *distintos de cero*.

Si $a = o$ se obtiene la forma $\frac{o}{b}$ que convenimos en que represente cero. (*) Pero si $b = o$ la expresión $\frac{a}{b}$, que entonces sería $\frac{a}{o}$, *carece de sentido.*

165. La comparación de fracciones, y de éstas con los enteros, nos hace ver que *que entre dos enteros consecutivos hay infinidad de números fraccionarios.* Por ejemplo: entre *o* y 1 están las infinitas fracciones que tienen el numerador menor que el denominador, como son:

$$\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \frac{5}{n} \ \cdots \ \frac{n-1}{n}.$$

Pero también entre dos fracciones de igual denominador y numeradores consecutivos hay infinidad de fracciones.

Por ejemplo: entre $\frac{o}{n}$ y $\frac{1}{n}$ es decir, entre *o* y $\frac{1}{n}$, podríamos poner todas las infinitas fracciones cuyo numerador sea 1 y su denominador *mayor* que *n*.

Así, entre *o* y $\frac{1}{2}$ podríamos poner $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ etc. Entre *o* y $\frac{1}{3}$, se podrían poner $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ etc.

En resumen: *entre dos números racionales*

(*) Así se justifica cuando la fracción se considera como cociente.

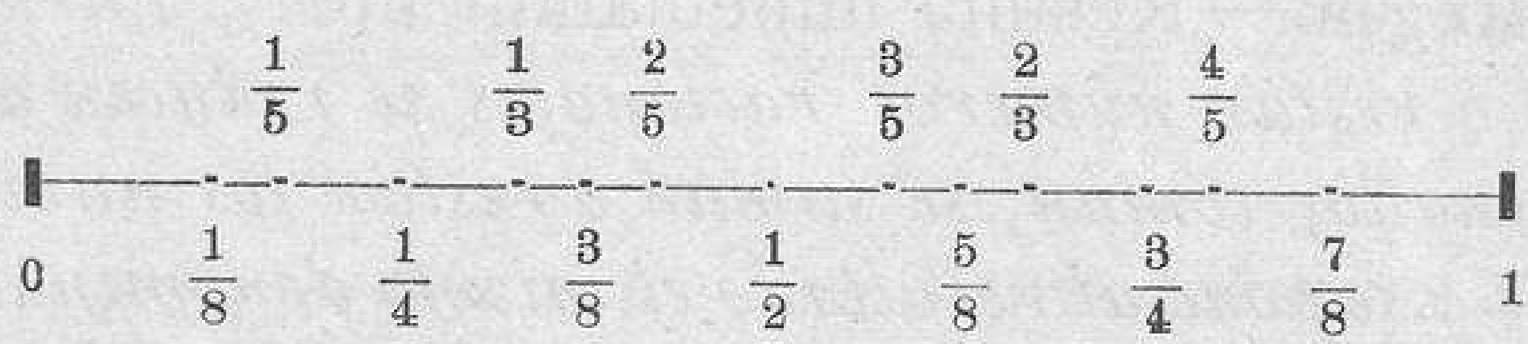
cualesquiera hay **infinitos** *números racionales.*

Así, entre los puntos que en la imagen gráfica de la serie de números naturales 0, 1, 2... corresponden a los extremos de los segmentos medidos por estos números, podemos marcar infinitos puntos correspondientes a segmentos conmensurables con la unidad elegida.

Por ejemplo: dentro del segmento 0, 1, que ahora reproducimos ampliado, están los medidos por los números

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \frac{5}{9}\ \text{etc.}$$



Pero *permanece en duda* por ahora si, aun marcando los extremos de todos los segmentos conmensurables con la unidad dada y comprendidos entre 0 y 1, quedarán todavía entre esos puntos *huecos* en que puedan marcarse nuevos puntos.

Y obsérvese que, si así fuera, habría segmentos cuya medida no sería ni un entero ni una fracción, o lo que es igual segmentos que no podrían medirse con la unidad elegida de un modo completo. Si tales segmentos existiesen, podrían justamente llamarse *inconmensurables;* y si a esos segmentos correspondían expresiones numéricas que pudieran llamarse números, como no serían enteros ni fraccionarios, es decir, como no serían *racionales*, se llamarían, justamente, *irracionales.*

Veremos más adelante que así ocurre, en efecto.

Operaciones con números racionales

Adición y substracción

166. **Definición.** —*Llamaremos suma o diferencia de números racionales al número que mide la suma o diferencia de las cantidades medidas por los números dados.*

Regla.—Resulta inmediatamente: *Para sumar o restar números racionales se reducen a denominador común, se suman o restan los numeradores y se pone al resultado el mismo denominador.*

Por ejemplo:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}, \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

Porque, evidentemente, $(a + b)$ *eneavos* es una cantidad suma de a eneavos con b eneavos. Y lo mismo para la diferencia.

167. **Propiedades** —Como procediendo de la manera dicha la suma o resta de números racionales queda reducida a sumar o restar enteros y poner luego cierto denominador, por ser la suma de enteros uniforme, conmutativa y asociativa, estas mismas propiedades tendrá la suma de fracciones y de enteros y fracciones, es decir, de números *racionales*. Y lo mismo se conservarán las propiedades de la diferencia.

Ejemplo: $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{b}{n}+\frac{a}{n}$; porque la primera suma daría $\frac{a+b}{n}$, y la segunda, $\frac{b+a}{n}$ y $a+b=b+a$.

En particular: *Si la fracción* $\frac{a}{b}$ *tiene el numerador*, a, *mayor que el denominador* b, *es igual a un entero, que es el cociente de dividir* a *por* b, *más una fración cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor.* Porque si dividiendo a por b obtenemos el cociente c y el resto r, por la fórmula del dividendo será $a=b\,.\,c+r$, y tendremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{b\,.\,c+r}{b}=\frac{b\,.\,c}{b}+\frac{r}{b}=c+\frac{r}{b}.$$

La expresión $c+\frac{r}{b}$ se llama *número mixto.* Luego una fracción cuyo numerador sea mayor que el denominador es igual a un número mixto, cuya parte entera es el cociente de $a:b$. Hallar este entero se suele decir *extraer el entero* de la fracción $\frac{a}{b}$. Leyendo de derecha a izquierda las igualdades (I) se ve que para *reducir un número mixto a fracción se multiplica el entero por el denominador, se suma el numerador y se pone el mismo denominador.*

168. *Diversos ejemplos de suma y resta.*

1.° $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$

2.° $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{20+24+15}{30}=\frac{59}{30}=1\,\frac{29}{30}$

3.° $2+\frac{4}{5}=2\,\frac{4}{5}=\frac{10+4}{5}=\frac{14}{5}$

$\frac{4}{5}+2=\frac{4+10}{5}=\frac{14}{5}$

4.° $2\,\frac{4}{5}+3\,\frac{1}{8}=5+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{8}\right)=5+\frac{32+5}{40}=$
$=5+\frac{37}{40}$

5.° $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

6.° $\frac{4}{9}-\frac{1}{8}=\frac{32-9}{72}=\frac{23}{72}$

7.° $\frac{3}{5}-\frac{4}{15}=\frac{9}{15}-\frac{4}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

8.° $2-\frac{4}{5}=\frac{10-4}{5}=\frac{6}{5}$, $\frac{15}{4}-3=\frac{15-12}{4}=\frac{3}{4}$

9.° $4\,\frac{2}{3}-2\,\frac{1}{5}=4\,\frac{10}{15}-2\,\frac{3}{15}=2\,\frac{7}{15}$

10.° $4\,\frac{1}{5}-2\,\frac{2}{3}=\frac{21}{5}-\frac{8}{3}=\frac{63-40}{15}=\frac{23}{15}=1\,\frac{8}{15}$

11.° $a+\frac{b}{c}=\frac{a.c+b}{c}$, $\frac{m}{n}+p=\frac{m+n.p}{n}$

12.° $a-\frac{b}{c}=\frac{a.c-b}{c}$, $\frac{m}{n}-p=\frac{m-n.p}{n}$

13.° $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\left(\frac{r}{b}-\frac{m}{d}\right)=\frac{a\,.\,d+c\,.\,b}{b\,.\,d}-$
$-\frac{r\,.\,d-m\,.\,b}{b\,.\,d}=\frac{a\,.\,d+c\,.\,b-r\,.\,d+m\,.\,b}{b\,.\,d}.$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

169. **Multiplicación por un número natural.**—La multiplicación de una fracción por un número natural tiene por objeto sumar el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador.

Ejemplos :

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2}{3} = \frac{2 \times 4}{3}$$

$$\frac{a}{b} \times n = \overbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \ldots}^{n \text{ veces}} = \frac{\overbrace{a + a + a \ldots}^{n \text{ veces}}}{b} = \frac{a \cdot n}{b}$$

Para multiplicar una fracción por un número (natural) se multiplica el numerador y se conserva el mismo denominador.

Los ejemplos anteriores justifican esta regla.

170 **División por un número natural.**—El cociente de dividir una fracción por un número natural es el número racional que multiplicado por el divisor produzca el dividendo.

Ejemplos :

$$\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5 \cdot 4}, \text{ porque } \frac{2}{5 \cdot 4} \times 4 = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{2}{5},$$

que es el dividendo.

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}, \text{ porque } \frac{a}{b \cdot n} \times n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$$

Para dividir una fracción por un número (natural) se conserva el numerador y el denominador se multiplica por el número.

Los ejemplos anteriores justifican esta regla.

171 **Posibilidad de la división de enteros.** —*Un cociente de enteros es igual a una fracción cuyo numerador es el dividendo y el denominador el divisor.* Y esto aunque la división no sea realizable en números naturales.

Es decir, que

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Porque $\frac{a}{b}$ multiplicando por el divisor b da

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{a \cdot b}{b} = a, \text{ que es el dividendo.}$$

Los números fraccionarios hacen, por consiguiente, posibles todas las divisiones, pues cuando una división sea inexacta, es decir irrealizable en el campo de los números naturales, por ejemplo: 2 : 3, diremos que el cociente es la fracción $\frac{2}{3}$.

Claro que este cociente solo tiene interpretación considerado como número racional, esto es, como medida de una cantidad divisible en partes.

Comparando con lo que respecto a la substración se dijo en el número (149) se ve que así como los números negativos salvan la imposibilidad de la substracción cuando el minuendo es menor que el substraendo, los números fraccionarios salvan la imposibilidad de la división cuando el dividendo no es múltiplo del divisor.

Para evitar confusiones, cuando una división no es exacta en números naturales llamaremos *cociente entero* al que en ella se obtenía, y *cociente completo* al que se obtiene haciendo uso de las fracciones. El cociente *completo*, cuando el dividendo es menor que el divisor, es un número mixto que tiene por parte entera el cociente entero, y se completa con una fracción cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor. Pues ya vimos que si $a > b$, y es c el cociente (entero) de dividir a por b, y r el resto,

$$a : b = \frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$$

En adelante, por consiguiente, se podrá decir a dividido o partido por b, o a *b-avos*, para expresar el número $\frac{a}{b}$.

La misma operación es dividir el número a por b, que ponerle al número a el denominador b.

172. **Multiplicador fraccionario.**—*Multiplicar un número racional por una fracción significa multiplicar aquel número por el numerador y dividir por el denominador.*

Esta definición está de acuerdo con lo que al hablar de la razón de dos cantidades se dijo (156); pues vimos que si C era una cantidad, U otra, y $\frac{m}{n}$ la razón entre ambas, la expresión

$$C = U \cdot \frac{m}{n}$$

significaba que para obtener C había de tomarse m veces la enésima parte de U; pero, tratándose de números, tomar un número m veces es multiplicarlo por m, y hallar la enésima parte es dividir por n.

De la definición salen estas reglas:

Para multiplicar un entero por una fracción, se multiplica por el numerador y se divide por el denominador (o bien se le pone este denominador) Ejemplo:

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Para multiplicar dos fracciones se forma otra que tenga por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el producto de los denominadores. Ejemplo:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Porque, según la definición, para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ había que multiplicar aquélla por c, lo que daría (169) $\frac{a \cdot c}{b}$ y luego dividir ésta por d, lo que da (170) $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

173. *Definición general.*—Se pueden reunir en un solo enunciado las dos definiciones de multiplicar relativas a los dos casos de ser el muitiplicador entero o fraccionario, diciendo: *la multiplicación de números racionales tiene por objeto formar el producto haciendo con el multiplicando las operaciones que se hicieron con la unidad entera para obtener el multiplicador.*

Si el multiplicador era entero se obtuvo de la unidad entera sumándola tantas veces como unidades tiene dicho multiplicador, y eso mismo habría que hacer con el multiplicando para obtener el producto; así sale la definición del número (27).

