CLARIN

CINEMÁTICA.

TRATADO

DE

CINEMÁTICA PURA

POR

D. LAURO CLARIANA Y RICART

INGENIERO INDUSTRIAL

Y CATEDRÁTICO POR OPOSICION DE MATEMÁTICAS

EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE TARRAGONA

TRAHITUR
SAPIENTIA
DE OCCULTIS

TARRAGONA

IMPRENTA DE PUIGRUBÍ Y ARÍS

1879

A LA EXCMA. DIPUTACION PROVINCIAL

DE TARRAGONA.

A V. E. dedicamos, Excmo. Sr., este modesto trabajo, fruto de los pocos ratos libres que nos dejan nuestras múltiples ocupaciones. Dicho trabajo podrá dejar de ser tan bueno como fuera menester para ser digno de vuestras manos; empero desde el instante en que lo apadrina V. E., ello es que con este acto de generosidad, brilla una vez más en vuestra frente la inmarcesible corona de verdadero protector de las ciencias y de las artes, dejando en nuestro corazon un recuerdo imperecedero de afecto y gratitud.

EL AUTOR.

ADVERTENCIA.

No tratamos de sacar nuestras hopalandas en demérito de justas reputaciones adquiridas; no es nuestro propósito pasar por encima de ciertas notabilidades, que son el orgullo de nuestra Pátria; nó, mil veces nó.

Nuestro objeto es colocar una piedrecita en ese gran templo de Minerva, cumpliendo con lo que hasta cierto punto consideramos un deber por la posicion que ocupamos. No presumimos tampoco de innovadores; pues en la ciencia de que nos vamos á ocupar, se podrían aplicar las palabras de Lagrange, cuando hablando de las Matemáticas decia: «Que la mina es ya muy profunda y que á ménos que se descubran nuevos filones, será preciso tarde ó temprano abandonarla.» Empero, como en España parece que los hombres de valer no se han dedicado á publicar obras de esta naturaleza, nosotros, con nuestras débiles fuerzas, vamos á llenar, en lo que sea dable, este vacío, tomando nota de lo que dicen las principales obras estrangeras, aclarando ciertas dudas, metodizando ciertos puntos, etc. etc., á fin de ver si podemos formar de ese modo un conjunto armónico y regular de la Cinemática pura, sacrificando, si á mano viene tambien, la concision y pureza del lenguaje matemático en bien de la claridad, pues nadie ignora que las omisiones de ciertas esplicaciones en los cálculos de suyo complicados, llevan á mal traer al pobre lector, acabando por disgustarle y hacerle aborrecer la ciencia, que, desarrollada de otra manera, quizá le habria producido ópimos frutos.

Este es nuestro sentir; este es nuestro fin único y esclusivo; si así lo comprenden nuestros amados lectores, dispensando á esta obrita una acojida favorable, aunque inmerecida, será para nosotros el galardon de más estima que podíamos apetecer.

El Autor.

ESTUDIO DE CINEMÁTICA PURA.

PRELIMINARES.

Cinemática, se deriva de la palabra griega Κινημα, que significa movimiento; empero, como en este movimiento se prescinde por completo de las fuerzas que lo originan, puédese definir la Cinemática, diciendo que tiene por objeto el estudio del movimiento de las figuras, atendiendo á un elemento más que la Geometría: el Tiempo.

Esta ciencia se considera dividida en dos partes: la primera, que estudia el movimiento de una manera general y abstracta; y la segunda, que se ocupa de la realizacion de estos movimientos debidamente combinados en las diferentes piezas de una máquina. En esta obra nos ocuparémos tan sólo de la primera parte, esto es, de lo que podríamos llamar Cinemática pura; y bajo este concepto podemos considerar esta ciencia como una rama muy importante de la Mecánica racional.

Para el desarrollo de este estudio interesa apreciar el tiempo en su verdadero valor, y, sin que sea nuestro propósito entrar aquí en cuestiones filosóficas, bastará indicar para el objeto que nos proponemos, que dos tiempos son iguales, cuando representan la duracion de dos fenómenos idénticos: esta sencilla consideracion nos permitirá fijar tiempos múltiplos y submúltiplos de otro tiempo tomado como unidad.

CAPÍTULO I.

Movimiento simple de un punto material.

I.—Movimiento en general.

Se dice que un cuerpo está en movimiento, cuando le vemos ocupar diferentes posiciones en el espacio respecto de tres puntos fijos del mismo, que no se hallen en línea recta; en caso contrario, dícese que el cuerpo está en reposo.

Cuando conozcamos en cada instante la posicion que ocupan los diferentes puntos de un cuerpo, tendrémos un conocimiento exacto del movimiento de éste; de manera que la posicion de un cuerpo en un instante depende en rigor de la de un punto, cuya situacion conviene determinar con toda seguridad por medio de tres ejes coordenados. Si se escriben, pues, las coordenadas del punto en funcion del tiempo, resultará que segun sea dicho tiempo serán las coordenadas del punto, estableciendo estas relaciones las ecuaciones denominadas del movimiento, tales como:

$$x=\varphi\ (t),\quad y=F\ (t),\quad z=f\ (t).$$

Al establecer dichas ecuaciones debe saberse cuáles son las coordenadas que corresponden á un tiempo dado, señalado por un fenómeno bien notable.

Si entre estas ecuaciones eliminamos t, podrán darse dos ecuaciones $F'\ (x, y, z)=0$, $f'\ (x, z, y)=0$, que representarán una línea (interseccion de las superficies indicadas por las dos ecuaciones anteriores), cuyas coordenadas quedarán satisfechas por un valor cualquiera de t; esta línea, que es la que describe el móvil, toma el nombre de trayectoria.

Ahora, si el movimiento se realiza sobre un plano, puede considerarse éste como plano de las xy, resultando para todas las posiciones del móvil $z=0$, y en este caso las ecuaciones del movimiento se reducen á

$$x=\varphi\ (t),\quad y=F\ (t).$$

Últimamente, si el movimiento se realiza sobre una línea conocida, una sola ecuacion de movimiento será suficiente para determinar el movimiento del punto dado, esto es,

$$s=f\,(t).$$

Adviértase que conviene aquí fijar en la curva un punto de partida, ó un punto notable en que se realice un fenómeno bien determinado; esto es, que, si por ejemplo, $t=0$, resulte $s'=f\,(0)$, siendo s' una cantidad conocida.

Estudiemos bajo el punto de vista geométrico esta última fórmula: $s=f\,(t)$.

Sea AB (figura 1.ª) la curva s sobre la cual se mueve el punto dado: supóngase O un punto fijo, y M la posicion del punto móvil cuando $t=0$. La curva M'NPQR de la fig. 2.ª nos dará una idea completa del movimiento del punto M de la fig. 1.ª, en el supuesto de ser CT y CS, dos ejes coordenados sobre los cuales se cuenten los tiempos, y distancias respectivas del punto fijo O al punto M de la trayectoria. Evidentemente, si se tiene $t=0$, resulta CM'=OM=s'; si t=CN, se obtiene $s=0$; si t=CR' (en el supuesto de ser la tangente en P paralela á CT), dedúcese el punto P' de la trayectoria, es decir, el punto más lejano á la izquierda de O, etc., de manera que, por medio de la curva de la fig. 2.ª, pueden seguirse todos los movimientos del punto M en su trayectoria, conforme habíamos indicado en un principio.

Conviene no confundir la curva M'NPQR con la trayectoria AB del punto móvil, pues son dos curvas muy distintas, por más que guarden cierta relacion.

Añadamos, por fin, que las ecuaciones del movimiento no se presentan siempre bajo la forma esplícita con que las hemos escrito anteriormente, siendo las siguientes las más generales:

$$F\,(x, y, z, t)=0,\quad F'\,(x, y, z, t)=0,\quad F''\,(x, y, z, t)=0.$$

II.—Movimiento uniforme.

El movimiento de un punto es uniforme, cuando recorre espacios iguales en tiempos iguales, cualesquiera que sea la unidad de tiempo que se escoja; ó bajo otros términos, el movimiento de un punto móvil es uniforme, cuando los espacios recorridos por éste son proporcionales á los tiempos que se necesitan para recorrerlos.

Tomemos, como ántes, un punto fijo O (fig. 1.ª); supongamos que en t_0, el punto móvil se halle en M, y que en el tiempo t, se haya trasladado á N; en virtud de la definicion tendrémos, llamando ON=s, y OM=s_0, la fórmula siguiente:

$$\frac{s-s_0}{t-t_0}=K,$$

representando K una cantidad constante; luego

$$s-s_0=K\,(t-t_0). \qquad (1)$$

Se ha convenido en llamar velocidad del móvil, el espacio recorrido por éste en la unidad de tiempo, ó sea, el espacio andado por $t'-t_0=1$, de donde, segun la fórmula (1), se tiene $s'-s_0=K=v$, luego

$$s-s_0=v\,(t-t_0). \qquad (a)$$

Esta ecuacion se simplifica, si se toma $t_0=0$, es decir, si se cuenta el tiempo á partir del momento en que el móvil se halle en s_0, transformándose la igualdad (a), en

$$s-s_0=vt,$$

ó sea, en

$$s=s_0+vt.$$

Si se supone $s_0=0$, es decir, si se toma el punto de partida en M, resulta todavía una fórmula más sencilla,

$$s=vt.$$

En el movimiento uniforme la línea que representa la ley del movimiento, segun las consideraciones generales ya establecidas, debe ser una línea recta; pues si representamos t y s por x é y, las fórmulas generales del movimiento uniforme ya halladas, se transforman en

$$y-y_0=v\,(x-x_0) \text{ y } y=vx,$$

las cuales, segun la geometría analítica, representan las ecuaciones de una línea recta, que en el primer caso pasa por el punto (x_0, y_0), y en el segundo por el orígen de coordenadas.

III.—Consideraciones generales acerca la velocidad de un movimiento cualquiera.

Lógico fuera despues del movimiento uniforme, pasar inmediatamente al estudio del movimiento uniformemente variado; pero la dificultad de poder apreciar debidamente el valor de la velocidad variable en cada unidad de tiempo infinitamente pequeña, nos obliga ántes á desarrollar este corto paréntesis para adquirir la verdadera nocion de velocidad en general, correspondiente á un movimiento cualquiera.

En el movimiento uniforme hemos visto que v=K, y como K es una constante, ha resultado serlo tambien la velocidad, diferenciándose unos movimientos de otros tan sólo por la rapidez de dicha velocidad; empero ¿cómo vendrémos en conocimiento de dicha rapidez en un movimiento variado?

Para resolver esta cuestion es preciso relacionar el movimiento variado con una série de movimientos uniformes, cuyas velocidades respectivas sirvan de medida á las velocidades del movimiento variado en cada instante; y como el movimiento debe considerarse esencialmente contínuo, si imaginamos un período de tiempo bastante corto Δt, el movimiento del punto se podrá considerar casi como uniforme; de suerte que la relacion $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ medirá aproximadamente la rapidez del movimiento durante el tiempo Δt: y á esta relacion se le dá el nombre de velocidad media durante el tiempo Δt; empero la velocidad media depende no sólo de t, sino de Δt, y por lo tanto no dá ninguna nocion de la naturaleza del movimiento en la época t; para ello es preciso que esta relacion pase á su límite, y entónces resulta un valor determinado de la velocidad correspondiente al tiempo t, esto es,

$$v=\frac{ds}{dt}. \qquad \text{(b)}$$

De este resultado se infiere que la velocidad viene representada por la derivada del espacio con relacion al tiempo.