Si el multiplicador es fraccionario, $\frac{m}{n}$, para obtenerle se tomó m veces la n^a parte de la unidad entera, luego para obtener el producto hay que tomar m veces la n^a parte del multiplicando, lo que se obtiene haciendo las operaciones indicadas en la definición del número (172).

174. *Propiedades.*—Como al multiplicar fracciones se multiplican sus numeradores, que son enteros, y sus denominadores, que también lo son, se comprende que subsistirán para el producto de fracciones las propiedades uniforme, conmutativa y asociativa, que tenía el producto de enteros; y como todo número racional se puede escribir en forma fraccionaria, quedan extendidas dichas propiedades a todos los números racionales.

La propiedad distributiva también subsiste.

El detalle de la conclusión general que antecede es un poco laborioso. Puede hacerse como sigue:

Propiedad uniforme. Si

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, decimos que $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a' \cdot c'}{b' \cdot d'}$

En efecto: para que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, se requiere que reducidas estas fracciones a denominador común sean iguales los numeradores resultantes, $a \cdot b'$ y $a' \cdot b$; y para que $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, tiene que ser $c \cdot d' = c' \cdot d$, esto es

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b' = a' \cdot b \\ c \cdot d' = c' \cdot d \end{array}\right\} \text{Multiplicando estas igualdades sale}$$

$$(a \cdot c) \cdot (b' \cdot d') = (a' \cdot c') (b \cdot d)$$

que es precisamente la condición para que $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ sea igual a $\frac{a' \cdot c'}{b' \cdot d'}$.

Propiedad conmutativa.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$, porque siendo $a \cdot c = c \cdot a$ y $b \cdot d = d \cdot b$, $\frac{a.c}{b.d} = \frac{c.a}{d.b}$.

Propiedad asociativa.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$, porque siendo $\begin{matrix} a.c.e = a.(c.e) \\ b.d.f = b.(d.f) \end{matrix}$ los resultados del primero y segundo miembros de la igualdad propuesta son iguales.

Propiedad distributiva.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a.m}{b.n} + \frac{c.m}{d.n}.$$

En efecto

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{(a \cdot d + b \cdot c)m}{b \cdot d \cdot n} =$$

$$= \frac{a \cdot d \cdot m + b \cdot c \cdot m}{b \cdot d \cdot n}$$

El segundo miembro de la igualdad que queremos demostrar da igual resultado reduciendo las fracciones al denominador común $b \cdot d \cdot n$.

Para el caso de ser varios sumandos o una diferencia, se procede análogamente.

Por último, aun cuando los números racionales sean negativos, continúan rigiendo las mismas leyes formales que para los enteros.

175. **División.** — *La división tiene por objeto hallar un número que multiplicado por el divisor produzca el dividendo.*

Fracción inversa de otra es la que se forma tomando por numerador el denominador, y viceversa.

También un entero puede invertirse poniéndole en forma de fracción de denominador 1.

Ejemplos: Inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}\cdot$ Inverso de $a = \frac{a}{1}$ es $\frac{1}{a}$.

El producto de dos números inversos es 1.

Porque $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$.

Para dividir dos números racionales basta multiplicar el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplos: 1.° $a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}\cdot$ Porque al multiplicar este resultado por el divisor sale $a \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}\right) = a \cdot 1 = a$, que es el dividendo.

2.° $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{a \cdot n}{b \cdot m}\cdot$ (Igual demostración.)

3.° $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b} \times \frac{1}{m} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot m} = \frac{a}{b \cdot m}$ (el mismo resultado obtenido por la regla dada antes (170).

Observaciones.—Comparando esto con lo dicho para la substracción, se ve que mediante los números negativos y las fracciones las operaciones inversas se transforman en directas.

Que el cociente es único, y las demás propiedades de la división son consecuencias de las de la multiplicación, y generales, como éstas eran.

176. *Aplicaciones.*—Siendo $\frac{a}{b} = a : b$, y habiéndose visto que $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$ sale $\frac{a}{b \cdot m} = (a:b) : m$ y esto nos dice que *para dividir un número,* a, *por un producto puede dividírsele sucesivamente*

por los factores, haciendo las divisiones completas. (Si nos limitamos a cocientes enteros aún es cierto el teorema, pero para hallar el resto hay que seguir una regla poco sencilla).

Análogamente se podrían demostrar otras proposiciones relativas a la división por medio de las fracciones, pues, como hemos visto, podemos emplear en vez de las palabras *dividendo*, *divisor* y *cociente completo*, las correspondientes, *numerador*, *denominador* y *fracción*.

177. **Fracciones de términos racionales.**— Considerada la fracción como cociente, claro es que sus términos pueden ser números racionales no enteros. Entonces resultan expresiones de la forma de las que siguen:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c},\quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)},\quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)},\quad \frac{a+\frac{b}{c}}{m+\frac{p}{q}},\ \text{etc.}$$

todas las cuales se llaman *expresiones racionales*, y también *fracciones complejas*. Pero no hay que olvidar que aunque *su forma* es $\frac{A}{B}$, siendo A y B números racionales cualesquiera, su *concepto* es el de *cociente*. Por tanto, para probar las propiedades de estas fracciones, *que son completamente análogas a las de las fracciones ordinarias*, hay, o bien que convertir en ordinarias las fracciones complejas, lo cual siempre es posible no siendo cero ninguno de sus términos, o apoyarse en las propiedades del cociente. Lo haremos de este último modo, limitándonos a los teoremas y reglas fundamentales.

Si se multiplican los dos términos de la fracción de términos racionales $\frac{A}{B}$ *por un mismo número racional* (aunque no sea entero), *resulta otra equivalente.*

Así, por ejemplo :

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$$

En efecto : $\frac{A}{B}$ representa una división. Si llamamos q al cociente (completo), será :

$$A = B \cdot q$$

Multiplicando estos dos números iguales, A y $B \cdot q$, por el mismo número C, se obtiene :

$$A \cdot C = (B \cdot C) \cdot q$$

y esto indica que q es el cociente de la división $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, luego

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$$

Todo ello, adviértase, en virtud de haberse generalizado para números *racionales* las propiedades de los enteros.

Este teorema da la posibilidad de reducir a un común denominador (pero sólo por la primera regla (162), pues la del m. c. m. no tendría aquí significación.)

La suma y resta de fracciones complejas se hace como en las ordinarias.

Ejemplo : $\frac{A}{D} \pm \frac{B}{D} = \frac{A \pm B}{D}$.

Multiplicación $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$. Llamando q y q' a los cocientes de las divisiones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$, será :

$$\left.\begin{array}{l} A = B \, . \, q \\ C = D \, . \, q' \end{array}\right\} \text{ Multiplicando } A \, . \, C = (B \, . \, D) \, . \, q \, . \, q'$$

luego $q \, . \, q' = \frac{A \, . \, C}{B \, . \, D}$, y como $q \, . \, q' = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$, queda demostrado.

División.—El fundamento es que $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = \frac{A.B}{B.A} = 1$ luego subsiste la regla (175).

178. **Potencias y raíces de fracciones ordinarias.**—Volviendo al caso de ser la fracción $\frac{a}{b}$ ordinaria (es decir de términos naturales), vemos inmediatamente que, por conservarse la definición de potencia, se tendrá:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots}^{(n \text{ factores}} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots}{b \, . \, b \, . \, b \ldots} = \frac{a^n}{b^n}$$

Esto es: *para elevar una fracción a una potencia, se elevan sus dos términos, y se forma con los resultados una fracción.*

En particular, para el cuadrado resulta:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (1).$$

Si a y b son primos entre sí, sus potencias también lo son, luego el cuadrado de una fracción irreducible es otra también irreducible, que no puede, por tanto, ser igual a un número entero.

179. **Raíz cuadrada.**—De la igualdad (1) se desprende inmediatamente que $\frac{a}{b}$ es la raíz cuadrada de $\frac{a^2}{b^2}$, y como a es la de a^2, y b la de b^2, se deduce que: *para extraer la raíz cuadrada de una fracción cuyos términos son cuadrados*

perfectos, se extrae la raíz del numerador y se divide por la raíz del denominador.

Ejemplos :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \text{ » } \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7} \text{ » } \sqrt{\frac{p^2}{q^2}} = \frac{p}{q}$$

180. **Raíces aproximadas.**—Cuando un entero, por ejemplo 21, no es cuadrado perfecto, hemos llamado raíz al mayor entero cuyo cuadrado está contenido en el radicando.

Así, la $\sqrt{21}$ es 4, porque $4^2 < 21$, y 5^2 es ya mayor que 21. Pero ahora conviene que a esa raíz, 4, la llamamos *raíz* **por defecto,** y que al número siguiente, 5, le llamamos *raíz* **por exceso;** y a ambas raíces *aproximadas en menos de una unidad.* En general: si N es el radicando y *la raíz no es exacta*, hay dos números *consecutivos*, a y $a + 1$, entre cuyos cuadrados está comprendido N, es decir que se verifica :

$$a^2 < N < (a + 1)^2$$

El número a será la raíz por defecto; el $a + 1$, la raíz por exceso.

Sabido esto podemos demostrar el teorema siguiente :

181. *Si se extraen las raíces enteras por defecto y por exceso del numerador de una fracción cuyo denominador sea cuadrado perfecto, y se dividen aquellas raíces enteras por la raíz exacta del denominador, se obtienen dos fracciones entre cuyos cuadrados está comprendida la fracción dada.*

Ejemplo: Sea $\sqrt{\frac{7}{25}}$. Las raíces enteras de 7 son: 2, por defecto, y 3, por exceso; y la raíz exacta de 25 es 5.

Por lo primero se verificará

$$2^2 < 7 < 3^2$$

y dividiendo por $5^2 = 25$

$$\frac{2^2}{5^2} < \frac{7}{25} < \frac{3^2}{5^2}$$

o lo que es igual

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 < \frac{7}{25} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad (1)$$

Las dos fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ entre cuyos cuadrados se halla el radicando $\frac{7}{25}$ se llaman raíces *aproximadas* por *defecto* y por *exceso;* y como su diferencia es $\frac{1}{5}$ se dice que expresan la raíz cuadrada de $\frac{7}{25}$ con un error menor que $\frac{1}{5}$, o *en menos* de $\frac{1}{5}$. Se escribe

$$\frac{2}{5} < \sqrt{\frac{7}{25}} < \frac{3}{5} \quad (2)$$

entendiéndose que estas desigualdades (2) equivalen a las (1).

Si se reconoce que el denominador de la fracción no es cuadrado perfecto, se reduce este caso al anterior por la siguiente

Regla.—*Para transformar una fracción en otra equivalente cuyo denominador sea cuadrado perfecto, basta multiplicar los dos términos de la fracción por el denominador.*

Ejemplos:

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 8} = \frac{56}{8^2} \quad » \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} = \frac{a \cdot b}{b^2}$$

Con esto se podrá aplicar el teorema anterior a la nueva fracción, pues es claro que la raíz cuadrada exacta de 8^2 es 8, y la de b^2 es b.

Ejemplo: Extraer la $\sqrt{\frac{7}{8}}$.

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{56}{8^2}}$$

Las raíces enteras de 56 son 7 y 8, luego

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 < \frac{56}{8^2} < \left(\frac{8}{8}\right)^2$$

o en otra forma

$$\frac{7}{8} < \sqrt{\frac{56}{8^2}} < \frac{8}{8}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{7}{8} < \sqrt{\frac{7}{8}} < \frac{8}{8}$$

Las raíces de $\frac{7}{8}$ en menos de $\frac{1}{8}$ son, pues, el mismo número $\frac{7}{8}$, y el $\frac{8}{8} = 1$.

182. *Si un entero no tiene raíz cuadrada exacta entera tampoco la tiene exacta fraccionaria.* Si supusiéramos que la raíz cuadrada del número entero n, que no es cuadrado perfecto, fuese una fracción, ésta podría hacerse por simplificación igual a otra irreducible que llamaremos $\frac{a}{b}$. Pero $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ equivale a decir

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = n$, y esta última igualdad es imposible. (178).

Es, pues, imposible que n tenga raíz fraccionaria exacta.

Según el teorema anterior, cuando un entero no es cuadrado de otro entero hay que renunciar a hallar su raíz exacta; pero pueden encontrarse raíces fraccionarias aproximadas y con un error tan pequeño como se quiera, por la siguiente

Regla.—*Para hallar la raiz cuadrada de un entero con un error menor que* $\frac{1}{q}$, *se le convierte en fracción cuyo denominador sea* q^2, *y se extraen las raíces aproximadas de dicha fracción.*

Ejemplo: Extraer la $\sqrt{2}$ con un error menor que $\frac{1}{5}$.

$$2 = \frac{2.5^2}{5^2} = \frac{50}{5^2}, \text{ luego } \sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{5^2}}$$

Aplicando ahora el procedimiento anterior (181) sacaríamos

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 < 2 < \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

o bien

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{8}{5}$$

FRACCIONES DECIMALES

183. *Se llaman fracciones decimales aquellas cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.*

Estas fracciones tienen las mismas propiedades que las ordinarias, pero a causa del denominador especial que llevan, dichas propiedades y las reglas de las operaciones admiten enunciados de forma distinta y simplificaciones que conviene estudiar.

La serie de unidades fraccionarias decimales es

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000} \text{ etc.}$$

Estas unidades se nombran: una *décima*, *centésima*, *milésima*, *diezmilésima*, etc., y se escriben, abreviadamente

0,1, 0,01 » 0,001, 0,0001.....

Atendiendo a esta manera de escribir se dice que la décima es la unidad decimal de primer orden y ocupa el primer lugar después de la coma; la centésima es la unidad decimal de segundo orden y ocupa el segundo lugar después de la coma, etcétera.

Por consiguiente, en general: la unidad decimal de orden *n* ocupa el lugar *n* después de la coma y es la unidad fraccionaria que tiene por denominador 1 seguido de *n* ceros.

Conociendo el denominador de una unidad fraccionaria (que le da nombre) es fácil, por tanto, hallar su orden o lugar.

Por ejemplo: la diezmilmillonésima tiene por denominador 10000.000000, y como este número se escribe con 10 ceros será unidad de orden 10, y ocupará el lugar 10 después de la coma.

Inversamente: sabido el orden de una unidad decimal se averigua fácilmente su nombre y su denominador. Por ejemplo: la unidad de orden 9 tendrá por denominador 1000.000000, y se llamará *milmillonésima*. (Repítanse estos ejercicios que son útiles para la lectura y escritura de decimales).

184. En la serie de unidades fraccionarias escritas antes se advierte que el denominador de cada una es 10 veces mayor que el de la anterior, y que, por consiguiente, 10 unidades de un orden forman otra del inmediato. Como este era el principio fundamental de la numeración en el sistema decimal, se ve que los números mixtos decimales, es decir, compuestos de parte entera y fracción decimal, pueden escribirse *en forma entera*, esto es, sin manifestar el denominador, bastando para ello distinguir la parte entera de la decimal, colocando una coma a la derecha de la cifra de las unidades, entre ella y la de las décimas.

De aquí resultan las siguientes reglas.

185. Para escribir un número decimal se escribe su parte entera, o cero si careciese de ella, se pone una coma, y después se escribe la parte decimal como si fuese entera, pero precedida de

los ceros necesarios para que la última cifra decimal ocupe el lugar correspondiente a las unidades de su orden.

Ejemplo: 2 unidades y 27 diezmilésimas se escribe

2, 0027

49 cienmilésimas se escribe

0, 00049, etc.

Para leer un decimal se lée su parte entera, y luego la decimal como si fuera entera, pero con el nombre que corresponda a las unidades decimales representadas por su última cifra de la derecha.

Ejemplo:

1001,100001 se lee: mil una unidades, y cien mil una *millonésimas*. 0,01004 se lee: mil cuatro *cienmilésimas*, etc.

186. **Propiedades.**—*Si a la derecha o a la izquierda de un decimal se escriben ceros, siempre que no se mueva la coma el decimal no altera de valor*.

Ejemplos: 2, 6 = 002, 600.

Los ceros puestos a la izquierda desde luego no influyen en el valor de la parte entera, que sigue siendo 2. La parte decimal era 6 décimas, es decir $\frac{6}{10}$, y como multiplicando los dos términos de esta fracción por 100 no cambia de valor, se convertirá en $\frac{600}{1000}$, esto es, en 600 milésimas, que es la parte decimal que habíamos considerado.

187. Si en un decimal se corre la coma uno o varios lugares hacia la derecha (poniendo antes los

ceros que fueren precisos), el decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma. Y si el movimiento de la coma fuere hacia la izquierda, el decimal quedaría dividido por el mismo número.

Ejemplos: Si en 2, 4 corremos la coma *tres* lugares hacia la derecha (para lo cual agregamos antes dos ceros), resulta el número entero 2400; y decimos que $2400 = 2,4 \times 1000$. En efecto: escribiendo el número mixto en forma ordinaria se tiene:

$$2\frac{4}{10} = \frac{24}{10}$$

Multiplicando por 1000, y simplificando luego sale

$$\frac{24000}{10} = 2400.$$

Luego 2400 es el resultado de multiplicar el decimal 2, 4 por 1000.

188. **Consecuencias.**—*Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros basta correr la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros siguieran a la unidad dicha.*

Si en un decimal se suprime la coma (lo que equivale a considerarle como entero), queda multiplicado por 1 seguido de tantos ceros como cifras había en el decimal después de la coma.

Así: si en vez de 2, 003 escribimos 2003 hemos hecho al decimal mil veces mayor. Porque esto equivale a haber corrido la coma tres lugares.

Observación.—Si corriendo la coma hacia la derecha, por ejemplo un lugar, queda el decimal multiplicado por 10, es claro que al correrla un lugar *hacia la izquierda* quedaría dividido por 10. Pues si por ejemplo:

$$23,15 = 2,315 \times 10 \quad \text{será} \quad 2,315 = 23,15 : 10.$$

189. **Consecuencia.**—*Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros basta correr la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros seguían a la unidad.*

Ejemplo: $2,15 : 100 = 0,0215.$

190. OPERACIONES.—**Adición y substracción.**—Para sumar o restar decimales se iguala, añadiendo ceros si es preciso, el número de sus cifras decimales; se suman o restan como enteros, y se separan de derecha a izquierda en el resultado, con una coma, tantas cifras decimales como tenía cualquiera de los datos.

Ejemplos:

$$2,4 + 3,008 = \left\{ \begin{array}{r} 2,400 \\ 3,008 \\ \hline 5,408 \end{array} \right. \qquad 6 - 0,29 = \left\{ \begin{array}{r} 6,00 \\ 0,29 \\ \hline 5,71 \end{array} \right.$$

Igualar el número de cifras decimales equivale a reducir las fracciones a denominador común, puesto que el denominador depende del número de cifras decimales; sumar como enteros equivale a sumar los numeradores, y separar en el resultado las cifras dichas equivale a ponerle por denominador el denominador común; por lo cual se ve que la regla empleada es substancialmente la misma que se usaba para las fracciones ordinarias. En comprobación, véase lo que resulta escribiendo en forma ordinaria:

$$2\frac{4}{10} + 3\frac{8}{1000} = \frac{24}{10} + \frac{3008}{1000} = \frac{2400}{1000} + \frac{3008}{1000} = \frac{5408}{1000} = 5{,}408.$$

$$6 - \frac{29}{100} = \frac{600}{100} - \frac{29}{100} = \frac{571}{100} = 5{,}71.$$

191. **Multiplicación.**—Para multiplicar decimales se multiplican como enteros y se separan en el producto con una coma, de derecha a izquierda, tantas cifras como decimales reúnen entre todos los factores.

$$\text{Ejemplo: } 2{,}3 \times 0{,}004 = \left\{ \begin{array}{r} 2{,}3 \\ 0{,}00\,4 \\ \hline 0{,}0\,09\,2 \end{array} \right.$$

Multiplicar como enteros equivale a multiplicar los numeradores, y separar las cifras dichas equivale a poner por denominador el producto de los denominadores, porque éste será la unidad seguida de tantos ceros como se reuniesen en los denominadores de los factores: luego hemos empleado substancialmente la misma regla que para las fracciones ordinarias. En comprobación:

$$2\frac{3}{10} \times \frac{4}{1000} = \frac{23}{10} \times \frac{4}{1000} = \frac{92}{10000} = 0{,}0092.$$

192. **División.**—*Para dividir un decimal por un* **entero** se dividen como enteros y se separan en el cociente de derecha a izquierda con una coma tantas cifras como decimales tuviere el dividendo.

$$\begin{array}{l|l} \text{Ejemplo: } 2{,}007 & 3 \\ \cline{2-2} \quad 20 & 0{,}669 \\ \quad\ 27 & \\ \quad\ \ 0 & \end{array}$$

Dividir como enteros equivale a dividir el numerador por el entero, y separar las cifras a poner el mismo denominador, luego esta regla es una de las dadas para dividir una fracción ordinaria por un entero.

$$2\,\frac{7}{1000} : 3 = \frac{2007}{1000} : 3 = \frac{2007:3}{1000}$$

193. *Observación.* — Cuando la división no es exacta, el resto representa unidades decimales de igual orden que la última cifra del cociente, y este puede completarse con la fracción ordinaria cuyo numerador sea el resto y el denominador el divisor.

194. *Para dividir* **cualquier número** *por un decimal* se multiplica primero el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tuviera el divisor y se divide luego por éste considerado como entero.

Ejemplos: $6 : 0{,}02 = 600 : 2$

$$0{,}008 : 0{,}02 = 000{,}8 : 2 = 0{,}8 : 2$$

$$0{,}9 : 0{,}03 = 090 : 3 = 90 : 3.$$

Así recaemos siempre en una división de enteros o de un decimal por un entero.

La regla dada equivale a la conocida: para dividir un número por una fracción se multiplica el dividendo por la fracción invertida.

Así

$$6 : \frac{2}{100} = \frac{600}{2} = 600 : 2$$

$$\frac{8}{1000} : \frac{2}{100} = \frac{800}{1000} : 2 = \frac{8}{10} : 2 = 0{,}8 : 2, \text{ etc.}$$

Observación.—Si hubiere resto sería del orden de la última cifra del decimal que tuviese mayor número de ellas.

195. **Potenciación** — Para elevar un decimal al cuadrado se eleva como si fuera entero y se separan en el resultado *doble* número de decimales.

Ejemplo: $(0{,}002)^2 = 0{,}000004$

Porque esto equivale a multiplicarle por sí mismo.

196. **Radicación**.—Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal, se hace primero **par** el número de cifras decimales (añadiendo un cero si es preciso), se extrae la raíz como si fuera entero y se separen en ella *la mitad* del número de cifras que tuviese el radicando.

Ejemplo: $\sqrt{0{,}001} = \sqrt{0{,}0010}$. Por defecto 0,03 y por exceso 0,04, con un error menor que 0,01.

Hacer par el número de cifras decimales equivale a convertir el denominador del decimal en cuadrado perfecto; pues la unidad seguida de un número par de ceros es el cuadrado de la unidad seguida de un número de ceros mitad de aquél. Extraer después la raíz como entero equivale a extraer la raíz del numerador. Y en fin separar la mitad del número de cifras decimales del radicando es lo mismo que dividir por la raíz exacta del denominador. Luego esta regla coincide con la dada para las fracciones ordinarias (181). En comprobación:

$$\sqrt{\frac{1}{1000}}=\sqrt{\frac{10}{10000}}=\sqrt{\frac{10}{(100)^2}}$$

Y se tendrá por ser $3 < \sqrt{10} < 4$,

$$\frac{3}{100}<\sqrt{\frac{10}{(100)^2}}<\frac{4}{100}, \text{ o bien}$$

$$0{,}03 < \sqrt{0{,}001} < 0{,}04$$

como se había visto en el ejemplo.

Observación.—Un número entero puede ponerse en forma de decimal escribiendo ceros en la parte decimal, así: 2 = 2,0000...

De esto y de la regla anterior se deduce la siguiente

Regla.—*Para extraer la raíz cuadrada de un entero en menos de una unidad decimal de orden* n *se expresa el entero en forma decimal, poniéndole después de la coma,* 2 . n *ceros; se extrae la raíz del número resultante considerado como entero, y se separan en ella* n *cifras decimales.*

Ejemplo: $\sqrt{2}$ en menos de 0,01. Se extrae $\sqrt{2{,}0000} = 1{,}41$ por defecto.

Conversión de fracciones ordinarias en decimales, y viceversa

Advertencia importante. Consideraremos siempre fracciones ordinarias **irreducibles** y *propias*. Esto supuesto, decimos:

197 Si el denominador de la fracción ordinaria que quiere convertirse en decimal no admite otros factores primos que 2, 5, ó ambos, la fracción se puede transformar exactamente en decimal. Este decimal no tendrá parte entera, y el número de cifras decimales será el mayor de los exponentes con que entren el 2 o el 5 en el denominador de la fracción propuesta.

Ejemplo: Sea la fracción ordinaria $\frac{3}{200}$ cuyo denominador es igual a $2^3 \times 5^2$. Se tendrá:

$$\frac{3}{200} = \frac{3}{2^3 \times 5^2}$$

Esta fracción equivale a una decimal de tres cifras.