La fórmula que hemos hallado para determinar la velocidad de un movimiento cualquiera en un tiempo dado, cabe aplicarla tambien en el caso particular del movimiento uniforme.

Por ejemplo, se sabe que $s-s_0=v\ (t-t_0)$: diferenciando respecto á t, se tiene:

$$\frac{d\,s}{d\,t}=v,$$

fórmula igual á la (b) ya hallada anteriormente; aquí la velocidad es siempre la misma para un tiempo cualquiera, porque v=K, y K es una constante.

Recíprocamente, si se nos diera la derivada del espacio respecto al tiempo, igual á una cantidad constante, podríamos afirmar que el movimiento del móvil es uniforme. En efecto, si se tiene $\frac{d\,s}{d\,t}=\mathrm{K}$, integrando entre los límites t y t_0, atendiendo á la constante, resulta:

$$s=\mathrm{K}\ (t-t_0)+s_0, \quad \text{ó sea,} \quad s-s_0=\mathrm{K}\ (t-t_0);$$

fórmula enteramente igual á la que supusimos en un principio para el movimiento uniforme.

Por un método geométrico podemos tambien deducir el valor de $v=\frac{d\,s}{d\,t}$.

Consideremos para esto sobre dos ejes coordenados la ley del movimiento, tomando sobre el eje de las x, por ejemplo, los tiempos, y sobre el eje de las y los espacios; levantando por los puntos M, N, P..... (fig. 3.ª) paralelas al eje y, hasta encontrar la curva que representa la ley de dicho movimiento, resultarán las rectas M'N', N'P', etc., que indicarán el lugar geométrico de los espacios andados por un nuevo móvil en movimiento uniforme, equivalentes á los andados por el primero en movimiento variado durante el mismo tiempo. Luego si continuamos indefinidamente la subdivision, tendrémos que al límite, estas rectas se confundirán geométricamente con los elementos de la curva, llegando los movimientos uniformes infinitamente pequeños á formar parte del movimiento variado total; de suerte que podrémos decir que el movimiento variado no será más que una série de movimientos uniformes realizados en unidades de tiempo infinitamente pequeñas, pudiéndose considerar la velocidad del movimiento variado en un momento dado, igual á la velocidad del movimiento uniforme, que forma parte de él en el mismo instante; luego, si á partir del tiempo t, tomamos un tiempo infinitamente pequeño, tal como dt, en que el móvil recorre el espacio ds, deberá recorrerlo con movimiento uniforme, segun las consideraciones anteriores; y como la velocidad del movimiento uniforme que corresponde á dt, mide la del movimiento variado en el tiempo t, bastará hallar la velocidad que corresponde á dicho movimiento uniforme para tener la del movimiento variado. La velocidad del movimiento uniforme se hallará por la siguiente proporcion $ds : dt :: v : 1$, en el supuesto de representar la velocidad v el espacio andado durante la unidad de tiempo; luego,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

velocidad pedida correspondiente al movimiento variado al tiempo t; fórmula exactamente igual á la hallada ya por el primer procedimiento.

IV.—Movimiento uniformemente variado.

Con estos preliminares podemos pasar al estudio del movimiento uniformemente variado.

Supuesto que la velocidad de un movimiento variado cualquiera se mide por la de un movimiento uniforme, fácil será aplicar este principio al caso particular que nos ocupa, con la ventaja de que esta velocidad quedará completamente determinada por la ley especial del movimiento; pues se sabe que el movimiento uniformemente variado es aquél en que la velocidad toma incrementos iguales en tiempos iguales, cualesquiera que sea este tiempo; ó bajo otros términos, es aquél en que la velocidad recibe incrementos proporcionales á los tiempos.

Supóngase el movimiento rectilíneo, tomando la trayectoria por eje; la ecuacion única de movimiento será

$$v-v_0=j\,(t-t_0),$$

siendo v y v_0 las velocidades respectivas á los tiempos t y t_0, y j una constante que se denomina aceleracion. Mas sabemos por lo que precede que el valor de v es una derivada de s respecto á t; luego para obtener la ecuacion del movimiento bajo forma finita, bastará reemplazar v por $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ é integrar; así pues

$$\frac{ds}{dt}-v_0=j\,(t-t_0), \qquad \text{de donde}$$

$$ds-v_0\,dt=j\,(t-t_0)\,dt;$$

integrando ahora entre los límites t y t_0, tomando por constante s_0 correspondiente al valor t_0, se tiene:

$$s-v_0\,(t-t_0)=\frac{1}{2}j\,(t-t_0)^2+s_0, \qquad \text{ó sea,}$$

$$s=s_0+v_0\,(t-t_0)+\frac{1}{2}j\,(t-t_0)^2.$$

En esta fórmula s y s_0 representan los espacios recorridos por el móvil á las épocas t y t_0, á partir de un orígen determinado.

Así la expresion general del movimiento uniformemente variado se puede expresar por

$$s=a+bt+ct^2. \qquad (1)$$

Ahora, si un móvil se sujeta á la ecuacion anterior, podemos afirmar que su movimiento será uniformemente variado. En efecto, si diferenciamos la ecuacion (1) resulta

$$v=\frac{ds}{dt}=b+2\,ct.$$

Si consideramos luégo una variacion de v, se tiene

$$\Delta v=2\,c\,\Delta t, \quad \text{ó sea,} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t}=2\,c,$$

y como c es constante, se deduce por fin

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\text{constante}:$$

condicion precisa del movimiento uniformemente variado.

V.—Principios acerca las velocidades.

La velocidad espresada geométricamente, viene representada por una recta; así para conocerla debidamente necesitamos atender á su direccion, sentido y magnitud. Si el movimiento es uniforme, la ley de este movimiento sabemos que es una línea recta, tal como MR (fig. 4.ª); luego para determinar la velocidad del punto M bastará trazar, por el punto dicho, una paralela á T, y tomar sobre esta recta una magnitud igual á la unidad de tiempo, tal como MN, levantando despues por N la recta NP paralela al eje S; esta última recta será la verdadera expresion de la velocidad pedida, en el concepto de representar MR la ley del movimiento uniforme.

Si el movimiento es uniformemente variado, tomarémos la fórmula hallada $s=a+bt+ct^2$, y la compararémos con la general de analítica $y=a+bx+cx^2$, considerando T el eje de las x y S el de las y; y en este concepto fácil es comprender que el lugar del movimiento no es más que una parábola en una de las tres posiciones, como viene indicado en la fig. 5.ª; luego si se desea conocer la velocidad en el punto P, por ejemplo, no hay más que trazar la tangente PR á la parábola que pasa por dicho punto, á fin de tener la prolongacion del elemento de la curva que pasa por P, en cuyo elemento se realiza el movimiento uniforme segun ya se esplicó; mas como la velocidad del movimiento uniforme mide la del movimiento variado en dicho instante, la cuestion queda reducida al caso anterior, por lo cual basta trazar por el punto P la recta PQ paralela á T, é igual á la unidad; despues la paralela á S, desde Q hasta encontrar la tangente PR; dándonos QR el valor de la velocidad pedida.

Si el movimiento fuera completamente variado, la ley del movimiento vendria espresada por una curva cualquiera, y sobre esta curva obraríamos como en el caso particular de la parábola, á fin de conocer geométricamente la velocidad del móvil en un momento dado.

Despues de estas consideraciones generales podemos pasar á desarrollar algunos principios de suma utilidad, como verémos por las consecuencias que pueden deducirse.

La proyeccion de la velocidad de un punto, sobre un eje cualquiera, está representada en magnitud y direccion por la velocidad de la proyeccion de este punto.

En efecto, sea MM′ (fig. 6.ª) el arco de trayectoria recorrido en el tiempo Δt; considerando la cuerda MM′, tendrémos que la velocidad media vendrá representada por $\left(\frac{\text{cuerda MM}'}{\Delta t}\right)$; pero el límite de esta relacion nos dará la velocidad del móvil al punto M; luego si proyectamos MM′ sobre la recta OX, resulta, por razones análogas, que el límite de $\left(\frac{\text{NN}'}{\Delta t}\right)$ dará la velocidad del punto N sobre la recta OX, ó sea, la velocidad de la proyeccion del punto M sobre la recta OX. Ahora, si MM″ representa $\left(\frac{\text{cuerda MM}'}{\Delta t}\right)$, proyectando el punto M″, se tiene N″, resultando

$$\frac{\text{MM}''}{\text{NN}''}=\frac{\text{MM}'}{\text{NN}'}$$

por ser los planos que determinan las rectas MN, M′N′, M″N″, respectivamente paralelos; luego podrémos escribir

$$\frac{\text{MM}''}{\text{NN}''}=\frac{\text{MM}'}{\text{NN}'}=\frac{\text{MM}' : \Delta t}{\text{NN}' : \Delta t},$$

y pasando á los límites,

$$\frac{\text{lím. MM}''}{\text{lím. NN}''}=\frac{\text{lím. (MM}' : \Delta t)}{\text{lím. (NN}' : \Delta t)};$$

mas siendo los numeradores iguales por hipótesis, resulta

$$\text{lím. NN}''=\text{lím. (NN}' : \Delta t)$$

y como este segundo miembro representa la velocidad de la proyeccion, segun lo dicho anteriormente, siendo NN″ la proyeccion de MM″, se infiere que la proyeccion de la velocidad de un punto sobre un eje cualquiera, está representada en valor y en direccion por la velocidad de la proyeccion del punto dado.

La proyeccion de la velocidad de un punto, sobre un plano, *es igual á la velocidad de la proyeccion de este punto sobre dicho plano.*

Supóngase que durante el tiempo Δt recorra el punto M el arco MM′ (fig. 7.ª); el cociente $\left(\frac{\text{cuerda MM}'}{\Delta t}\right)$ nos dará la velocidad media, cuyo límite determinará la velocidad en M. Si se supone ahora $\frac{\text{cuerda MM}'}{\Delta t}$=MM″, proyectando los puntos M, M′, M″, sobre el plano en una direccion cualquiera, tendrémos

$$\frac{\text{MM}''}{\text{NN}''}=\frac{\text{MM}'}{\text{NN}'}=\frac{\text{MM}' : \Delta t}{\text{NN}' : \Delta t},$$

tomando los límites resulta:

$$\frac{\text{lím. MM}''}{\text{lím. NN}''}=\frac{\text{lím. (MM}' : \Delta t)}{\text{lím. (NN}' : \Delta t)},$$

y como los numeradores son iguales por hipótesis, se tiene

$$\text{lím. NN}''=\text{lím. (NN}' : \Delta t),$$

luego la velocidad de la proyeccion viene representada por el límite NN″; pero como NN″ es la proyeccion de MM″, resulta que la proyeccion de la velocidad de un punto en el espacio, viene espresada por la velocidad de la proyeccion de dicho punto, conforme nos habíamos propuesto demostrar.