En efecto: si multiplicamos los dos términos de esta fracción por 5, con objeto de que los dos factores entren con exponentes iguales, saldrá:

$$\frac{3}{2^3 \times 5^2} = \frac{3 \times 5}{2^3 \times 5^3} = \frac{3 \times 5}{10^3} = \frac{15}{1000} = 0{,}015$$

y esta última fracción responde al enunciado.

En general: siendo p un número cualquiera mayor que q,

$$\frac{a}{2^p \cdot 5^q} = \frac{a \cdot 5^{p-q}}{2^p \cdot 5^p} = \frac{a \cdot 5^{p-q}}{10^p}$$

y esta última fracción es decimal y tiene p cifras.

Procedimiento.—Para hacer la conversión no es preciso el artificio usado en la demostración. *Basta dividir el numerador por el denominador* (lo que dará cero de cociente entero) *e ir agregando un cero a la derecha de cada resto hasta terminar la operación.* Véase el cálculo del margen.

$$\begin{array}{l|l} 30 & 200 \\ \cline{2-2} 300 & 0{,}015 \\ 1000 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Porque esto equivale a multiplicar el dividendo 3, por 1000, y dividir por $200 = 2^3 \times 5^2$, y como $1000 = 2^3 \times 5^3$ se ve que en resumen se ha multiplicado 3 por 5 y se ha expresado el resultado en *milésimas.*

198. Si el denominador de la fracción ordinaria es primo con 10, es decir, si no es divisible por 2 ni por 5, resultará una fracción decimal sin parte entera que consta de un número *inacabable* de cifras, en que un grupo de ellas que empieza en la de las décimas *se repite* siempre *en el mismo orden.*

Esta decimal se llama *periódica pura*, siendo el período el número que forman las cifras repetidas.

El número de cifras del período es igual al exponente de la menor potencia de 10 congruente con 1 respecto al denominador tomado por módulo.

Demostración.—Sea la fracción $\frac{a}{b}$, y b primo con 10. Si dividimos 10, 100, 1000, etc., por el denominador de la fracción dada, ninguna división será exacta, puesto que dicho denominador es primo con 10 (y por tanto con sus potencias), luego en estas divisiones no se obtendrá el resto cero. Y como el número de restos distintos es a lo más igual al de unidades del divisor menos una, habrá de reproducirse algún resto. Si fuesen por ejemplo, 10^m y 10^n $(m > n)$ dos potencias de 10 que dan igual resto, será

$$10^m \equiv 10^n \text{ (módulo } b)$$

Los dos miembros de esta congruencia pueden dividirse por 10^n que es primo con el módulo (112) y saldrá:

$$10^{m-n} \equiv 1 \text{ (módulo } b)$$

Hay, pues, ciertas potencias de 10 congruentes con 1 respecto al módulo b. Si suponemos que sea g el exponente de *la menor* de estas potencias, será

$$10^g \equiv 1, \text{ y de aquí } 10^g \times 10 \equiv 10, \text{ o sea } 10^{g+1} \equiv 10^1,$$

y, análogamente, de $10^{g+1} \equiv 10$ se saca $10^{g+1} \times 10 \equiv$ $\equiv 10 \times 10$, o sea $10^{g+2} \equiv 10^2$, y así sucesivamente hasta llegar a 10^{2g} que daría el mismo resto que 10^g. Luego los restos se repiten de g en g lugares.

Además, el número de cifras del período no puede ser menor que g; pues si siendo $g' < g$ pudieran ser congruentes dos potencias cuyos exponentes se diferenciasen en g', tales como 10^p y $10^{p+g'}$ de la congruencia

$$10^{p+g'} \equiv 10^p \text{ (módulo } b)$$

saldría, dividiendo por 10^p,

$$10^{g'} \equiv 1 \text{ (módulo } b)$$

lo que no es posible, puesto que era 10^g *la menor* potencia congruente con 1.

Luego, en resumen: los restos se repiten sucesiva e indefinidamente de g en g lugares; o dicho de otro modo, forman un período de g términos.

Si en vez de dividir por b las potencias de 10, dividimos los productos de a por esas potencias, que es lo que se hace al seguir el mismo procedimiento empleado para la conversión en el caso anterior, se tendría en vez de la congruencia $10^g \equiv 1$, la

$$a \, . \, 10^g \equiv a \quad (\text{módulo } b)$$

lo que indica que existe un dividendo parcial que da el mismo resto que a. Pero como $a < b$ (por ser propia la fracción) el resto de a es el mismo número a; y como al ponerle a este resto un cero y dividir por b se obtiene en el cociente la cifra de las décimas, cuando vuelva a repetirse a y se le agregue un cero volverá a salir en el cociente una cifra igual a la de las décimas, y repetida ésta se repetirán las demás en igual orden sucesiva e indefinidamente.

199. Si el denominador de la fracción ordinaria admite alguno o los dos factores 2 y 5, y además otros primos con 10, se obtiene una decimal compuesta de un número de cifras igual al mayor de los exponentes del 2 o del 5, las cuales forman una parte no periódica, y van seguidas de un período de cifras que se repiten sin fin y cuyo número es el exponente de la menor potencia de 10, congruente con 1 respecto al número que forman los factores del denominador primos con 10.

Esta fracción se llama *periódica mixta.*

Ya se ve que el caso actual es mixto de los dos primeros. La demostración se compone también de partes análogas a las anteriores; pero la omitimos por ser un poco más complicada.

Ejemplos de todos los casos.—La fracción $\frac{2}{5^3}$ daría una decimal exacta de 3 cifras, la $\frac{2}{11}$ una periódica pura de dos cifras de período (por ser $10^2 \equiv 1$ (mód. 11) y la $\frac{2}{5^3 \times 11}$ una periódica mixta con 3 cifras no periódicas y dos periódicas. He aquí los cálculos respectivos :

20	125	20	11	20	1375
200	0'016	90	0'181818...	200	0'001454545...
750		20		2000	
000				6250	
				7500	
				625	

200. **Paso inverso.**— Dada una fracción decimal periódica pura sin parte entera, si se forma una fracción ordinaria que tenga por numerador un período de la decimal, y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tiene dicho período, esta fracción ordinaria produce la misma decimal propuesta. Ambas fracciones se consideran por esto como equivalentes.

Ejemplo :

$$0'12\ 12\ 12\ 12 ... = \frac{12}{99}$$

Para probar que $\frac{12}{99}$ produce la decimal dada, observemos, en primer término, que por ser 12 menor que 99, la parte entera será cero. Además, si se divide 12 seguido de dos ceros por 99, se obtendrá de cociente 12, y de resto, 12, porque

$$1200 = 99 \times 12 + 12 \ (*)$$

Luego nos encontramos en iguales condiciones de antes, y poniendo otros dos ceros volvería a salir 12 en el cociente, y 12 de resto, etc., es decir, que al convertir $\frac{12}{99}$ en decimal, se obtendrá 0'121212 ...

Excepción.—La decimal 0'999 ... no puede provenir de la ordinaria $\frac{9}{9}$ porque $9 : 9 = 1$, cociente exacto. Sin embargo, se considera dicha decimal 0'999 ... como igual a $\frac{9}{9} = 1$, en virtud de que la diferencia 1 — 0'999 ... puede hacerse tan pequeña como se desee tomando un número de nueves suficientemente grande.

Dada una fracción decimal periódica mixta sin parte entera, se obtiene una ordinaria equivalente tomando como numerador un número formado con las cifras de la parte no periódica seguidas de las de un período menos el que forman las de la parte no periódica, y como denominador, un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el período seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Ejemplo :

$$0'24\ 715\ 715\ 745\ ... = \frac{24715 - 24}{99900}.$$

Si llamamos f a la decimal dada y la multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, obtendremos

$$f \times 100 = 24,\ 715\ 715\ .. = 24\ \frac{715}{999}$$

(*) Porque en ambos miembros está 12 repetido 100 veces.

o bien

$$f \times 100 = 24 + \frac{715}{(100-1)} = \frac{24000 - 24 + 715}{999} =$$

$$= \frac{24715 - 24}{999}$$

y despejando f,

$$f = \frac{24715 - 24}{99900}$$

201. *Observaciones.*—1.ª Si las decimales tienen parte entera se prescinde de ella, se las convierte en ordinarias y después se forma un número mixto con aquella parte entera y esta fracción ordinaria.

Ejemplo :

$$4,272727\ldots = 4 + 0,2727\ldots = 4\,\frac{27}{99}.$$

2.ª La conversión de fracciones ordinarias en decimales es últil por la mayor facilidad de los cálculos con éstas.

Por ejemplo : Para extraer la raíz cuadrada de una fracción ordinaria en menos de una unidad decimal de orden dado, se reduce aquélla a decimal y se sigue la regla conocida (196).

La transformación de decimales periódicas en ordinarias se verifica cuando hayan de obtenerse resultados exactos.

PROPORCIONALIDAD

202. Se llama **igualdad fraccionaria** la expresión de la igualdad o equivalencia de dos fracciones, ordinarias o complejas.

Ejemplos :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad » \quad \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{10}{3}\right)} \quad » \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Los *términos* de la última son a, b, c y d (en este orden) y se llaman 1.°, 2.°, 3.° y 4.°, respectivamente.

En la segunda igualdad fraccionaria, el primer término es $\frac{2}{5}$, el segundo es $\frac{4}{9}$, el tercero es 3 y el cuarto es $\frac{10}{3}$.

El primero y cuarto se llaman *extremos*, y el segundo y tercero, *medios*.

203. **Propiedad fundamental**.—*El producto de los términos medios es igual al producto de los extremos.*

Ejemplos: En la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ debe ser $b \cdot c = a \cdot d$.

En la del ejemplo anterior debe ser $\frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{9} \times 3$ (compruébese).

Demostración.—Reduciendo las fracciones ordinarias o complejas a común denominador se tendrá.

$\frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} = \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d}$ y esto exige que $a \,.\, d = b \,.\, c$, porque siendo iguales las fracciones y teniendo el mismo denominador sus numeradores han de ser iguales.

Recíprocamente: *Si el producto de dos números es igual al de otros dos, con los cuatro se pueden formar varias igualdades fraccionarias, tomando como medios los factores de uno de los productos y como extremos los del otro.*

Ejemplo: De $a \,.\, d = b \,.\, c$ se deduce la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Porque si $\frac{a}{b}$ no fuese igual a $\frac{c}{d}$, tampoco el producto $a \,.\, d$ sería igual a $b \,.\, c$ (163).

Observación.—De la igualdad de productos $a \,.\, d = b \,.\, c$ se pueden obtener las siguientes igualdades fraccionarias.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ (1);\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a}\ (2);\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}\ (3);\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a}\ (4).$$

De la (1) se pasa a la (2) *conmutando entre sí los extremos.* De la (1) a la (3) se pasa *conmutando entre sí los medios.* Y de la (1) a la (4) *conmutando a la vez los extremos y los medios.* Todas estas conmutaciones son, por consiguiente, lícitas.

Invirtiendo las dos fracciones que forman cada una de las cuatro igualdades anteriores, se tendrían otras cuatro.

204. **Términos medios.**—Se llama, en general, *término medio* entre dos números otro com-

prendido entre ambos; es decir, mayor que uno y menor que el otro. Pero más especialmente se da el nombre de términos medios aritmético, geométrico y armónico, a los siguientes :

Medio aritmético entre dos números a y b $(a < b)$ es el número x que satisface a la condición

$$x - a = b - x \quad (1)$$

Despejando x en esta ecuación (58) sale, sucesivamente,

$$x + x = b + a, \text{ o bien } 2 \,.\, x = a + b, \text{ y } x = \frac{a + b}{2} \quad (2)$$

El medio aritmético de dos números es, pues, su *semisuma* (mitad de la suma).

En general, el término medio, aritmético, de varios números se obtiene dividiendo su suma por el número de números considerados.

Ejemplo : Si tomada la temperatura a mediodía durante una semana, se obtuvo :

Domingo	28 grados
Lunes	29 —
Martes	26 —
Miércoles	27'4 —
Jueves	28'6 —
Viernes.	29'1 —
Sábado.	30 —

se dirá que la temperatura *media* en esa semana fué de

$$\frac{28 + 29 + 26 + 27'4 + 28'6 + 29'1 + 30}{7} = 28'3 \text{ grados.}$$

Para ver que el medio aritmético de los números a y b es realmente término medio, en el sentido general de esta palabra, probaremos que es mayor que a y menor que b. En efecto

$$\frac{a+b}{2} > a, \text{ porque } \frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = \frac{2 \,.\, a}{2} = a$$

$$\frac{a+b}{2} < b, \text{ porque } \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = \frac{2 \,.\, b}{2} = b$$

Medio geométrico entre dos números a y b $(a < b)$ es el número x que forma la igualdad fraccionaria *continua*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ o bien } \frac{x}{a} = \frac{b}{x} \quad (3)$$

en que x ocupa los dos medios o los dos extremos.