Fíjese bien la atencion acerca de estas conclusiones notables, cuyos resultados todos dependen sin duda de suponer un punto móvil, recorriendo la proyeccion de la trayectoria.

Consecuencia 1.ª—Considremos las ecuaciones del movimiento de un punto en coordenadas rectilíneas; si x, y, z, designan las coordenadas del móvil en la época t; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, serán las velocidades del movimiento proyectado sobre ox, oy, oz, siendo o el orígen de coordenadas: determinadas estas velocidades paralelamente á zoy, zox, xoy, dichas cantidades representarán en virtud del primer enunciado, las proyecciones de la velocidad en el espacio; luego la velocidad quedará completamente determinada, si llamamos α, β, γ, los ángulos que la tangente á la trayectoria forma con los ejes, siendo estos rectangulares, pues tendrémos $\frac{dx}{dt}=v\cos\alpha;\quad \frac{dy}{dt}=v\cos\beta;\quad \frac{dz}{dt}=v\cos\gamma;$

si elevamos ahora al cuadrado estos valores, sumando luégo los resultados, sin olvidar que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, resulta:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2.$$

Si las ecuaciones del movimiento fueran $x=\varphi(t)$, $y=F(t)$, $z=f(t)$, tendríamos por fin

$$v=\sqrt{\varphi'^2(t)+F'^2(t)+f'^2(t)},$$

en el concepto de representar φ', F', f', las primeras derivadas de las funciones φ, F, f.

Consecuencia 2.ª—Movimiento de un punto sobre un plano, tomando coordenadas polares.

Sea OX el eje polar (fig. 8.ª), O el polo, MM' el arco descrito por el móvil durante el tiempo dt. Supónganse $OM=r$, $XOM=\theta$; las coordenadas del móvil á la época t.

El valor de la velocidad sabemos que viene espresado por la fórmula

$$v=\frac{ds}{dt},\quad \text{ó sea,}\quad v^2=\frac{ds^2}{dt^2};$$

pero $ds^2=\overline{NM}^2+\overline{NM'}^2=r^2d\theta^2+dr^2$,

luego $$v^2=\frac{r^2d\theta^2+dr^2}{dt^2};$$

es de ver que $\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)$ y $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ son las velocidades proyectadas del móvil sobre MN y MP; así la conclusion es sumamente parecida á la del caso anterior, respecto al valor de la velocidad del espacio y la de sus proyecciones MN y MP sobre las cuales se proyecta el movimiento del punto en el plano que se considera: $\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)$ forma la velocidad de circulacion del móvil; $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ la velocidad de traslacion al largo del rádio vector; $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ la velocidad angular del rádio OM; y $\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ la velocidad *aereolar* de dicho punto móvil.

VI.—Aplicacion de los principios anteriores.

Proyeccion ortogonal de un movimiento circular y uniforme sobre un diámetro de dicho círculo.

Supóngase (fig. 9) que el móvil salga de A, siendo v la velocidad y r el rádio de la circunferencia. Para pasar el punto móvil de A á B se tendrá $AB=vt$, siendo t el tiempo que tarda el punto A en trasladarse á B: si llamamos x á OM, resulta:

$$x=r \cos \frac{vt}{r};$$

si diferenciamos este valor, se tendrá la velocidad de la proyeccion, ó sea,

$$\frac{dx}{dt}=-v \operatorname{sen} \frac{vt}{r}.$$

Si llamamos u á esta velocidad de la proyeccion, podrémos escribir

$$u=-v \operatorname{sen} \frac{vt}{r}. \qquad (1)$$

Fácil es probar que esta velocidad sobre el diámetro no es más que la proyeccion de la velocidad del punto que se mueve en la circunferencia dada. En efecto, supóngase que la tangente CB, en el punto B, nos represente la velocidad del móvil que, por ser el movimiento uniforme, debe ser siempre igual á v; hallemos la proyeccion de CB, sobre BD, paralelamente á OA; los dos triángulos CBD, y BOM, por tener sus ángulos respectivamente iguales, nos permiten escribir la igualdad siguiente:

$$-DB=CB \cos CBD=v \operatorname{sen} \frac{vt}{r}.$$

Se toma la recta DB, negativamente por considerarse su movimiento de derecha á izquierda: luego

$$DB=-v \operatorname{sen} \frac{vt}{r}.$$

Comparando esta igualdad con (1), se tiene $DB=u$, es decir, que la proyeccion de la velocidad del punto sobre la circunferencia, viene dada por la velocidad de la proyeccion, conforme nos habíamos propuesto demostrar.

CAPÍTULO II.

Movimientos compuestos de un punto.

I.—Consideraciones generales.

Si consideramos el movimiento de un punto sobre la superficie de la tierra, el movimiento que aprecian nuestros ojos no es el verdadero, sino el relativo, en virtud del movimiento de traslacion de dicha tierra. Así, pues, si se suponen tres ejes rectangulares que pasen por el centro de la tierra, éstos estarán en movimiento al mismo tiempo que el móvil; y como el punto no puede seguir á la vez los dos movimientos, se comprende que siga una direccion intermedia, que sin ser ninguna de las dos primeras, guarde, no obstante, cierta relacion con ellas. El movimiento de la tierra, se denomina de arrastre; el del punto sobre la superficie de la misma, independiente de toda otra clase de movimiento, se llama relativo; y el definitivo que sigue el punto, toma el nombre de absoluto ó resultante; designándose los dos primeros bajo el nombre de movimientos componentes.

Si los movimientos componentes son uniformes y rectilíneos, tambien será rectilíneo y uniforme el de la resultante, siguiendo además la direccion de la diagonal del paralelógramo formado por los dos movimientos componentes, considerados como lados contiguos de dicho paralelógramo.

Supongamos que el punto A (fig. 10), esté animado de las velocidades V y V', segun las direcciones AV y AV', conforme viene indicado en la figura: por la velocidad V, el punto A se traslada á B en la unidad de tiempo; pero segun la velocidad V', en el mismo tiempo, se debe trasladar á C; luego si por una parte debe encontrarse el punto A en B, y por otra á una distancia AC, el punto D espresará evidentemente la posicion final del punto A al cabo de la unidad de tiempo, en el supuesto de ser BD una recta igual y paralela á AC. Ahora, si se toma un tiempo t, resultará que el punto A, por una parte deberá trasladarse, por ejemplo, á E, y por otra á F, cuya posicion final podemos determinar por consideraciones análogas á las anteriores, trazando por E una recta EG igual y paralela á AF, resultando ser G, la posicion del punto A despues del tiempo t. Empero, por ser los movimientos uniformes, se tiene:

$$AF=AC\times t, \qquad AE=AB\times t, \qquad \text{luego,}$$

$$\frac{GE}{BD}=t, \quad \frac{AE}{AB}=t, \quad \text{ó sea,} \quad \frac{GE}{BD}=\frac{AE}{AB}.$$

Esto nos dice que la recta que pasa por AD, tambien pasa por G; luego el movimiento resultante es rectilíneo; además es uniforme, porque de la semejanza de los triángulos ABD, y AEG, que acaban de resultar, se obtiene:

$$\frac{AG}{AD}=t, \quad \text{ó sea,} \quad AG=AD\times t;$$

luego el movimiento resultante es uniforme, siendo AD la velocidad, ó el espacio andado en la unidad de tiempo.

II.—Composicion de velocidades.

Consideremos la cuestion en general: tómense por ejes coordenados (fig. 11) ox, oz, oy, los cuales, á pesar de ser movibles, los supondrémos en reposo, sustituyendo su movimiento por el de la curva sobre la cual se realiza el movimiento relativo, y así tendrémos el mismo resultado para el movimiento final. Si se considera que el intérvalo de tiempo que se necesita para pasar el punto M á N' es infinitamente pequeño, podrémos conceder que la figura MNM'N' sea un paralelógramo, resultando aplicables todas las consideraciones anteriores. Mas los cambios de lugar MN, MN', MM', se realizan en una diferencial de tiempo correspondiente á la fórmula general, $ds=vdt$; luego si conocemos ds, dividiendo este valor, ó sea, MN, MN', MM', por dt, tendrémos respectivamente las velocidades de arrastre, relativa y absoluta; de suerte que si sobre las velocidades componentes, representadas en la figura por MS y MR, construimos un paralelógramo, la diagonal MT, representará en magnitud y direccion la velocidad absoluta ó resultante del móvil. Esta construccion toma el nombre de paralelógramo de las velocidades.

La velocidad de arrastre se puede transformar en velocidad relativa, y recíprocamente; por esto basta designar á estas dos velocidades bajo el nombre genérico de componentes.

Si hay más de dos velocidades, obrando sobre un mismo punto, se hallará la resultante parcial entre las dos primeras componentes, segun los principios que hemos desarrollado; luégo una nueva resultante entre la ya hallada y la tercera componente: así siguiendo hasta obtener la resultante final; de modo que trazando por la estremidad de la primera componente una paralela á la segunda de igual magnitud y sentido, y á la extremidad de esta recta otra paralela á la tercera bajo las mismas condiciones del caso anterior, etc., fácilmente se comprende que la recta que unirá el último punto hallado con el primero dará la resultante final: y como estas rectas cerrarán un espacio, formarán lo que se denomina bajo el nombre de polígono de las velocidades.

Si se tienen tres velocidades que no estén en un mismo plano, se procederá de un modo análogo al caso anterior para determinar la velocidad final; sólo que en este caso la resultante vendrá espresada por la diagonal del paralelepípedo, cuyas aristas concurrentes sean las tres velocidades componentes. Si hubiera más de tres, se procederá de la misma manera, hasta obtener la velocidad definitiva. Debemos advertir que, en este caso, podríamos valernos á la par, como en el caso anterior, del polígono de velocidades para obtener la resultante final, con la única diferencia de que el polígono plano resultaría, ahora, alabeado.

Estudiado bien este polígono de velocidades, se tienen conocidos todos los casos particulares que pueden resultar: así, si el polígono es plano y compuesto de tres lados, resulta el polígono más sencillo, correspondiente al caso del paralelógramo; si los ángulos que forman los lados consecutivos de este polígono, se reducen á cero, resultan varias velocidades, que obran en la misma direccion, en cuyo caso la suma algebráica de todas ellas, afectadas del signo correspondiente segun el sentido, dá el valor de la resultante final.

Algunas veces conviene descomponer una velocidad en otras; y si no se dá la direccion ni magnitud de las componentes, es fácil determinarlas en general, por medio del polígono de las velocidades.

Así, siendo AB (fig. 12) la velocidad final, si hay que descomponerla en otras tres velocidades, bastará cerrar un espacio por medio de las rectas AC, CD y DB, que vayan á parar á los estremos de la velocidad primera AB, siendo suficiente luégo el trazar por el punto A dos rectas iguales y paralelas á CD y DB, para que junto con AC nos den las tres componentes de AB. En el caso de no estar AC, CD y DB en un mismo plano, siguiendo un procedimiento análogo al anterior, determinaríamos las tres aristas consecutivas de un paralelepípedo, cuya diagonal fuera AB.

Como se comprende, trazando rectas cualesquiera que vayan á terminar en los estremos de la recta AB, podrémos descomponer la primera velocidad en otras varias. Si las direcciones de las componentes son conocidas, será posible el problema con tal que no se dé la direccion ni magnitud de la última componente, pues trazando paralelas á las componentes, el último lado que debe cerrar el polígono queda determinado por los lados anteriores de dicho polígono.

En virtud de los principios precedentes, pueden deducirse algunas fórmulas de mucha utilidad, mediante la aplicacion de la Trigonometría. Así considerando la resultante de dos velocidades, podrémos escribir las relaciones siguientes, segun se desprende de la simple inspeccion de la fig. 13.

$$\frac{V}{\text{sen } \alpha}=\frac{V'}{\text{sen } \beta}=\frac{R}{\text{sen } (\alpha+\beta)},$$

$$V=R\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha+\beta)},\quad V'=R\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } (\alpha+\beta)},\quad R^2=V^2+V'^2+2VV' \cos (\alpha+\beta).$$

Fórmulas que nos permiten determinar analíticamente las velocidades componentes cuando se conozca la resultante y los ángulos que ésta forma con las componentes; ó tambien la resultante, conociendo las componentes y el ángulo que ellas forman. Se comprende que si el ángulo de las componentes fuese recto, las fórmulas anteriores se simplificarian, reduciéndose á las siguientes:

$$V = R \cos \beta, \qquad V' = R \cos \alpha = R \operatorname{sen} \beta, \qquad R^2 = V^2 + V'^2.$$

Consideremos, ahora, la cuestion en general: sabemos que un sistema de velocidades concurrentes forma un polígono de velocidades; que la proyeccion de la velocidad es igual á la velocidad de la proyeccion; que la suma de las proyecciones de las rectas AC, CD, DE, EB (sin figura), sobre el eje de las x, debe ser igual á la proyeccion de la recta AB, sobre el mismo eje; luego si estas rectas representan las velocidades respectivas R, V, V', V'', V''', y designamos por α, a, a', a'', a''' los ángulos que estas velocidades forman con el eje x, resulta definitivamente:

$$R \cos \alpha = V \cos a + V' \cos a' + V'' \cos a'' + V''' \cos a''' = X,$$

y procediendo de un modo análogo respecto al eje y, se obtiene

$$R \cos \beta = V \cos b + V' \cos b' + V'' \cos b'' + V''' \cos b''' = Y,$$

de donde $\quad X^2 + Y^2 = R^2, \qquad \cos \alpha = \frac{X}{R}, \qquad \cos \beta = \frac{Y}{R}.$

Fórmulas analíticas, suficientes para resolver todas las cuestiones que puedan presentarse respecto al mismo punto.

En el caso de ser muchas las componentes, podrán espresarse las fórmulas anteriores por las siguientes:

$$R \cos \alpha = \Sigma V \cos a, \qquad R \cos \beta = \Sigma V \cos b, \qquad \text{luego}$$

$$R = \sqrt{(\Sigma V \cos a)^2 + (\Sigma V \cos b)^2}, \qquad \cos \alpha = \frac{\Sigma V \cos a}{\sqrt{(\Sigma V \cos a)^2 + (\Sigma V \cos b)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{\Sigma V \cos b}{\sqrt{(\Sigma V \cos a)^2 + (\Sigma V \cos b)^2}}.$$

Supongamos ahora tres velocidades que no estén en un mismo plano: segun lo esplicado sabemos que se forma un paralelepípedo, cuya diagonal es la resultante R; pues si designamos por λ, μ, ν, los tres ángulos YOZ, ZOX, XOY, que forman las velocidades dadas entre sí, dos á dos, resulta segun analítica

$$R^2=V^2+V'^2+V''^2+2V'V'' \cos\lambda+2VV'' \cos\mu+2VV' \cos\nu.$$

Llamando ahora α, β, γ, los ángulos que la resultante forma con los ejes coordenados, ó sea, con las velocidades componentes, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} R\cos\alpha&=V+V'\cos\nu+V''\cos\mu \\ R\cos\beta&=V\cos\nu+V'+V''\cos\lambda \\ R\cos\gamma&=V\cos\mu+V'\cos\lambda+V'' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

De estas tres ecuaciones se puede deducir el valor de V, V', V'' en funcion de la resultante, de los ángulos que ésta forma con las componentes, y de los formados por dichas componentes entre sí.

Comparando (1) con el sistema general siguiente

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=K \\ a'x+b'y+c'z&=K' \\ a''x+b''y+c''z&=K'' \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} x&=\frac{Kb'c''-Kc'b''+cK'b''-bK'c''+bc'K''-cb'K''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}, \\ y&=\frac{aK'c''-ac'K''+ca'K''-Ka'c''+Kc'a''-cK'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}, \\ z&=\frac{ab'K''-aK'b''+Ka'b''-ba'K''+bK'a''-Kb'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}, \end{aligned}\right.$$

se obtiene:

$$(1)\ V=\frac{\cos\alpha(1-\cos^2\lambda)+\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+\cos\gamma(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}R.$$

$$(2)\ V'=\frac{\cos\beta(1-\cos^2\mu)+\cos\gamma(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+\cos\alpha(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}R.$$

$$(3)\ V''=\frac{\cos\gamma(1-\cos^2\nu)+\cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+\cos\beta(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}R.$$

Hay que notar que los dos últimos valores podian deducirse del primero por circulacion.

Además, el denominador comun no es más que el valor de la determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix}$$

cuya determinante ó denominador permite ser representado por lo que sigue:

$$4\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu-\nu}{2},$$

conforme vamos á demostrar para mayor claridad:

$$1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=\mathrm{sen}^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu$$
$$+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=\mathrm{sen}^2\lambda\,\mathrm{sen}^2\mu-\cos^2\lambda\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu$$
$$=(\mathrm{sen}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,\mu-\cos\lambda\cos\mu+\cos\nu)\,(\mathrm{sen}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,\mu+\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)$$
$$=[\cos\nu-\cos(\lambda+\mu)]\,[\cos(\lambda-\mu)-\cos\nu]$$
$$=4\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu-\nu}{2},$$

luego las fórmulas (1) (2) (3) se transforman en

$$V=\frac{\cos\alpha(1-\cos^2\lambda)+\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+\cos\gamma(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)}{4\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}}R.$$

$$V'=\frac{\cos\beta(1-\cos^2\mu)+\cos\gamma(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+\cos\alpha(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)}{4\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}}R.$$

$$V''=\frac{\cos\gamma(1-\cos^2\nu)+\cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+\cos\beta(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)}{4\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}}R.$$

Para evitar la complicacion de estos resultados, se prefieren los ejes rectangulares, y en este caso se obtienen por consideraciones analíticas las siguientes fórmulas, fáciles de obtener á la vista de la fig. 14:

$$\left.\begin{array}{l} V=R\cos RAV \\ V'=R\cos RAV' \\ V''=R\cos RAV'' \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \cos^2 RAV+\cos^2 RAV'+\cos^2 RAV''=1. \\ R^2=V^2+V'^2+V''^2. \end{array}$$

Si suponemos, por fin, varias componentes en general, resultan las fórmulas analíticas siguientes:

$$R\cos\alpha=V\cos a+V'\cos a'+V''\cos a''+\cdots\cdots=\Sigma V\cos a$$
$$R\cos\beta=V\cos b+V'\cos b'+V''\cos b''+\cdots\cdots=\Sigma V\cos b$$
$$R\cos\gamma=V\cos c+V'\cos c'+V''\cos c''+\cdots\cdots=\Sigma V\cos c$$

$$R=\sqrt{(\Sigma V\cos a)^2+(\Sigma V\cos b)^2+(\Sigma V\cos c)^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{\Sigma V\cos a}{R},\qquad \cos\beta=\frac{\Sigma V\cos b}{R},\qquad \cos\gamma=\frac{\Sigma V\cos c}{R}.$$

CAPÍTULO III.

Estudio del movimiento de un cuerpo sólido.

I.—Consideraciones generales.

En la ciencia del movimiento, se suponen cuerpos hipotéticos, que distan mucho de poderse comparar con los cuerpos naturales, pues se consideran aquellos constantemente invariables en sus formas, y por esto se llaman cuerpos rígidos.

Estas consideraciones son de gran trascendencia para el estudio analítico de la Mecánica, y conducen luégo á conclusiones aplicables á los cuerpos naturales.

Segun estos principios, un cuerpo, ó un sólido en Mecánica racional, estará completamente determinado:

1.º Cuando se conozcan constantemente las distancias mútuas entre tres puntos que no estén en línea recta. 2.º Cuando se conozcan las distancias respectivas de estos tres puntos á cada uno de los del sólido. Ahora, si estos tres puntos primeros forman parte del sistema, bastará estudiar las diferentes posiciones del triángulo que ellos determinan para conocer la del sólido en el espacio, dada cierta union, ó lo que se llama *ligaçon*.

Movimiento elemental.—La trayectoria de un punto, puede considerarse como un polígono infinitesimal cuyos lados va recorriendo sucesivamente dicho punto; cuando uno de estos puntos se encuentra en uno de los vértices del polígono, se supone que todos los demás están en el mismo caso. Así, pues, el movimiento del sólido se realiza de tal manera que si durante el primer elemento de tiempo todos los puntos que lo componen recorren el primer lado de su trayectoria poligonal, durante el segundo elemento de tiempo estos mismos puntos recorrerán los segundos lados, así continuando: los movimientos realizados en cada uno de esos elementos de tiempo, constituyen un movimiento elemental del sólido.

Movimiento de traslacion.—Un cuerpo sólido está animado de un movimiento de traslacion, cuando se puede llevar de una de sus posiciones á otra, haciendo describir á sus diversos puntos, rectas iguales y paralelas; de aquí se infiere que todos los puntos del sólido tienen igual velocidad en un tiempo dado; pues si consideramos dos posiciones consecutivas realizadas en el tiempo dt, recorrerá cada uno de los puntos del sólido una diferencial de su trayectoria, ó sea, un lado infinitamente pequeño de aquel polígono que habíamos supuesto ántes; y como quiera que estas diferenciales son iguales, resulta, siendo el tiempo el mismo, una velocidad comun para todos sus puntos: esta velocidad comun es la que se llama *velocidad de traslacion.*

De los principios sentados anteriormente podemos tambien deducir que, para que un sólido esté animado de un movimiento de traslacion, basta evidentemente que tres de sus puntos, tomados voluntariamente, gocen de movimientos idénticos.

Movimiento de rotacion.—Dícese que un sólido está animado de un movimiento de rotacion alrededor de un eje, cuando todos los puntos de este eje, estando invariablemente ligados al sólido, permanecen inmóviles durante el movimiento.

Si un sólido está animado de un movimiento uniforme de rotacion alrededor de un eje, todos sus puntos describen arcos de círculo, cuyos centros están situados en el eje. Los puntos del sólido giran de una misma cantidad angular durante el mismo tiempo; sin embargo, los puntos que se hallan á diferentes distancias del eje, á pesar de girar de la misma cantidad angular, y moverse uniformemente, tienen diferente velocidad, puesto que la velocidad de cada punto es funcion de la velocidad angular y de la distancia al eje: de modo que si llamamos r la distancia de un punto al eje, y θ la cantidad angular correspondiente, la velocidad de dicho punto vendrá espresada por la fórmula $v = \theta\, r$.