Según la propiedad fundamental (203) será:

$$x \,.\, x = a \,.\, b, \text{ o bien } x^2 = a \,.\, b \text{ y } x = \sqrt{a \,.\, b} \quad (4)$$

El medio geométrico de dos números es, pues, la raíz cuadrada de su producto.

Es término medio, puesto que

$$\sqrt{a \,.\, b} > \sqrt{a \,.\, a} = \sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{a \,.\, b} < \sqrt{b \,.\, b} = \sqrt{b^2} = b$$

Medio armónico entre dos números, a y b $(a < b)$ es el número x que satisface a la condición

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{b} \quad (5)$$

Despejando x se obtiene:

$$x = \frac{2 \,.\, a \,.\, b}{a+b} \text{ o bien } \frac{1}{x} = \frac{a+b}{2 \,.\, a \,.\, b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a \,.\, b} + \frac{b}{a \,.\, b}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \quad (6)$$

El inverso del medio armónico entre dos números, *a* y *b*, es, pues, el medio aritmético de los inversos de dichos números.

205. **Proporciones.**—*Se llama proporción la igualdad de dos razones.*

Para que cuatro *cantidades* A, B, C, D, dadas en este orden, formen proporción, bastará que la razón de A con B sea igual a la de C con D, lo cual se escribe:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

y se enuncia A *es* a B *como* C *es* a D.

Esto exige que A sea homogénea con B, y C con D.

Ejemplo:

$$\frac{4\ \text{Tm.}}{60\ \text{Qm.}} = \frac{12\ \text{l.}}{1'8\ \text{Dl.}}$$

Aquí hay la razón de dos cantidades homogéneas (dos pesos) y la de otras dos también homogéneas entre sí (dos capacidades).

Siendo, como suponemos siempre por ahora, conmensurables los términos de ambas razones, de la *proporción* se deduce una *igualdad fraccionaria* reemplazando las cantidades por los *números* que expresan sus medidas referidas a una unidad común para cada par de cantidades homogéneas.

Así, expresando las *Tm.* en *Qm.* y los *Dl.* en *l.*, se obtendría:

$$\frac{40\ \text{Qm.}}{60\ \text{Qm.}} = \frac{12\ \text{l.}}{18\ \text{l.}}$$

Pero la *razón* $\frac{40\ \text{Qm.}}{60\ \text{Qm.}}$ es el número $\frac{40}{60}$, porque

$$40 \text{ Qm.} = 60 \text{ Qm.} \times \frac{40}{60}$$

Y análogamente la razón $\frac{12 \text{ l.}}{18 \text{ l.}}$ es igual a $\frac{12}{18}$ luego de la *proporción* anterior sale la igualdad fraccionaria

$$\frac{40}{60} = \frac{12}{18}$$

Por eso, de ahora en adelante, usáremos indistintamente los nombres de proporción o igualdad fraccionaria, y enunciaremos la proporción

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

como antes hemos dicho: A *es* a B *como* C *es* a D, o A partido por B igual a C partido por D, entendiéndose que al hablar de este último modo nos referimos a los números que miden A y B, C y D, en la forma que acabamos de expresar.

206. **Series de números proporcionales.** — Varios números a, b, c... dados en este orden son *proporcionales* a otros tantos, a', b', c'... cuando se verifica que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (1)$$

Si llamamos r al valor de cada uno de los cocientes $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ es claro que será

$$a = a' . r, \; b = b' . r, \; c = c' . r \quad (\text{I})$$

Luego cuando dos series de números son proporcionales, se obtienen los números de la primera serie multiplicando los de la segunda por un número fijo, r, llamado *razón común*. Y recíprocamente, de la igualdad (I) se deduce la (1).

Claro es que se podría escribir en vez de la igualdad (1) la

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad (2)$$

y los números a', b', c', se obtendrían multiplicando los a, b, c por el número $\frac{1}{r}$, inverso del de antes.

207. **Propiedades.**—*En dos series de términos proporcionales, con dos números cualesquiera de una serie y los dos correspondientes de la otra se puede formar una igualdad fraccionaria.*

Sean

$$a,\ b,\ c$$

$$a',\ b',\ c'$$

las dos series. Decimos que, por ejemplo, con los términos a, c y sus correspondientes, a', c', se puede, formar la igualdad fraccionaria

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad (\alpha)$$

Porque, por la definición (206) se sabe que

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

y conmutando en esta igualdad fraccionaria los medios sale la (α).

208. *En dos series de números proporcionales las sumas o diferencias de sus términos correspondientes pueden formar parte de las series.*

Así, siendo las series las de antes, se podrían poner en ellas, además de los términos dados, los $a + b$, $a - b$, $a + b - c$, etc. y sus correspondientes $a' + b', a' - b', a' + b' - c'$, etc., en esta forma:

$$a, \ b, \ c, \ a+b, \ a-b, \ a+b-c$$
$$a', \ b', \ c', \ a'+b', \ a'-b', \ a'+b'-c'$$

porque los números de la primera serie seguirán siendo el producto de las correspondientes de la segunda por el mismo número, r.

P. ej.: siendo $\begin{cases} a = a' \,.\, r \\ b = b' \,.\, r \end{cases}$ es $a + b = (a' + b') \,.\, r$

209. *En dos series de números proporcionales se pueden poner, como nuevos términos de ellas, equimúltiplos de los términos antiguos.*

Ejemplo: las series pueden ampliarse como se ve a continuación

$$a, \ b, \ c, \ m \,.\, a, \ n \,.\, b, \ p \,.\, c$$
$$a', \ b', \ c', \ m \,.\, a', \ n \,.\, b', \ p \,.\, c'$$

Porque, por ejemplo: De $a = a' \,.\, r$ sale $m \,.\, a = (m \,.\, a') \,.\, r$

Combinando esta propiedad y la anterior se podrían poner aún nuevos términos en las series. Por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} a, \ b, \ c, \ m.a, \ n.b, \ p.c, \ m.a + n.b, \ p.c - b \ldots \\ a', \ b', \ c', \ m.a', \ n.b', \ p.c', \ m.a' + n.b', \ p.c' - b' \ldots \end{matrix}\right\} \text{etc.}$$

210. *Si los términos de dos series son proporcionales a los de una tercera, son proporcionales entre sí.*

Sean, por ejemplo, las series

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{matrix} \quad \text{(I)}$$

y las

$$\begin{matrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{matrix} \quad \text{(II)}$$

decimos que las series

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \quad \text{(III)}$$

son proporcionales.

Pues siendo r_1 la razón común de las series (I), y r_2 las de las series (II), se tendría, p. ej.:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = a \,.\, r_1 \\ a_2 = a \,.\, r_2 \end{matrix}\right\} \text{ dividiendo } \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ y } a_1 = a_2 \,.\, \frac{r_1}{r_2}$$

luego a_1 se obtiene multiplicando a_2 por un número fijo $\frac{r_1}{r_2}$ que es la razón común de las series (III).

Observación.—Al aplicar las propiedades anteriores suponemos siempre que no hay ni aparecen en las series términos iguales a cero.

211. Los teoremas anteriores nos permiten, desde luego, escribir una multitud de igualdades fraccionarias.

Por ejemplo: del primer teorema sacaríamos

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b}{a'+b'} = \frac{a-b}{a'-b'} = \frac{a+b-c}{a'+b'-c'}$$

que da origen a las igualdades fraccionarias

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ , } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \text{ , } \frac{a}{a'} = \frac{a+b}{a'+b'} \text{ etc.}$$

Concretándonos sólo a lo más frecuente veremos que de las series de dos términos

$$\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}$$

que equivalen a la igualdad fraccionaria

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{(IV)}$$

podría sacarse estas otras

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \;,\; \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \;,\; \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \quad \text{(V)}$$

En virtud del primer teorema (207), se podría también escribir en vez de la (IV) la

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{(VI)}$$

y en lugar de las (V), que se obtenían de aquélla, las obtenidas por igual método de ésta, a saber:

$$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d} \;,\; \frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d} \;,\; \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \quad \text{(VII)}$$

De las (V) se obtiene

$$\frac{a}{a+c} = \frac{b}{b+d} \;,\; \frac{a}{a-c} = \frac{b}{b-d} \;,\; \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \quad \text{(VIII)}$$

Cambiando extremos en las (VII) y escribiéndolas con los miembros de la igualdad invertidos

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \;,\; \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \;,\; \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \quad \text{(IX)}$$

El alumno no debe preocuparse de retener *todas* estas fórmulas en la memoria. Basta que se apodere del *procedimiento* general de formación. Sin embargo, por su frecuente uso nos fijaremos, principalmente, para traducirlas al lenguaje vulgar, en las tres siguientes, sacadas de la igualdad fraccionaria $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$$

que se enuncian respectivamente como sigue :

212. *La suma de los dos primeros términos partida por el primero es igual a la de los otros dos partida por el tercero. La suma de los dos primeros términos partida por su diferencia es igual a la suma de los otros dos partida por su diferencia.*

La suma de los numeradores partida por la de los denominadores da una fracción igual a las propuestas. (Se aplica a más de dos fracciones).

213. Los números de dos series de términos correspondientes

$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{array}$$

se llaman **inversamente** *proporcionales* cuando los de una serie son proporcionales a los *inversos* de la otra; es decir, que son proporcionales (directamente) los términos de las series

$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ \frac{1}{a'} & \frac{1}{b'} & \frac{1}{c'} \end{array}$$

Llamando r a la razón común de los términos de esta serie, se tendría, por ejemplo :

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{a'}\right)} = r, \text{ o bien } a \,.\, a' = r$$

luego cuando los términos de dos series son inversamente proporcionales, *su producto* es un número fijo. (Excluímos siempre el caso de ser cero algún término).

214. **Cantidades proporcionales.**—Consideremos dos cantidades designadas sólo por su nombre general, por ejemplo, una *longitud* y un *tiempo*. Si en una cuestión determinada a *cada valor* particular de la longitud corresponde un *valor bien determinado* del tiempo, diremos que, en dicha cuestión, el tiempo *depende* o *es función* de la longitud.

Ejemplos: El tiempo que tarda una persona en recorrer cierto camino depende de la longitud de éste. Podría lo mismo decirse el tiempo *es función* de la longitud del camino.

El *área* de un cuadrado depende de la *longitud* de su lado. El *volumen* de un cubo *es función* de la *longitud* de su arista.

El *valor* de una mercancía es función de su *peso* (o *depende* del peso), etc.

215. **Proporcionalidad directa.**—Dos cantidades que dependen una de otra (o que una es función de otra) se llaman *directamente proporcionales* cuando sus valores particulares se corresponden de tal modo que con dos valores de la primera y sus correspondientes de la segunda pueda formarse una proporción.

Claro es que, si se nos dan estos pares de valores correspondientes, inmediatamente podremos comprobar si existe proporcionalidad entre las cantidades para los valores elegidos, pues bastará ver si con ellos puede o no formarse proporción.

Ejemplo : Si se nos dice que una circunferencia de diámetro de 1 m. tiene de longitud 3'1416 m., y otra de diámetro de 2 m. tiene de longitud 6'2832 m., es claro que con estos valores puede formarse la proporción,

$$\frac{1\,m}{2\,m} = \frac{3'1416\,m}{6'2832\,m}$$

porque la igualdad fraccionaria

$$\frac{1}{2} = \frac{3'1416}{6'2832}$$

es verdadera.

Podríamos, pues, decir que en este caso particular la longitud de la circunferencia es proporcional a la de su diámetro.

En cambio, si se nos dice que un lápiz cuesta 0'05 pesetas y un millar de lápices cuestan 45 pesetas, vemos que las razones

$$\frac{0'05\ \textit{pesetas}}{45\ \textit{pesetas}} \quad \text{y} \quad \frac{1\ \textit{lápiz}}{1000\ \textit{lápices}}$$

no son iguales, porque la igualdad fraccionaria

$$\frac{0'05}{45} = \frac{1}{1000}$$

sería falsa, ya que $0'05 \times 1000$ no es igual a 45×1.

No habría, pues, proporcionalidad en este caso.