Si el movimiento de rotacion no es uniforme, cabe hacer todas las consideraciones que hemos hecho ya al tratar del movimiento en general: sólo que aquí debe suponerse el movimiento sobre una línea curva; de manera que recordando lo anterior, sabrémos deducir por analogía la velocidad angular al tiempo t; pues si $d\theta$ es el espacio andado durante el tiempo dt á la unidad de distancia del eje, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ nos dará la velocidad angular en dicho instante; mas si designamos ahora este cociente por ω, la velocidad de un punto cualquiera M, que diste del eje la cantidad r, vendrá representada en el mismo instante por la fórmula

$$v=\omega r,$$

siendo ω la velocidad angular correspondiente al instante que se considere.

II.—Composicion de movimientos elementales de los sólidos.

Cuando un cuerpo recibe sucesivamente muchos movimientos, se llama movimiento resultante el que tiene por objeto llevar de un solo golpe el cuerpo desde su posicion inicial á su posicion definitiva. Los movimientos simultáneos que producen el mismo efecto que el movimiento resultante, se denominan componentes.

El valor del movimiento resultante es un problema indeterminado; empero se hace determinado, si se sujeta el movimiento á ciertas condiciones, por ejemplo, cuando los movimientos componentes se ejecutan en tiempos infinitamente pequeños, en el concepto de despreciar los infinitamente pequeños superiores al primer órden, y de reemplazar los arcos de trayectoria por sus cuerdas.

Vamos á probar cómo los movimientos de rotacion y traslacion pueden componerse de modo que produzcan movimientos resultantes de la misma naturaleza. Representarémos, como ya se ha esplicado para el punto, el movimiento de traslacion de un cuerpo, por una recta igual, paralela, y del mismo sentido que las cuerdas de los caminos descritos por cada uno de los puntos de dicho cuerpo.

A la vez representarémos con *Lagrange* un movimiento de rotacion por medio de una recta proporcional al cambio angular, llevada sobre el eje, alrededor del cual se efectúa la rotacion, y en un sentido tal, que un observador, teniendo su cabeza á la extremidad de la recta y sus piés en el orígen, vea ejecutarse el movimiento en sentido directo, esto es, en sentido de las agujas de un reloj.

PRINCIPIO 1.º — *Un número cualquiera de movimientos de traslacion tiene por movimiento final una traslacion representada por la resultante de las rectas que espresan los movimientos componentes.*

Suponiendo las cuerdas de los caminos descritos por un punto del sistema, y luégo las cuerdas análogas correspondientes á un segundo punto del sistema, fácil será comprender que las rectas que unirán los puntos de partida con los de término, deberán ser iguales y paralelas, reduciéndose en su virtud el movimiento resultante á una traslacion, conforme nos habíamos propuesto demostrar, en el supuesto de representar las rectas anteriores los movimientos respectivos de traslacion.

PRINCIPIO 2.º—*El movimiento resultante de dos rotaciones infinitamente pequeñas, cuyos ejes se encuentran, puede reducirse á una rotacion representada por la diagonal del paralelógramo construido sobre las rotaciones componentes.*

En efecto, sean (fig. 15) MA$=p$ y MB$=q$ las rotaciones componentes; consideremos un punto O situado en el plano AMB; de dicho punto O, tracemos las perpendiculares OP y OQ á MA y MB; en virtud de la rotacion p, el punto O describirá un arco de círculo detrás del plano de dicha figura, cuyo grandor vendrá espresado por $p\times$OP; en cuanto á la rotacion q, el punto O describirá un arco de círculo dirigido en sentido inverso del precedente, siendo su grandor $q\times$OQ.

Si se suponen las dos rotaciones p y q infinitamente pequeñas, los dos arcos de círculo que consideramos, podrán reducirse á pequeñas rectas normales al plano AMB; y el punto O permanecerá invariable, si se verifica la siguiente igualdad

$$p\times \mathrm{OP}=q\times \mathrm{OQ}. \qquad (1)$$

Así todos los puntos como el O que cumplan con la condicion anterior, no cambiarán de lugar en el movimiento resultante, el cual se puede suponer realizado alrededor de MO, sirviendo esta recta de eje; mas esta recta tiene por direccion la diagonal del paralelógramo, cuyos lados contiguos son las rotaciones componentes p y q; consecuencia fácil de deducir, atendiendo á la igualdad (1) y á simples principios de la Geometría elemental.

Ahora, para calcular el valor del ángulo de rotacion resultante, tomarémos un punto K sobre MB. El ángulo de rotacion que buscamos multiplicado por la recta KI, distancia del punto K á la recta MO, nos dará el espacio andado por el punto K. Mas si designamos por KL la distancia del punto K á MA, el movimiento resultante del punto K es tambien, segun los dos ejes primitivos, un movimiento de rotacion efectuado alrededor de MA, é igual á $p \times \mathrm{KL}$, supuesto que en la rotacion efectuada alrededor de MB, el punto K resta inmóvil; luego el ángulo de rotacion pedido será $\left(\frac{p \times \mathrm{KL}}{\mathrm{KI}}\right)$, es decir, $\left(\frac{p \text{ sen AMB}}{\text{sen OMB}}\right)$.

Este ángulo de rotacion resultante, no es más que el valor de la diagonal del paralelógramo construido sobre p y q, quedando así probada la proposicion.

Principio 3.º—*El movimiento resultante de dos rotaciones infinitamente pequeñas y cuyos ejes son paralelos, puede reducirse á una rotacion igual á la suma algebráica de las rotaciones componentes: las distancias de la resultante á las componentes están en razon inversa de dichas componentes.*

Supongamos (fig. 16) los ejes PA y QB, que segun Lagrange, nos miden las dos cantidades angulares de rotacion p y q; tomemos sobre la línea PQ un punto M tal, en que se verifique la ecuacion $p \times \mathrm{PM} = q \times \mathrm{QM}$. (a)

Segun la rotacion QB, durante el tiempo dt, el punto M sigue el camino $q\,dt \times \mathrm{MQ}$, que es opuesto é igual al $p\,dt \times \mathrm{MP}$, debido á la rotacion alrededor del eje PA; así pues el punto M permanece inmóvil, y por consiguiente el movimiento resultante es una rotacion alrededor de un eje que pasa por M, y que es paralelo á los ejes de rotaciones componentes. De la igualdad (a) se desprende con facilidad que la distancia PQ queda dividida por el punto M, en partes recíprocamente proporcionales á las rotaciones p y q.

Probemos, ahora, cómo el eje resultante es igual á la suma de los ejes componentes. Para esto notaremos que el movimiento total del punto Q es debido tan sólo á la rotacion realizada alrededor del otro eje P, valiendo $p\,dt\times PQ$; si consideramos luégo este movimiento debido á la rotacion resultante alrededor del eje M, llamando α el arco descrito por el punto Q, deberá resultar

$$\alpha = p\,dt\times PQ;$$

dividiendo ambos miembros por MQ, resulta:

$$\frac{\alpha}{MQ} = \frac{p\,dt\times PQ}{MQ} = \alpha', \qquad (2)$$

representando α' la cantidad angular del movimiento resultante. Mas segun la igualdad (a), se tiene:

$$\frac{p}{q} = \frac{QM}{PM}, \quad \text{ó sea,} \quad \frac{p+q}{p} = \frac{QM+PM}{QM}; \qquad \text{de donde}$$

$QM = \dfrac{p\times PQ}{p+q}$; sustituyendo este valor en (2), dedúcese por fin

$$\alpha' = \frac{p\,dt\times PQ}{\dfrac{p\times PQ}{p+q}} = (p+q)\,dt,$$

de donde se infiere que la velocidad angular en el movimiento resultante es $p+q$, es decir, la suma de las velocidades angulares de los movimientos componentes.

Tomemos otra vez las dos rotaciones paralelas anteriores, pero en sentido contrario. Por lo dicho anteriormente podrémos descomponer la rotacion p (fig. 17) en dos, tales como q y $p-q$; la primera aplicada en Q y la otra en M, cuyo punto puede determinarse por dividir el eje resultante la distancia de los ejes componentes en partes inversamente proporcionales á las velocidades de dichas componentes. Mas como las dos rotaciones QB y QB′ se destruyen por obrar en sentidos contrarios y ser iguales, resulta sólo la componente MC: lo que nos prueba que el sólido girará alrededor de un eje paralelo á los dados, pasando por M, con una velocidad angular $p-q$, y en sentido de la mayor rotacion componente.

Si las velocidades de las dos rotaciones componentes son iguales, tendrémos el punto de aplicacion del eje resultante al infinito; en efecto, segun el caso anterior, se puede escribir $p-q : q :: \mathrm{QP} : \mathrm{MP}$, luego $\mathrm{MP}=\frac{q\times \mathrm{PQ}}{p-q}$; y como $p=q$ resulta $\mathrm{MP}=\infty$: este valor nos manifiesta que hay algun absurdo en la cuestion; y en efecto, la rotacion que se pide, se transforma en una traslacion dirigida perpendicularmente al plano de los ejes de las rotaciones componentes.

Vamos á demostrarlo: sean (fig. 18) q y q las dos rotaciones componentes; si tomamos un punto cualquiera, tal como M, situado entre los dos ejes, y en el plano de ellos, dicho punto se elevará de este plano perpendicularmente la cantidad $q\,dt\times \mathrm{OM}$, en virtud de la rotacion alrededor del eje O; pero en virtud de la rotacion alrededor de O′ se eleva tambien $q\,dt\times \mathrm{O'M}$; luego el cámbio de lugar total es, pues,

$$q\,dt\times(\mathrm{OM}+\mathrm{O'M})=q\,dt\times \mathrm{OO'}$$

Si tomáramos ahora otro punto M′ y procediéramos de una manera análoga al caso anterior, resultaria tambien por cámbio total $q\,dt\times \mathrm{OO'}$, igual al valor anterior. Si en vez de tomar el punto entre OO′ lo tomáramos en su prolongacion, ó sea, en $\mathrm{M_1}$, tendríamos que el movimiento del punto $\mathrm{M_1}$ segun el eje O vendria espresado por $q\,dt\times \mathrm{OM_1}$, y segun el O′ por $q\,dt\times \mathrm{O'M_1}$; y como estos movimientos de rotacion obran en sentido contrario, bastaria restarlos para tener el cámbio total, ó sea,

$$q\,dt\times \mathrm{M_1O}-q\,dt\times \mathrm{O'M_1}=q\,dt\,(\mathrm{M_1O}-\mathrm{M_1O'})=q\,dt\times \mathrm{OO'},$$

valor tambien igual á los anteriores: luego si todos los puntos adquieren la misma velocidad, el movimiento resultante es de traslacion, dirigido perpendicularmente al plano de los ejes de las rotaciones componentes.

Principio 4.º—*Traslacion y rotacion en combinacion.*

Consideremos un sólido sujeto á una traslacion y rotacion, con la condicion de ser la traslacion perpendicular al eje de rotacion, proyectándose en su virtud dicha traslacion en el punto a, conforme va indicado en la figura 19. Designemos por q

la velocidad angular de la rotacion, y por v la velocidad de la traslacion; $q\,dt$ será el ángulo que gire alrededor del eje, y $v\,dt$ el espacio recorrido por el movimiento de traslacion durante el tiempo dt; luego si tomamos un punto M, el espacio recorrido en el mismo tiempo dt, en virtud del movimiento de rotacion vendrá espresado por $q\,dt \times b\mathrm{M}$, y el de traslacion será $v\,dt$; si suponemos la posicion del punto M, de modo que satisfaga á la igualdad

$$v\,dt = q\,dt \times b\mathrm{M}, \quad \text{ó sea,} \quad v = q \times b\mathrm{M}$$

el punto M permanecerá inmóvil por estar sujeto á dos movimientos iguales y contrarios á un mismo tiempo.

Luego podrémos suponer que todo el sistema está sujeto á una sola rotacion, pasando el eje por M, y en sentido de la rotacion componente. Para determinar la velocidad angular resultante, consideremos el punto b, que sólo se halla sujeto al movimiento de traslacion $v\,dt$, y que debe ser igual al movimiento de rotacion resultante $\alpha \times \mathrm{M}b$, llamando α la velocidad angular que se busca: así se deduce

$$\alpha \times \mathrm{M}b = v\,dt, \quad \text{ó sea,} \quad \alpha = \frac{v\,dt}{\mathrm{M}b};$$

pero ántes hemos hallado $v = q \times \mathrm{M}b$; sustituyendo el valor de $\mathrm{M}b$ en la fórmula anterior, se tiene

$$\alpha = \frac{v\,dt}{v : q} = q\,dt.$$

Deduccion notable, la cual nos dice ser la velocidad angular del movimiento de rotacion resultante, igual á la del movimiento de rotacion componente.

III.—Composicion general de movimientos.

Para componer un número cualquiera de rotaciones concurrentes, se compondrá la primera rotacion con la segunda; luégo la tercera con la resultante de las dos anteriores, así siguiendo; y como la resultante de dos rotaciones concurrentes viene espresada por la diagonal del paralelógramo construido sobre estas dos rotaciones, se podrá enunciar el principio siguiente: La resultante de un número cualquiera de rotaciones concurrentes, es una rotacion tambien que viene espresada por la resultante de las rectas que representan las rotaciones componentes. De este principio dedúcese una construccion sumamente parecida á la del polígono de las velocidades para determinar la rotacion final; sólo que en este caso lleva el nombre de polígono de las rotaciones.

Si un sólido está animado de varias rotaciones en el mismo sentido alrededor de ejes paralelos, obtendrémos el resultado, componiendo las dos primeras, conforme hemos demostrado; luégo la primera resultante obtenida con la tercera componente; despues la segunda resultante con la cuarta componente, continuando de este modo. Si el sólido está animado á la vez de un número cualquiera de rotaciones alrededor de ejes paralelos y dirigidos en sentido contrario, no hay más que hallar las resultantes de las rotaciones que obran en cada uno de los dos sentidos, para reducir todo el sistema á dos rotaciones de ejes paralelos y de sentido contrario, quedando el caso reducido á uno de los que ya llevamos estudiado.

Debemos advertir que todos los principios que preceden, suponen que los movimientos son infinitamente pequeños; si se quisieran componer movimientos finitos, los infinitamente pequeños de segundo órden aparecerian en los resultados y los modificarian de una manera notable, lo que es fácil de apreciar, tratando la cuestion de rotaciones por el análisis.

Terminarémos este estudio, manifestando cómo un número cualquiera de traslaciones y rotaciones se puede reducir á una sola rotacion y traslacion de la manera siguiente:

Escojamos un punto O (fig. 20), arbitrariamente en el sistema; sea AB una de las rotaciones componentes; si por el punto O hacemos pasar dos rotaciones OC, y OD iguales, paralelas á AB, y de sentido contrario, dichas rotaciones no cambiarán en nada la posicion del sistema, puesto que la una, le hace girar en un sentido, y la otra, en sentido inverso de un ángulo igual; empero las rotaciones OD, y AB, forman un par, y por lo tanto se reducen á una traslacion. Así en resúmen, cada rotacion podrá sin cesar ser trasportada al punto O, combinada con una traslacion; de modo que todas las rotaciones aplicadas en O, se compondrán en una sola, y lo mismo decimos respecto de las traslaciones, luego:

Un número cualquiera de rotaciones y de traslaciones infinitamente pequeñas, pueden reducirse á una rotacion única, pasando por un punto dado O, combinada con un movimiento de traslacion.

Por fin, de todas las composiciones por medio de las cuales se puede reducir un sistema de rotaciones y traslaciones á una rotacion y traslacion única, hay una que es sobre todo notable, y es aquella en que la rotacion es paralela á la traslacion. Para probar que esta composicion es posible, supongamos que se han reducido todos los movimientos á una rotacion OR, y á una traslacion MA (fig. 21). Se podrá considerar MA, como la resultante de dos traslaciones, la una MB, paralela á OR, y la otra MC, perpendicular á OR. Empero la traslacion MC, puede ser reemplazada por un par de rotaciones, cuyos ejes sean paralelos á OR; este par de rotaciones se compondrá con OR, para dar una rotacion única del mismo grandor y de la misma direccion que OR, sin pasar por el punto O, luego:

Un número cualquiera de rotaciones y traslaciones infinitamente pequeñas, puede reducirse á una sola rotacion y traslacion paralelas entre sí.

El eje de rotacion al cual se viene á parar, segun lo dicho, se llama eje espontáneo de rotacion.

IV.—Sobre el movimiento más general que puede tomar un cuerpo sólido.

Ántes de pasar al estudio del movimiento de un sólido con toda su generalidad, conviene conocer el caso particular en que el cuerpo presente un punto fijo.

Consideremos un sólido en movimiento, y supongamos que uno de sus puntos S (fig. 22), esté sujeto á permanecer en reposo. Del punto fijo S, como centro, describamos una esfera, y tómese sobre esta esfera una línea curva AB cualquiera, invariablemente ligada al sólido en movimiento; sea A'B' la posicion ocupada por la curva AB, cuando el sólido haya tomado un cambio cualquiera; sobre las mitades de los arcos AA' y BB', tracemos otros arcos de grandes círculos normales; sea O su punto de encuentro; los triángulos esféricos AOB y A'OB', son iguales, porque tienen sus tres lados iguales entre sí, y colocados en el mismo órden, lo que es fácil de ver por ser AOA' y BOB', triángulos isósceles; luego si se hace girar el triángulo AOB alrededor del rádio SO, de un ángulo medido por AOA', dicho triángulo vendrá á coincidir con A'OB'; pero entónces todo el sólido, segun el movimiento de la curva AOB, pasa de su posicion inicial á su posicion final. Así:

El cambio de un sólido que presenta un punto fijo, puede siempre reducirse á una rotacion efectuada alrededor de un cierto eje.

Supongamos ahora que AB y A'B', sean dos posiciones infinitamente próximas de una misma curva invariablemente ligada al sólido correspondiente á las épocas t, y $t+\Delta t$: á medida que el tiempo disminuye, el eje SO tiende hácia una posicion límite, que se llama, segun Poinsot, el eje instantáneo de rotacion á la época t; mas siendo OS la interseccion de los planos normales á la mitad de las cuerdas AA' y BB', se puede sentar por principio que:

El eje instantáneo de rotacion es la interseccion de los planos normales á las trayectorias de los diversos puntos del sólido en movimiento.

Ántes de pasar adelante conviene aún hacer algunas observaciones acerca las velocidades y ejes instantáneos de los sólidos.

La velocidad del punto A (fig. 22), es el límite de $\left(\frac{AA'}{\Delta t}\right)$; la del punto B, es el límite $\left(\frac{BB'}{\Delta t}\right)$; luego designando por r y r', las distancias de A y B al eje OS, se tiene $\frac{AA'}{r}=\frac{BB'}{r'}$,

ó tambien $\frac{1}{r}\times\frac{AA'}{\Delta t}=\frac{1}{r'}\times\frac{BB'}{\Delta t}$; pasando á los límites resulta:

$$\frac{1}{r}\times\frac{AA'}{dt}=\frac{1}{r'}\times\frac{BB'}{dt},$$

y como $\frac{AA'}{dt}=v$, y $\frac{BB'}{dt}=v'$, se infiere $\frac{v}{v'}=\frac{r}{r'}$;

luego las velocidades de los diversos puntos del cuerpo son entre sí, como sus distancias al eje instantáneo. Los puntos del eje instantáneo tienen velocidades nulas.

La relacion constante $\frac{v}{r}=\frac{v'}{r'}=\cdots\cdots$ determina la velocidad instantánea.

Cuando un sólido en movimiento presenta un punto fijo, existe en el interior del sólido, para cada instante, una recta en que todos los puntos tienen una velocidad nula, y esta recta es la interseccion de los planos normales á las trayectorias de los diversos puntos del sistema, formando, conforme hemos esplicado ya, el eje instantáneo de rotacion.

Consideremos, pues, el eje instantáneo que corresponde á la época t: á la época $t+dt$, esta recta habrá cesado en general de ser eje instantáneo; y una nueva recta del cuerpo y una nueva recta del espacio serán las que, confundiéndose á la época $t+dt$, constituirán el nuevo eje instantáneo; de manera que una infinidad de rectas del espacio que salen del punto S (fig. 23), irán siendo sucesivamente ejes instantáneos: así, pues, si ON es el lugar de las trazas de estas últimas rectas sobre una esfera descrita desde el punto S, como centro, una infinidad de rectas del cuerpo que salen del punto S, se transformarán sucesivamente en ejes instantáneos y coincidirán con las rectas precedentes á épocas diferentes. En efecto, si OM es el lugar de las trazas de las diferentes rectas situadas en el sólido que se van transformando sucesivamente en ejes instantáneos, tendrémos que siendo OS el eje instantáneo á la época t, y SN la recta del espacio que viene á ser eje instantáneo á la época $t+dt$, lo mismo que SM respecto del sólido, no cabe duda que al tiempo $t+dt$, la recta SM coincidirá con SN, formando un nuevo eje instantáneo.

El espacio MN, descrito por el punto M, durante el tiempo dt, será $\omega\rho dt$, designando ω la velocidad de rotacion y ρ la distancia del punto M, al eje instantáneo. Este espacio es, pues, de segundo órden, y, por consiguiente, OM y ON son dos curvas tangentes; luego el cono, lugar de los ejes del sólido, es tangente al cono, lugar de los ejes instantáneos del espacio; además como MN resulta un infinitamente pequeño de segundo órden, se tiene OM=ON, y, por consiguiente, los dos conos en cuestion ruedan uno sobre el otro sin resbalar.

Terminarémos este estudio manifestando que el movimiento infinitamente pequeño más general que puede tomar un sólido, se reduce á una rotacion y á una traslacion.

Este teorema es debido al geómetra Mozzi, y se puede demostrar como sigue: Tomemos un punto O del sólido ántes de su cambio, y trasportemos este punto á su posicion final, animando al cuerpo de un movimiento de traslacion. Para hacer tomar al sólido su posicion definitiva falta otro movimiento, considerando el punto O fijo; mas despues de lo que se ha visto, el movimiento más general de un sólido que presenta un punto fijo, es una rotacion efectuada alrededor de un eje que pasa por dicho punto; luego el movimiento más general de un sólido, se reduce á una traslacion seguida de una rotacion.