Pero cuando nos referimos *en general* a dos cantidades, sin determinar valores particulares, por ejemplo, cuando se habla de la longitud de la circunferencia (esto es, de *cualquiera* circunferencia) y de la de su diámetro, y se afirma que son proporcionales, ha de entenderse que la proporción entre dos valores de la circunferencia y sus correspondientes del diámetro puede escribirse *siempre*, cualesquiera que sean los valores *correspondientes* que se elijan.

216. Esta generalidad del concepto de cantidades proporcionales exige que se posea un criterio para reconocer la proporcionalidad, y comúnmente se adopta uno de los dos que siguen:

Primer criterio.—Se ve si a valor **doble** *dado a una de las cantidades* (la que se supone variable) *corresponde en la otra* (en la *función*) *valor también doble; y se supone* (o se demuestra) *que si el valor de la primera se hiciese, en vez de doble, triple, cuádruple, etc., el de la segunda se haría asimismo triple, cuádruple, etc.*

Ejemplo: Supongamos que una persona ha de viajar en un carruaje cierto tiempo, pagando por ello cierta cantidad de dinero que llamaremos coste del viaje.

Si a doble, triple, cuádruple, etc., tiempo corresponde doble, triple, cuádruple, etc., coste, y, por ejemplo, al tiempo de una hora corresponde el coste de cinco pesetas, midiendo el tiempo en horas y el coste en pesetas, se corresponderán las cantidades que están una debajo de otra en los renglones siguientes:

Tiempo, en horas:	1,	2,	3,	4, ...
Coste, en pesetas:	5,	10,	15,	20, ...

y siendo proporcionales los números que en estas series figuran, porque las razones $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{15}$, etcétera, son todas iguales, con dos números de la primera serie y los dos correspondienies de la segunda se podrá formar una igualdad fraccionaria (207), y con las cantidades medidas por dichos números una proporción.

Podríamos, pues, afirmar que el tiempo que dura el viaje y el coste de éste son proporcionales, por lo menos siempre que aquel tiempo sea un número entero de horas.

Ponemos esta restricción, porque hasta ahora sólo hemos hecho figurar números enteros en la serie de los que miden el tiempo. Pero se puede ver que la propiedad se extiende al caso en que se atribuyan al tiempo cualesquiera valores *racionales*, (*) para lo cual basta introducir en la serie de números que miden el tiempo los números fraccionarios. En efecto: si queremos introducir, por ejemplo, las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{12}$, las reduciremos a común denominador y resultarán las equivalentes $\frac{24}{60}$ y $\frac{5}{60}$. Pero como $\frac{1}{60}$ de hora ha de repetirse 60 veces para formar una hora, el coste correspondiente debe ser tal que repetido también 60 veces dé 5 pesetas. Será, pues, $\frac{5}{60}$ de peseta.

Si tomásemos por unidad $\frac{1}{60}$ de hora (un minuto) tendríamos, por consiguiente, correspondiéndose los valores que siguen :

Tiempo, en horas : $\frac{1}{60}, \frac{2}{60}, \frac{5}{60} \ldots$

Coste, en pesetas : $\frac{5}{60}, \frac{10}{60}, \frac{15}{60} \ldots$

(*) *Positivos*.

con lo cual vemos que también para valores fraccionarios subsiste la proporcionalidad. (*)

Segundo criterio.—Dos cantidades son directamente proporcionales, si a valores iguales de una corresponden valores iguales de la otra, y a la suma de dos valores de la primera, la suma de los dos correspondientes de la segunda.

Este criterio es, en el fondo, el mismo anterior, pero le aventaja en precisión.

Para explicarlo nos valdremos de un ejemplo análogo al empleado antes. Supongamos que a igual tiempo de recorrido en el carruaje corresponde igual coste. Tomemos por unidad de tiempo la hora, y por unidad de coste el de 5 pesetas, que para que aparezca como tal unidad lo llamaremos 1 duro. Entonces, por la segunda parte del enunciado, a las sumas.

1 h. + 1 h., 2 h. + 1 h., 3 h. + 1 h... corresponderán
1 d. + 1 d., 2 d. + 1 d., 3 d. + 1 d...

es decir, que serán correspondientes los términos de las dos series que siguen:

Tiempo, en horas:	1,	2,	3,	4...
Coste, en duros:	1,	2,	3,	4...

y como evidentemente las razones $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ ..... son iguales, las series de números enteros que las forman son proporcionales. Se vería, además, como antes, que dichas series pueden completarse con términos fraccionarios para consti-

(*) Para valores irracionales, se verá después.

tuir todo el conjunto de números racionales (positivos).

(Sobre la introducción de números irracionales, que corresponden a valores inconmensurables con la unidad elegida, se hablará más adelante).

217. **Proporcionalidad inversa.**—Dos cantidades que dependen una de otra son *inversamente* proporcionales cuando sus valores particulares se corresponden de modo que con la razón de dos valores de la primera y la de los dos correspondientes de la segunda *tomados en orden inverso* se puede formar una proporción.

Si dos cantidades son *inversamente* proporcionales y medimos los valores con una unidad común (para cada una de ellas) las dos series de números son inversamente proporcionales.

Ejemplo: Si suponemos que *el tiempo* que se tarda en efectuar un trabajo es *inversamente* proporcional al número de obreros que en él se emplean (esto es un convenio), y suponemos que empleando un obrero se tarda una hora, se corresponderían los valores

$$\text{Número de obreros:}\quad 1,\quad 2,\quad 3...$$

$$\text{Tiempo, en horas:}\quad 1\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}...$$

y estas series de números son inversamente proporcionales.

Los criterios para reconocer la proporcionalidad inversa son los mismos que para reconocer la proporcionalidad directa entre los valores de la primera cantidad y *los inversos* de los de la segunda. El más sencillo será, por consiguiente, el que sigue:

Se ve si a doble, triple, etc. valor de una cantidad corresponde en la otra mitad, tercera parte, etcétera.

En el ejemplo, a doble número de obreros corresponde mitad de tiempo, etc.

218. Una cantidad que es función de otra se dice proporcional al *cuadrado* o al *cubo* de ella cuando la razón de dos valores particulares de la primera es igual a la de los cuadrados o cubos de los correspondientes de la segunda. Entonces a la serie de valores 1, 2, 3,... de la variable corresponden en la función la serie de cuadrados o cubos de estos mismos números, midiendo en unidades comunes y correspondientes.

Ejemplos: Las áreas de los cuadrados son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados, y se corresponden los valores siguientes:

Long. en m.	1,	2,	3,	4,..
Áreas en m^2	1,	4,	9.	16,...

Los volúmenes de los cubos son proporcionales a los cubos de las longitudes de sus aristas, y se corresponden los siguientes valores:

Long. en m.	1,	2,	3,	4,...
Vol. en m^3	1,	8,	27,	64,...

La *intensidad* de iluminación de una pantalla es inversamente proporcional *al cuadrado* de la *distancia* a que se halla la luz que la ilumina, y si se corresponden la distancia un metro con la intensidad expresada por una bujía, se corresponderán

Distancias en m.	1,	2,	3,	4,...
Intensidades en bujías.	1,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{1}{16}$,...

219. **Proporcionalidad compuesta.**—Una cantidad M que depende de *varias* A, B, C, se dice que es proporcional a ellas, directa o inversamente, cuando es proporcional a A, permaneciendo constantes B y C; a B, siendo invariables A y C, y a C, cuando no varían A ni B.

Ejemplo: el *volumen* de un paralelepípedo rectangular es proporcional a sus *dimensiones*. Esto quiere decir que es proporcional a la longitud cuando no varía la anchura ni la altura, a la anchura cuando no varían la longitud ni la altura, y a la altura cuando permanecen constantes la longitud y la anchura.

220 **Principio fundamental.** — Cuando una cantidad es proporcional a otras varias, la razón de dos valores particulares de la primera es igual al producto de las razones de los valores correspondientes de las otras.

Ejemplo: Admitiendo que el tiempo que se necesita para llenar cierto número de cubas de vino sea directamente proporcional a la capacidad total de ellas, e inversamente proporcional al número de obreros que se empleen, supongamos que se correspondan los siguientes valores:

Tiempo	Capacidad	Número de obreros
2 días	80 Hl	4

Si hacemos variar la capacidad, dejando fijo el número de obreros, variará el tiempo, y llamando x al valor que corresponde a la nueva capacidad, que supondremos de 120 Hl, se tendrá :

Tiempo	Capacidad	
2 días	80 Hl	Número de obreros, 4.
x íd.	120 íd.	

Por ser el tiempo proporcional a la capacidad

$$\frac{2}{x} = \frac{80}{120} \quad (a)$$

Si ahora hacemos variar el número de obreros dejando fija la capacidad de 120 Hl, llamando z al valor del tiempo correspondiente a 8 obreros,

Tiempo	Número de obreros	
x	4	Capacidad 120 Hl
z	8	

Por ser el tiempo *inversamente* proporcional al número de obreros tendremos :

$$\frac{x}{z} = \frac{8}{4} \quad (b)$$

y multiplicando las igualdades (a) y (b)

$$\frac{2}{x} \times \frac{x}{z} = \frac{80}{120} \times \frac{8}{4}$$

o bien, puesto que $\frac{2 \, . \, x}{x \, . \, z} = \frac{2}{z}$,

$$\frac{2}{z} = \frac{80}{120} \times \frac{8}{4} \quad (c)$$

Y como eran valores correspondientes :

Tiempo	Capacidad	Número de obreros
2 días	80 Hl	4
z íd.	120 íd.	8

se ve en (c) que la razón de los valores del tiempo es, efectivamente, el producto de la razón de las capacidades por la razón de los números de obreros, tomando ésta invertida por ser inversa la proporcionalidad.

REGLAS DE TRES

221. Son las que sirven para resolver los siguientes problemas:

Problema de regla de tres simple.—*Dado un par de valores particulares de dos cantidades proporcionales, hallar el valor que corresponde en una de las cantidades a un nuevo valor de la otra.*

Ejemplo: Admitiendo que para dos cuerpos que se mueven con igual velocidad la distancia recorrida es directamente proporcional al tiempo empleado en recorrerla, si llamamos e a la distancia recorrida en t segundos, y preguntamos qué valor del tiempo corresponde a una nueva distancia e', llamando x al tiempo buscado, dispondremos los datos en la siguiente forma:

Distancias	Tiempos
e	t
e'	x

La proporción

$$\frac{e}{e'} = \frac{t}{x}$$

o la igualdad fraccionaria que de ella se deduce al reemplazar las cantidades por los números que expresan sus medidas, permite hallar el término desconocido.

222. **Problema de regla de tres compuesta.**—*Dada una serie de valores correspondientes de varias cantidades en que la primera sea proporcional a las demás, y una nueva serie de valores de todas éstas, hallar el valor que a dicha segunda serie corresponde en la primera cantidad.*

Ejemplo : Sabiendo que se corresponden los valores siguientes del ejemplo anterior (220)

Tiempo	Capacidad	Núm. de obreros
2 días	80 Hl.	4
z íd.	120 íd.	8

hallar el valor z del tiempo que corresponde a la nueva serie de valores (120 Hl. y 8 obreros) de las demás cantidades.

Para resolver este problema basta aplicar el principio fundamental antes expuesto (220), en virtud del cual la igualdad *(c)* origina la

$$\frac{2}{z} = \frac{640}{480}$$

de la que puede sacarse el valor de z.

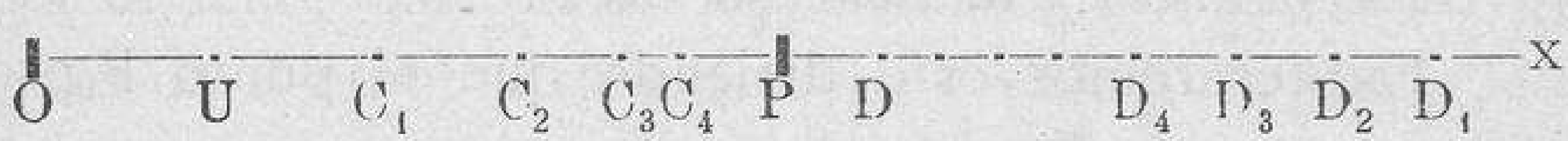
223. **Observación.**—La proporcionalidad de las cantidades y las reglas de tres que de ella se derivan se emplean con gran frecuencia en la resolución de multitud de cuestiones tales como las de intereses, descuentos, repartos proporcionales, etc.

Las más frecuentes de estas cuestiones pueden repasarse en nuestro librito «Figuras y Cálculos», o en otro análogo, y más al detalle en obras especialmente dedicadas a ejercicios prácticos de Aritmética. Cada profesor elegirá de entre estos ejercicios los que le parezcan más oportunos, según el fin que se proponga, pues no hay motivo, a nuestro juicio, para limitarse en las aplicaciones a la llamada Aritmética mercantil.

La dificultad no consiste en aplicar las reglas, sino en separar los problemas parciales que se enlazan entre sí en toda cuestión práctica por sencilla que sea, y para esto es mucho más útil que acumular reglas resolver suficiente número de cuestiones para engendrar el hábito de hacerlo. Por eso aconsejamos que se repitan los ejercicios contenidos en el librito citado, o que se propongan otros nuevos tomados de las colecciones de problemas de Aritmética, si bien es fuerza confesar que el auxilio de las ecuaciones, estudiadas en el Algebra, facilita extraordinariamente la resolución de tales problemas.

Cantidades inconmensurables y números irracionales

224. **Observaciones preliminares.**—Si sobre la semirrecta OX, que se extiende hacia la derecha



tomamos varios segmentos que tengan por origen el punto O, es indudable que cuanto mayores vayan siendo irán teniendo su extremo más hacia la derecha. Así, por ejemplo, será $OC_1 < OC_2 < OC_3 \ldots$

Y recíprocamente: un segmento, tal como el OP, será mayor que todos aquellos cuyo extremo caiga a la izquierda de P y menor que aquellos cuyo extremo caiga a la derecha de P. En otros términos: la posición relativa de los extremos de los segmentos nos dará idea de su magnitud, correspondiéndose en este sentido las frases *mayor segmento* y *extremo a la derecha; menor segmento* y *extremo a la izquierda.*

Hecha esta observación, tomemos una unidad de longitud OU y supongamos que el segmento OP, conmensurable con dicha unidad, tiene con ella la razón $\frac{23}{5}$, por ejemplo. Sabemos (156) que esto se expresa escribiendo:

$$\frac{OP}{OU} = \frac{23}{5} \text{ o bien } OP = OU\,\frac{23}{5}$$

y, en una u otra forma, significa que OP es veintitrés veces la quinta parte de OU.

La longitud OP nos permite clasificar todas *las demás* longitudes conmensurables con OU en dos clases:

1.ª Longitudes menores que OP.

2.ª Longitudes mayores que OP.

Lo cual, en virtud de la observación antes hecha, equivale a decir, refiriéndonos a los extremos de los segmentos, que el punto P divide a los demás de la semirrecta en estas otras dos clases.

1.ª Puntos a la izquierda de P.

2.ª Puntos a la derecha de P.

Expresaremos esto diciendo que el punto P produce una **cortadura** en la semirrecta.

Si en vez de los segmentos nos fijamos ahora en los números que expresan sus medidas referidas a la unidad OU, es natural decir que el *número racional* $\frac{23}{5}$ produce en el campo de los números racionales positivos *una cortadura.* Con ello queremos significar que todos *los demás* números racionales (y positivos) quedan divididos en dos clases:

1.ª Números menores que $\frac{23}{5}$.

2.ª Números mayores que $\frac{23}{5}$.

Y es claro que esto equivale a afirmar:

a) Que hay números en ambas clases 1.ª y 2.ª

b) Que todo número de la 1.ª clase es menor que cualquiera de la 2.ª (Porque aquéllos son menores que $\frac{23}{5}$ y los otros mayores).

Estas dos condiciones son las que caracterizan la *cortadura* producida por $\frac{23}{5}$. Y, desde luego, esto se podría aplicar como a $\frac{23}{5}$ a cualquier otro número racional $\frac{m}{n}$ (ya fuese $m = \dot{n}$ o no).

En Geometría se demuestra que la diagonal de un cuadrado es una longitud tal que no es igual a ningún múltiplo del lado ni de una parte alícuota del lado, es decir, que tomando por unidad el lado, la medida de la diagonal no sería ni un número entero ni una fracción. Éste, y otros ejemplos que podrían ponerse, nos advierten la existencia de cantidades no mensurables exactamente con otras, a las cuales, por este motivo, se les da el nombre de *inconmensurables* (con la unidad elegida).

Supongamos ahora que OP fuese inconmensurable con OU. No habría entonces ningún número ni entero ni fraccionario que correspondiese al punto P considerado como extremo del segmento OP.

Mas no por eso dejaría de existir el punto P, y de producir, como antes, una *cortadura*, clasificando los demás puntos en puntos de la izquierda (como los C_1 C_2 ...) y puntos de la derecha (D_1 D_2 D_3 ...), y correspondiendo a los primeros segmentos *menores* que OP y a los segundos segmentos *mayores* que OP.

Pero con respecto a los *números* que miden los segmentos existe entre la *cortadura* de antes y la de ahora una diferencia notable. Pues antes, el número $\frac{23}{5}$ era mayor que todos los de la primera clase, y menor que todos los de la segunda, lo cual se expresa bien llamándole *elemento de separación entre ambas clases*. Pero ahora, como no hay *número racional* que corresponda al punto P, tampoco hay elemento racional de separación entre los números de la primera y de la segunda clase. Es natural, sin embargo, que puesto que el punto P sigue existiendo, le hagamos corresponder *numéricamente* **algo** que lo determine, y a ese *algo* que representamos por la letra griega α, (*) lo llamaremos todavía *número*; pero como no puede ser número *racional*, lo denominaremos *número* **irracional.** Y es, asímismo, lógico que digamos, recordando lo que con los segmentos ocurre, que ese número irracional α es mayor que los números (racionales) de la primera clase, menor que los de la segunda, y elemento de separación de ambas.

El alumno no debe empeñarse en buscar en su imaginación ese *algo* que hemos llamado número irracional. Cuando quiera tener una representación sensible de él la encontrará perfectamente clara en el segmento OP, inconmensurable con OU. Y en el terreno abstracto de los números le bastará considerar que al afirmar que existe el número irracional α no hacemos sino afirmar que existe la *cortadura* que satisface a las condiciones antes dichas [*(a* y *(b*] y que ésta cortadura no tiene ahora elemento racional de separación.

Admitida la existencia del símbolo α desaparecen realmente las longitudes inconmensurables, porque es natural convenir en que α represente ahora como siempre la *razón* entre la cantidad OP y la unidad OU, y que escribamos, por tanto

$$\frac{OP}{OU} = \alpha, \text{ o bien } OP = OU \,.\, \alpha$$

por lo cual α será el *número que exprese la medida de* OP. De modo que en vez de decir que OP es inconmensurable con OU, podremos decir que la razón de OP con OU es un *número irracional.*

(*) Esta letra se llama *alfa*, y corresponde a la *a* de nuestro abecedario.

225. Las consideraciones que anteceden creemos que serán suficientes para aclarar las siguientes definiciones, que son el resumen de ellas.

Se llama cortadura en el campo de los números racionales la distribución de ellos en dos clases tales que se verifique:

a) Existen números racionales en ambas clases.

b) Los números de la primera clase son menores que los de la segunda.

(Nosotros hemos limitado esto a los números positivos).

Un número racional produce una cortadura considerándolo como elemento de separación entre las dos clases formadas por todos *los demás* números, pero generalmente se le considera a él mismo como formando parte de la primera clase, en la cual es entonces elemento *máximo*.

226. *Número* **irracional** es el elemento de separación que suponemos entre las dos clases de una cortadura cuando no existe elemento racional de separación entre ellas. Se representa por una letra (nosotros la usamos griega) y tiene su imagen gráfica en un segmento inconmensurable con la unidad; y es, *por definición*, mayor que los números racionales de la primera clase y menor que los de la segunda.

227. Hemos conseguido con la adopción del número irracional que a todo segmento OP, conmensurable o inconmensurable con la unidad OU, corresponde un *número*, racional o irracional. Cabe ahora preguntar si inversamente, dado un número a capricho,

podrá corresponderle un determinado segmento de la semirrecta OX.

Desde luego podemos decir que sí cuando el número sea entero o fraccionario, es decir, racional, puesto que ya hemos visto la manera de hacerlo. Pero si el número es el irracional α, hemos dicho que su existencia sólo supone que hay dos clases de números que cumplen las condiciones *a* y *b*, y de esto sólo podemos deducir que hay dos series de segmentos medidos por números racionales y tales que los extremos C_1, C_2, C_3, ... de los de la primera serie están todos a la izquierda de cualquiera de los D de la segunda, y todos los D_1, D_2, D_3, siempre a la derecha de cualquiera de los C de la primera.

Ahora bien: los caracteres que hemos asignado a las cantidades continuas de que nos ocupamos (135) y el concepto mismo intuitivo que de la recta poseemos nos permiten *admitir* que puesto que los puntos C_1, C_2, C_3,... pueden ir avanzando hacia la derecha, y los D_1, D_2, D_3, retrocediendo hacia la izquierda, y puesto que tomando una unidad suficientemente pequeña puede disminuir arbitrariamente la distancia entre el último punto C y el último D, debe considerarse que existe *un único* punto P que separa ambas series. El segmento OP será entonces el correspondiente al número irracional α.

Hemos así conseguido nuestro objeto, que no era otro sino establecer entre las longitudes y los números una correspondencia bien definida, que es además aplicable a otras cantidades que tengan caracteres análogos a los de la longitud de los segmentos.

228. Existen operaciones puramente aritméticas que conducen a números *irracionales*.

Hagamos en el campo de los números racionales la siguiente *cortadura:*

a) Hay números racionales de dos clases, a saber: 1.ª, la formada por todos los números (positivos) cuyos cuadrados son menores que 2; y 2.ª, la formada por aquellos cuyos cuadrados son mayores que 2.

b) Los números de la primera clase son menores que los de la segunda. Porque siendo a de la primera y b de la segunda, será $a^2 < 2 < b^2$, luego $a^2 < b^2$ y esto supone que $a < b$.

Se ve, desde luego, que todo número racional pertenece o a la primera clase o a la segunda, porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea exactamente igual a 2. (182)

¿Habrá elemento *racional* de separación entre ambas clases? Vamos a ver que no.

En efecto: si a pertenece a la primera clase, será $a^2 < 2$, y es fácil *comprobar* (y podría *demostrarse*) que existe otro número a' también de la primera clase, y cuyo cuadrado está más próximo a 2 que el de a, es decir: que se tiene $2 - a'^2 <$ $< 2 - a^2$, y de aquí puede deducirse que $a'^2 > a^2$ y que $a' > a$.

Luego *no hay* en la primera clase un número *máximo*. Se ve, análogamente, que no hay en la segunda un número *mínimo*, luego *no hay* elemento *racional* de separación; y por consiguiente, esta cortadura *define* un número *irracional*, α. Después de estudiar las operaciones con números irracionales se puede demostrar, además, que $\alpha^2 =$ 2, luego conservando la definición de raíz cuadrada deberemos decir que $\alpha = \sqrt{2}$. Por eso afirmaremos que $\sqrt{2}$ es un número *irracional* (Precisamente el que correspondería a la longitud de la diagonal de un cuadrado cuando se tomase el lado por unidad).

Lo mismo ocurre con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc., es decir, con las raíces de enteros que no son cuadrados perfectos.

Para terminar estas explicaciones conviene aun hacer la siguiente observación. Sabemos que el número irracional $\alpha = \sqrt{2}$, no es en rigor sino el conjunto de dos series de infinitos números racionales cada una, y tales que los de la primera clase dan al elevarlos al cuadrado números menores que 2, y los de la segunda mayores.

Pertenecen a la primera clase los números de la serie

$$1, \quad 1{,}4, \quad 1{,}41, \quad 1{,}414, \quad 1{,}4142\ldots$$

que se obtienen al extraer la raíz cuadrada de 2 *por defecto* en menos de una unidad, una décima, etcétera, y pertenecen a la segunda clase los de la serie de raíces igualmente aproximadas *por exceso*

$$2, \quad 1{,}5, \quad 1{,}42, \quad 1{,}415, \quad 1{,}4143\ldots$$

siendo digno de observarse que la diferencia entre dos términos correspondientes va siendo sucesivamente 1; 0,1; 0,01; etc. y puede, por tanto, llegar a ser tan pequeña como se quiera, es decir, menor que cualquier número positivo que se fije.

Pero adviértase que *nunca* obtendremos por este medio *exactamente* la $\sqrt{2}$, y que si bien *aproximadamente* puede decirse que $\sqrt{2}$ es, por ejemplo, 1,4142, la igualdad

$$\sqrt{2} = 1{,}4142$$

no sería rigurosamente cierta. En otros términos, el número irracional $\sqrt{2}$ (y lo mismo ocurre con los demás números irracionales) *no tiene representación decimal exacta;* pero pudiendo hallarse cuantas cifras decimales se desee, es costumbre escribir, v. g.:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

expresando por los puntos que falta de hallar una *infinidad* de cifras.