Hay muchas maneras de reducir el movimiento á una rotacion y traslacion; y despues de lo que se ha visto, el punto O, puede ser escogido de tal manera que el eje de rotacion sea paralelo á la traslacion; mas entónces el cuerpo gira alrededor de un cierto eje, y resbala al largo del mismo, dando por resultado un movimiento heliçoidal, de suerte que:

El movimiento infinitamente pequeño, el más general de un cuerpo sólido, redúcese á un movimiento heliçoidal, compuesto de una rotacion y traslacion.

Los ejes de las rotaciones sucesivas, llevan el nombre de ejes instantáneos de resbalamiento, y en su virtud si consideramos luégo los lugares de los ejes instantáneos de resbalamiento en el cuerpo y en el espacio, estos dos lugares serán constantemente tangentes, y, por lo tanto, estos lugares rodarán sin resbalar el uno sobre el otro, de modo que:

El movimiento más general de un cuerpo sólido puede reducirse á hacer rodar una superficie reglada móvil sobre una superficie reglada fija.

Este teorema tan notable, es debido al célebre mecánico Poncelet.

CAPÍTULO IV.

Aceleracion de un punto material.

I.—Consideraciones generales.

Hasta ahora hemos estudiado los movimientos, atendiendo á sus velocidades en un momento determinado, prescindiendo del movimiento total á que está sujeto el punto móvil. Mas nosotros sabemos, por lo que se dijo en un principio, que la rapidez de los movimientos depende de la velocidad, la cual, escepto en el movimiento uniforme, varía con el tiempo; y como la variacion de velocidad en cada unidad de tiempo puede ser ó nó la misma, por esto el movimiento se divide en uniformemente variado y variado-variado.

A la relacion constante que existe entre la velocidad y el tiempo en el movimiento uniformemente variado se le dá el nombre de aceleracion; y esta aceleracion es tan importante, que llega á medirse un movimiento variado cualquiera por la aceleracion de un movimiento uniformemente variado, que hace las veces de límite al primer movimiento; sucediendo aquí á la par, como en el movimiento uniformemente variado, esto es, que se mide su rapidez por la velocidad de un movimiento uniforme, que representa el límite del movimiento uniformemente variado, en el concepto siempre de estrecharse la unidad de tiempo indefinidamente.

Esta es la razon de colocar el estudio de la aceleracion despues de haber tratado de los resultados obrados por velocidades aplicadas á puntos y sólidos, puesto que la aceleracion se puede considerar como una consecuencia de la velocidad.

II.—Aceleracion en el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

La ecuacion general del movimiento uniformemente variado es $s=a+bt+ct^2$; y la velocidad en cada instante $v=b+2ct$; mas como $\frac{\Delta v}{\Delta t}=2c$, resulta que la cantidad $2c$ será el incremento de velocidad en cada unidad de tiempo, ó sea, segun lo esplicado, la aceleracion del movimiento uniformemente variado.

Nota importante.—Si se toma un intérvalo de tiempo Δt, que vaya disminuyendo sucesivamente, en su límite dt, la velocidad v, habrá aumentado de $2c\,dt$; este valor forma lo que se llama elemento de velocidad adquirida, ó sea, la velocidad adquirida elemental.

De esto se desprende que si de antemano pudiéramos conocer el valor de este elemento de velocidad adquirida, dividiéndolo por dt, el cociente nos determinaria la aceleracion del movimiento.

III.—Aceleracion en el movimiento variado y rectilíneo.

Así como por consideraciones geométricas hemos visto que un movimiento variado cualquiera se podia considerar como la sucesion de una infinidad de movimientos uniformes, de los que cada uno tenia lugar durante un intérvalo de tiempo infinitamente pequeño, del propio modo ahora, si tomamos dos ejes coordenados (fig. 24), representantes del tiempo y la velocidad, en el supuesto de que el movimiento sea rectilíneo, el movimiento variado que se considere se podrá medir por la sucesion de una infinidad de movimientos uniformemente variados, de los que cada uno tenga lugar durante un intérvalo de tiempo infinitamente pequeño; y en este concepto la curva, ley del movimiento, se podrá considerar como un polígono de un número infinito de lados, en que cada elemento represente la ley de un movimiento uniformemente variado, durante el tiempo dt, formando dicho movimiento uniformemente variado, parte del movimiento total que se considere. Esto supuesto, se llamará aceleracion en un instante cualquiera del movimiento variado, la aceleracion que en aquel instante corresponde al movimiento uniformemente variado que sirve de medida al movimiento primero.

Sea v la velocidad del móvil al fin del tiempo t; y $v+dv$ la que tiene al fin del tiempo $t+dt$: la velocidad adquirida durante el tiempo dt, vendrá representada por dv, y como ya sabemos que dividiendo la velocidad adquirida por dt, se obtiene la aceleracion, si llamamos á esta j, resulta:

$$\frac{dv}{dt}=j.$$

Si se espresa el movimiento rectilíneo variado por $s=f(t)$, resultará en virtud de las consideraciones anteriores

$$v=f'(t)$$
$$j=f''(t).$$

Fórmulas sumamente importantes para la resolucion de muchos problemas.

IV.—Aceleracion en el movimiento curvilíneo.

Cuando el movimiento es rectilíneo, la velocidad del móvil tiene siempre la misma direccion: de consiguiente, conocida la direccion del movimiento, se tiene conocida la de la velocidad adquirida durante el tiempo dt, restando la velocidad v al tiempo t, de $v+dv$ al tiempo $t+dt$, supuesto que las dos obran en el mismo sentido y direccion; empero en el movimiento curvilíneo, la direccion de la velocidad adquirida, y por consiguiente la aceleracion no es conocida: así pues en este caso, hay que determinar la magnitud y direccion de la aceleracion final en el supuesto de que la velocidad adquirida elemental, ó sea, la velocidad que el punto móvil adquiere durante el tiempo dt, sea tal que, compuesta con la del móvil al fin del tiempo t, produzca la de que está animado al fin del tiempo $t+dt$.

Sea MM′ (fig. 25) la trayectoria de un punto móvil; MV su velocidad á la época t; M′V′ su velocidad á la época $t+\Delta t$. Tracemos $M'V_1$ igual y del mismo sentido que MV; el límite de $\left(\frac{V_1V'}{\Delta t}\right)$ cuando Δt converge á cero, es lo que se llama aceleracion total del móvil á la época t. Á medida que Δt se acerca hácia cero, el punto M′ tiende hácia M; y V_1V' hácia una direccion límite, que es la direccion de la aceleracion total.

La aceleracion total se representa por medio de una recta que sale de M, teniendo por direccion la posicion límite de V_1V', y por longitud el límite $\left(\frac{V_1V'}{\Delta t}\right)$.

Vamos á determinar analíticamente el valor de esta aceleracion total.

Sean x, y, z, las coordenadas rectangulares del punto M; las del punto V serán

$$x+\mathrm{MV}\frac{dx}{ds}, \quad y+\mathrm{MV}\frac{dy}{ds}, \quad z+\mathrm{MV}\frac{dz}{ds};$$

s designa el arco de trayectoria descrito al cabo del tiempo t; MV no es más que la velocidad $\frac{ds}{dt}$; reemplazando, pues, MV por su valor, las coordenadas de V, serán:

$$x+\frac{dx}{dt}, \quad y+\frac{dy}{dt}, \quad z+\frac{dz}{dt}.$$

Las coordenadas del punto V_1 son iguales á las de V, respectivamente aumentadas de dx, dy, dz; en cuanto á las coordenadas de V′, ellas son iguales á las de V, aumentadas de sus diferenciales, porque V′ es lo que viene á resultar ser V, cuando se cambia t en $t+dt$: en virtud de las consideraciones anteriores se deduce el cuadro de valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x+\dfrac{dx}{dt}+dx+d\dfrac{dx}{dt} \\ y+\dfrac{dy}{dt}+dy+d\dfrac{dy}{dt} \\ z+\dfrac{dz}{dt}+dz+d\dfrac{dz}{dt} \end{array}\right\} \text{Coordenadas del punto V}'.$$

$$\left.\begin{array}{l} x+\dfrac{dx}{dt}+dx \\ y+\dfrac{dy}{dt}+dy \\ z+\dfrac{dz}{dt}+dz \end{array}\right\} \text{Coordenadas del punto V}_1.$$

Restando respectivamente estas espresiones tendrémos las proyecciones de V_1V', sobre los ejes coordenados, ó sea,

$$d\frac{dx}{dt},\quad d\frac{dy}{dt},\quad d\frac{dz}{dt},\quad \text{ó tambien}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}dt,\quad \frac{d^2y}{dt^2}dt,\quad \frac{d^2z}{dt^2}dt.$$

Dividiendo por dt estas velocidades elementales adquiridas, nos dará las proyecciones de la aceleracion total, esto es:

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Vamos á escribir estos tres valores, en funcion de cantidades conocidas: empecemos por $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$.

Segun principios generales del cálculo diferencial se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}=\frac{d\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}}{ds}\,\frac{ds}{dt};$$

si designamos por v, la velocidad, resulta la abreviacion siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v\frac{d}{ds}\left(v\frac{dx}{ds}\right),\ \text{ó bien desarrollando,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v^2\frac{d^2x}{ds^2}+v\frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds}.$$

Ahora si llamamos ρ el rádio de curvatura de la trayectoria, y λ, μ, ν, los ángulos que forma con los ejes, podrá escribirse la siguiente fórmula:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v^2\frac{\cos\lambda}{\rho}+\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds}. \qquad \text{(a)}$$

Veamos, ántes de pasar adelante, cómo $\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)$ viene representado por $\left(\frac{\cos\lambda}{\rho}\right)$. En efecto, segun se desprende de la fig. 26, se tiene: $\rho\, d\lambda = ds$, ó sea, $\frac{1}{\rho}=\frac{d\lambda}{ds}$; multiplicando ambos miembros por $\cos\lambda$, se deduce:

$$\frac{\cos\lambda}{\rho}=\frac{\cos\lambda\ d\lambda}{ds}, \quad \text{de donde} \quad \frac{\cos\lambda}{\rho}=\frac{d\ \mathrm{sen}\,\lambda}{ds}; \qquad (1)$$

empero del triángulo abc, siendo bc, y ac, respectivamente paralelo y perpendicular al eje polar OA, se infiere: $cb=ba\cos cba$, ó $dx=ds\ \mathrm{sen}\lambda$; en el concepto de ser $cbo=\lambda$, y abc, complemento de cbo, puesto que bo, es el rádio de curvatura correspondiente al arco ds; luego $\frac{dx}{ds}=\mathrm{sen}\lambda$; sustituyendo este valor en (1) resulta:

$$\frac{\cos\lambda}{\rho}=\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Segun esta aclaracion, la igualdad (a) despues de simplificada, llamando α, el ángulo que forma la direccion de la velocidad con el eje de las x, dá

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v^2\frac{\cos\lambda}{\rho}+\frac{dv}{dt}\cos\alpha.$$

Y de un modo análogo resultarian las siguientes:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=v^2\frac{\cos\mu}{\rho}+\frac{dv}{dt}\cos\beta$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=v^2\frac{\cos\nu}{\rho}+\frac{dv}{dt}\cos\gamma.$$

Estas tres fórmulas demuestran que la aceleracion total es la resultante de dos rectas; la una $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$ cuya direccion es la del rádio de curvatura; y la otra $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ ó $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ cuya direccion es la de la tangente á la trayectoria. La primera de estas rectas lleva el nombre de aceleracion centrípeta ó normal; la otra es la que se llama aceleracion tangencial.