También hay que tener presente que estas fracciones decimales *inacabables* que expresan los números irracionales no pueden ser *periódicas*, pues si lo fuesen, su generatriz daría el valor *exacto* del número irracional, lo que es absurdo.

229. Hasta ahora no hemos hecho sino dar el concepto del número irracional, pero es claro, que de poco nos serviría esto si no supiésemos cuándo dos números irracionales son iguales o desiguales, y cómo puede operarse con ellos.

Cabe definir la igualdad, desigualdad y operaciones refiriéndose, por ejemplo, a las longitudes representadas por los números, y así dos números irracionales serían iguales cuando expresasen referidos a igual unidad longitudes iguales, etc.

Pero conviene tener criterios puramente aritméticos para operar con estos números.

Como la materia exige considerables desarrollos y explicaciones en que no podemos entrar aquí, nos limitaremos a las indicaciones más precisas, omitiendo toda demostración y aplicando prácticamente cuanto se va a decir a los irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en cuyas clases figuran los términos siguientes :

$$\sqrt{2}\left\{\begin{array}{lll}\text{En la 1.}^{\text{a}}\text{ clase} & 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41,\ 1{,}414;\ 1{,}4142\ldots \\ \text{Id.}\quad 2.^{\text{a}}\text{ íd.} & 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42,\ 1{,}415;\ 1{,}4143\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{3}\left\{\begin{array}{lll}\text{En la 1.}^{\text{a}}\text{ clase} & 1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}7320\ldots \\ \text{Id.}\quad 2.^{\text{a}}\text{ íd.} & 2;\ 1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733;\ 1{,}7321\ldots\end{array}\right.$$

Por definición, puede escribirse: $1 < \sqrt{2};\ 1{,}4 < < \sqrt{2}\ldots$ etc. y al revés, $2 > \sqrt{2},\ 1{,}5 > \sqrt{2}\ldots$ etc.

230. La igualdad de dos irracionales requiere cerciorarse de que *todo* número racional de la primera clase de uno esté también en la primera del otro, y *todo* número de la primera de éste, en la primera de aquél.

Para nosotros es más interesante, y más sencillo, reconocer la *desigualdad*. Aplicándolo al ejemplo nos convencemos de que $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ viendo que existe *un* número que siendo mayor que $\sqrt{2}$ es menor que $\sqrt{3}$. Tal es, por ejemplo, el número $1{,}5 > \sqrt{2}$, y menor que $1{,}7$, que a su vez es menor que $\sqrt{3}$.

231. *Adición.*—Por suma de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ se entiende el número (cuya existencia puede demostrarse) que serviría de elemento de separación de las series.

$$1 + 1;\ 1{,}4 + 1{,}7;\ 1{,}41 + 1{,}73;\ 1{,}414 + 1{,}732;\ 1{,}4142 + 1{,}7320\ldots$$
$$2 + 2;\ 1{,}5 + 1{,}8;\ 1{,}42 + 1{,}74;\ 1{,}415 + 1{,}733;\ 1{,}4143 + 1{,}7321\ldots$$

o sea

$$2;\quad 3{,}1;\quad 3{,}14;\quad 3{,}146;\quad 3{,}1462\ldots$$
$$4;\quad 3{,}3;\quad 3{,}16;\quad 3{,}148;\quad 3{,}1464\ldots$$

(Obsérvese: que todos los números de la primera serie son menores que los de la segunda; que aquéllos van, en general, creciendo y éstos decreciendo, y que la diferencia entre términos correspondientes va siendo sucesivamente 2, 0,2; 0,02, etc.)

232. *Substracción.*—Se hace sumando el minuendo con el número *opuesto* al substraendo que se obtiene cambiando de signo a los números de las dos series del substraendo y tomando luego por primera serie la segunda y al revés.

Así: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ viene caracterizada por las diferencias

1 — 2; 1,7 — 1,5; 1,73 — 1,42; 1,732 — 1,415; 1,7320 — 1,4143...
2 — 1; 1,8 — 1,4; 1,74 — 1,41; 1,733 — 1,414; 1,7321 — 1,4144...

o sea

—1; 0,2; 0,31; 0,317; 0,3177...
1; 0,4; 0,33; 0,319; 0,3179...

(Háganse observaciones análogas a las indicadas en la adición).

233 *Multiplicación.*—Por producto de $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ se entiende el número (cuya existencia podría demostrarse) caracterizado por las series.

1×1; $1,4 \times 1,7$; $1,41 \times 1,73$; $1,414 \times 1,732$; $1,4142 \times 1,7320$...
2×2; $1,5 \times 1,8$; $1,42 \times 1,74$; $1,415 \times 1,733$; $1,4143 \times 1,7321$...

o sea

1; 2,38; 2,4393; 2,449048; 2,44939440...
4; 2,70; 2,4708; 2,452195; 2,44970903...

234. *División*—Supuestos los datos positivos, la división se efectúa multiplicando el dividendo por el número *inverso* del divisor que se obtiene tomando los inversos de los términos de las dos series del divisor y tomando luego por primera serie la segunda y al revés.

Así: $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ sería el número caracterizado por las series

$$\frac{1}{2},\ \frac{1,7}{1,5},\ \frac{1,73}{1,42},\ \ldots$$

$$\frac{2}{1},\ \frac{1,8}{1,4},\ \frac{1,74}{1,41},\ \ldots$$

Pero lo mismo para el producto que para el cociente pueden seguirse otros procedimientos fundados en las propiedades que van a seguir.

235. **Consecuencia final**. —Los números racionales y los irracionales se llaman juntamente números **reales**, de modo que en esta denominación están comprendidos todos los números que hemos estudiado, a saber: los *naturales*, *enteros* (positivos o negativos), *fraccionarios*, *e irracionales*. En el campo de los números reales son posibles siempre la adición, substracción, multiplicación y división (exceptuando el caso de ser cero el divisor), y estas operaciones se han definido de tal suerte que al hablar, por ejemplo, de suma de números racionales lo mismo se aplica siendo éstos enteros que fraccionarios; al hablar, v. g., de producto de números *reales* lo mismo podemos referirnos a los racionales que a los irracionales, y además, se conservan las propiedades fundamentales de las operaciones (uniforme, conmutativa, etc.), es decir, que cada nueva clase de números que hemos ido formando contiene, como caso particular, los números de las categorías inferiores.

De esta suerte se ha generalizado el concepto de número de un modo provechoso para el cálculo y exento de contradicciones lógicas.

236 Por lo que respecta a la radicación, hemos admitido que la raíz cuadrada de un número positivo (único caso considerado) tiene siempre un valor positivo racional o irracional que, elevado al cuadrado reproduce el radicando. Se le llama *valor aritmético.*

Fundados en ello, demostraramos los teoremas que siguen, que son de utilidad teórica y práctica.

237. *La raíz cuadrada de un producto se obtiene multiplicando las raíces cuadradas de los factores.*

Ejemplo: $\sqrt{a \,.\, b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$ (1)

Para demostrarlo, basta ver que el segundo miembro de esta igualdad será la raíz cuadrada de $a \,.\, b$, si elevado al cuadrado da el radicando $a \,.\, b$.

Y así sucede; porque teniendo en cuenta que para elevar un producto al cuadrado hay que elevar cada factor, y que la raíz cuadrada de un número elevada al cuadrado da, por definición, dicho número, se tendrá

$$(\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \,.\, (\sqrt{b})^2 = a \,.\, b$$

que es lo que hacía falta demostrar para ver que la igualdad (1) es verdadera.

238. Leyendo la igualdad (1) invertida en esta forma

$$\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} = \sqrt{a.b}$$

se puede decir: *Para multiplicar las raíces cuadradas de dos o más números, se extrae la raíz cuadrada del producto de dichos números.*

Así, el ejemplo $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{3}$ que pusimos al hablar del producto de irracionales se resolvería ahora más fácilmente hallando los valores aproximados de la $\sqrt{2.3} = \sqrt{6}$. (Compárese el valor 2,44949.. que ahora se obtiene con los obtenidos antes).

239. *La raíz cuadrada de un cociente se obtiene dividiendo la raíz del dividendo por la del divisor..*

Ejemplo :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (2)$$

Porque

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

240. Leyendo invertida la igualdad (2) nos dice :

Para dividir las raíces cuadradas de dos números se extrae la raíz cuadrada de su cociente.

Ejemplo :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1,5}$$

241. *Para elevar a una potencia (de exponente natural) una raíz, se eleva el radicando, conservando el signo de la raíz.*

Ejemplo :

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n} \quad (3)$$

Porque según la definición de potencia

$$(\sqrt{a})^n = \overbrace{\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{a}\ldots}^{(n \text{ factores}} = \sqrt{a.a.a\ldots} = \sqrt{a^n}$$

242. *Para extraer una raíz de otra raíz se*

conserva el radicando y se extrae de él una raiz cuyo índice sea el producto de los índices.

Ejemplo :

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} \quad (4)$$

Porque el primer miembro de esta igualdad, elevado a la 4.ª potencia, daría el radicando a del 2.º miembro sin más que tener en cuenta que

$$\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^4 = \left[\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^2\right]^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

243. Leyendo inversamente la igualdad (4) sale

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$$

que dice : *para extraer la raíz 4.ª de un número se extrae la raíz cuadrada del número y luego la raíz cuadrada del resultado.*

244. *Para introducir un factor debajo del signo de la raíz cuadrada hay que elevarlo al cuadrado.*

Ejemplos :

$$3 \times \sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^2 \times \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{18}{5}}, \quad a \,.\, \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \,.\, b}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Porque

$$(a \,.\, \sqrt{b})^2 = a^2 \,.\, (\sqrt{b})^2 = a^2 \,.\, b.$$

Inversamente : *si debajo del signo de la raiz* *hay un número que sea cuadrado perfecto, se puede sacar fuera extrayéndole la raíz.*

Ejemplos :

$$\sqrt{9 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5} \quad » \quad \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad » \quad \sqrt{\frac{r^2 \cdot 5}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{4}} \cdot \sqrt{5} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5} \text{ etc.}$$

245. Cuando el denominador de una fracción es una raíz cuadrada, se puede *racionalizar* dicho denominador multiplicando por él los dos términos de la fracción.

Ejemplos :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \quad » \quad \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ etc.}$$

Si el denominador es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ se multiplican los dos términos de la fracción por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, (*) y sale

$$\frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{N \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

y como el producto de la suma de dos números por su dfierencia es la diferencia de sus cuadrados (   ), y $(\sqrt{a})^2 = a$ y $(\sqrt{b})^2 = b$, la expresión anterior se convierte en

$$\frac{N \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

cuyo denominador es racional.

Estas transformaciones se usan frecuentemente en Geometría.

(*) Si fuese el denominador $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ se multiplicarían los términos por $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

247. **Generalización sobre las cantidades proporcionales.**—Expresada la razón de dos cantidades inconmensurables por un número irracional, es aplicable a ellas la definición de proporcionalidad.

Pero para establecerla será preciso que en las series de valores numéricos correspondientes puedan entrar, además de los racionales, los *irracionales*.

Sean dos cantidades, y A el valor de la primera que corresponde al B de la segunda. Tomemos A como unidad de los valores de la primera, y B por unidad de los de la segunda. Si las cantidades son proporcionales para valores conmensurables con A y B, respectivamente, se corresponderán:

1.ª	cantidad	en	unidades	A.—1, 2, 3 ...
2.ª	íd.	en	íd.	B.—1, 2, 3 ...

Esto llevará consigo que se correspondan también los números fraccionarios, y, por consiguiente, todos los que figuren en las dos clases de la cortadura de un número *irracional* que exprese la razón de dos valores inconmensurables. Luego las cantidades seguirán siendo proporcionales, aun en el caso de inconmensurabilidad.

127. **Generalización sobre las cantidades proporcionales.**—Expresada la razón de dos cantidades inconmensurables por un número irracional, es aplicable á ellas la definición de proporcionalidad.

Pero para establecerla será preciso que en las series de valores numéricos correspondientes puedan entrar, además de los racionales, los *irracionales*.

Sean dos cantidades, y A el valor de la primera que corresponde al B de la segunda. Tomemos A como unidad de los valores de la primera, y B por unidad de los de la segunda. Si las cantidades son proporcionales para valores conmensurables con A y B, respectivamente, se corresponderán:

1.ª cantidad en unidades A ... [illegible]

2.ª id. en id. B ... [illegible]

Esto llevará consigo que se correspondan también los números irracionales, y por consiguiente, todos los que figuren en las dos clases de la cortadura de un número irracional que exprese la razón de dos magnitudes cualesquiera. Luego las cantidades seguirán siendo proporcionales, aun en el caso de inconmensurabilidad.

ÍNDICE

Páginas