Estos resultados pueden ser comprobados por la Geometría, considerando la misma fig. 25 del caso anterior.

Para esto tracemos V_1P, perpendicular á $M'V'$; V_1P, se puede considerar como una normal situada en el plano osculador, porque el plano $V_1M'V'$ pasa por una tangente que es paralela á la tangente MV, infinitamente próxima. Así pues V_1V' se puede considerar como la resultante de V_1P, y PV'; luego $\left(\frac{V_1V'}{dt}\right)$ será la resultante de $\frac{V_1P}{dt}$ y $\frac{PV'}{dt}$.

Si llamamos α el ángulo infinitamente pequeño que forma $M'V'$ con $M'V_1$, se tendrá $V_1P = M'V_1 \times \operatorname{sen} \alpha = v\alpha = v\,ds\,\frac{\alpha}{ds} = v\frac{ds}{\rho}$; luego $\frac{V_1P}{dt} = \frac{v}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$; el límite de $\left(\frac{V_1P}{dt}\right)$ es, pues, la aceleracion centrípeta ya hallada en direccion del rádio de curvatura. Ahora, $PV' = M'V' - M'V_1 \cos\alpha$, y siendo α, como ya sabemos, una cantidad infinitamente pequeña, resulta:

$$PV' = M'V' - M'V_1 = v + dv - v = dv, \qquad \text{luego}$$

$$\frac{PV'}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Valor de la aceleracion tangencial, conforme habíamos hallado ya. De aquí se infiere tambien que la aceleracion total no es más que la resultante de las rectas $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$ y $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ llevadas la una en el sentido del rádio de curvatura, y la otra en el sentido de la tangente.

En resúmen resulta que la aceleracion total cabe descomponerla siempre en dos direcciones conocidas, siendo esto en su virtud un medio para determinar la direccion de la aceleracion total, lo que de otro modo se haria sumamente difícil.

V.—Principios y consecuencias importantes sobre las aceleraciones.

Vamos á sintetizar en este número los principios y consecuencias más interesantes que se deducen del estudio de la aceleracion de un punto material, empezando por los casos más sencillos.

Cuando un movimiento es rectilíneo, la aceleracion centrípeta es nula; recíprocamente, si la aceleracion centrípeta es constantemente nula, el movimiento es rectilíneo.

En efecto, si el movimiento es rectilíneo, la aceleracion centrípeta que tiene por espresion $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$ será nula, porque ρ debe ser infinito; mas si $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$ es cero, ha de ser porque ρ sea infinito, supuesto que v ha de valer siempre algo.

En el movimiento rectilíneo, la aceleracion total se reduce, pues, á la aceleracion tangencial y tiene por espresion $\left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)$. Si además el movimiento es uniformemente variado, $\left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)$ será constante; de donde $\left(\frac{d s}{d t}\right)$ resulta de la forma $j\ (t—t_0)$, siendo j una constante. Se vé, pues, que la definicion de la aceleracion que hemos dado, cuando hemos hablado del movimiento uniformemente variado, entra en la definicion general.

En el movimiento circular y uniforme, la aceleracion centrípeta es constante, y la aceleracion tangencial es nula.

Evidentemente, las fórmulas $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$ y $\left(\frac{d v}{d t}\right)$ en el supuesto de ser v y ρ constantes, se transforman, la primera en una constante, y la segunda en cero; de suerte que la aceleracion total se reduce á la aceleracion normal $\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$.

Las proyecciones de la aceleracion total de un punto sobre *un eje, ó sobre un plano, es igual á la aceleracion total de la proyeccion de este punto.*

Este teorema puede demostrarse como sigue, en el caso de que las proyecciones se hallen sobre un plano:

Sean (fig. 27) MV y MV′, las rectas que representan las velocidades á las épocas t y $t+dt$; UU′ será la proyeccion de VV′; la proyeccion de J, en el supuesto de ser $VJ=VV':dt$, se hallará en K, y sobre UU′; luego se tendrá

$$\frac{VJ}{UK}=\frac{VV'}{UU'}=\frac{VV':dt}{UU':dt}, \quad \text{de donde}$$

$$UK=UU':dt.$$

Así la proyeccion UK, de la aceleracion total, es la aceleracion total del movimiento proyectado.

Si se hubiese proyectado sobre un eje, la demostracion hubiera sido la misma, solo que UU′ y N, se habrian hallado en línea recta.

Hemos visto que la aceleracion de la proyeccion, no es más que la proyeccion de la aceleracion del punto en el espacio; luego si determinamos las aceleraciones sobre las proyecciones, construyendo sobre los ejes el paralelógramo ó paralelepípedo correspondiente, segun se consideren dos ó tres ejes, la diagonal correspondiente representará la resultante ó la aceleracion total, pues esta recta admitirá solamente por proyecciones sobre los ejes, las rectas consideradas anteriormente.

De modo que la aceleracion total del espacio, es la resultante de las aceleraciones de sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

Conociendo, pues, las ecuaciones del movimiento, fácil será determinar la aceleracion total en el movimiento de un punto. Supónganse, pues, dos ejes coordenados, siendo las ecuaciones del movimiento $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$.

Las aceleraciones en los movimientos de las proyecciones, por ser el movimiento rectilíneo, serán

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\varphi''(t).$$

La aceleracion total del punto móvil vendrá espresada, pues, por la diagonal de un paralelógramo, cuyos lados paralelos á los ejes sean respectivamente iguales á estas dos cantidades.

Si el movimiento se refiere á tres ejes, siendo las ecuaciones del movimiento

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\mathrm{F}(t); \qquad \text{se tendrá}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t), \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\varphi''(t), \quad \frac{d^2z}{d^2t}=\mathrm{F}''(t).$$

Luego la aceleracion total del punto en el espacio se halla determinada por medio de la diagonal del paralelepípedo que tenga por aristas concurrentes, tres rectas paralelas respectivamente á los ejes coordenados, é iguales á los valores de las aceleraciones de las proyecciones que acabamos de determinar.

Vamos á desarrollar algunos ejemplos, aunque sea á grandes rasgos, para comprender mejor la importancia de los principios anteriores.

Considérese el movimiento circular y uniforme de un punto, y refirámoslo á dos ejes coordenados rectangulares, que pasen por el centro del círculo.

Segun se vió en un principio, las ecuaciones de este movimiento son:

$$x=r\cos\frac{vt}{r}, \qquad y=r\,\mathrm{sen}\,\frac{vt}{r};$$

diferenciando dos veces consecutivas estas dos fórmulas, se obtiene $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{v^2}{r}\,\mathrm{sen}\,\frac{vt}{r};$

elevando al cuadrado y sumando estas dos espresiones, se deduce

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=\frac{v^4}{r^2}\left(\mathrm{sen}^2\frac{vt}{r}+\cos^2\frac{vt}{r}\right)=\frac{v^4}{r^2}.$$

Si llamamos A, la aceleracion total dá

$$\mathrm{A}^2=\frac{v^4}{r^2}, \quad \text{ó sea,} \quad \mathrm{A}=\frac{v^2}{r};$$

resultado conforme al que habíamos hallado ya, puesto que $\left(\frac{v^2}{r}\right)$ es la aceleracion centrípeta, y en esta clase particular de movimiento dicha aceleracion centrípeta es la única representante de la aceleracion total.

Consideremos ahora la proyeccion rectangular sobre un plano cualquiera de este mismo movimiento circular y uniforme.

Tomemos por ejes coordenados los ejes de la elipse que corresponden á la proyeccion de la circunferencia sobre el plano dado; llamemos α, el ángulo que forma el plano de la trayectoria circular con el plano de la elipse; en este supuesto las ecuaciones del movimiento serán:

$$x=r\cos\frac{vt}{r},\qquad y=r\cos\alpha\,\text{sen}\,\frac{vt}{r}.\qquad (1)$$

Para hallar las aceleraciones sobre los ejes, bastará diferenciar dos veces consecutivas las ecuaciones (1), resultando los valores siguientes:

$$d^2x=-\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r}dt^2,\qquad d^2y=-\frac{v^2}{r}\cos\alpha\,\text{sen}\,\frac{vt}{r}dt^2,\text{ ó sea,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{v^2}{r}\cos\frac{vt}{r},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{v^2}{r}\cos\alpha\,\text{sen}\,\frac{vt}{r}.$$

Comparando estos resultados con las ecuaciones (1), fácil es ver cómo estas aceleraciones son proporcionales á los valores de x é y, diciéndonos esto que dichas aceleraciones obran desde el móvil hácia el centro de la elipse.

La aceleracion total vendrá espresada segun los valores anteriores por

$$A=\frac{v^2}{r}\sqrt{\cos^2\frac{vt}{r}+\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\frac{vt}{r}}.$$

Si buscamos ahora la distancia del punto móvil al centro de la elipse, se tendrá, llamando á esta distancia d,

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\frac{vt}{r}+r^2\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\frac{vt}{r}},$$

simplificando $d=r\sqrt{\cos^2\frac{vt}{r}+\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\frac{vt}{r}}.$

Luego este resultado nos dice que A y d se hallan en una razon constante.

Todos estos valores demuestran los principios de la aceleracion cuando se proyecta sobre un plano, pues ellos nos manifiestan que la aceleracion total en la proyeccion está dirigida segun la línea que une el móvil proyectado al centro de su trayectoria elíptica, siendo además el valor de esta aceleracion total, proporcional á la longitud de la misma línea.

Si de un punto de la trayectoria infinitamente próximo al que ocupa el móvil, se baja una perpendicular á la velocidad, esta perpendicular representará la mitad del producto de la aceleracion normal por el cuadrado del elemento de tiempo que se considere.

Sean (fig. 28) ad, y db, dos elementos consecutivos, y ao, y ob, los rádios de curvatura respecto al plano osculador que pasa por ad, y db; supongamos además la perpendicular al elemento, ó á la tangente que pasa por ad; luego

$$bc = ab \times \operatorname{sen} \frac{\omega}{2},$$

considerando cab, como mitad del ángulo ω de contingencia; si pasamos á los límites, se tiene

$$\text{lim. } bc = ds \frac{\omega}{2}; \qquad (1)$$

mas se sabe que $\frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{ds}$, siendo ω, una cantidad angular sumamente pequeña, sustituyendo, pues, el valor de ω en (1), se tiene

$$\text{lím. } bc = ds \frac{\frac{ds}{\rho}}{2} = \frac{ds^2}{2\rho} = \frac{ds^2}{dt^2} \frac{dt^2}{2\rho} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\rho} dt^2,$$

fórmula pedida.

Si sobre la tangente á la trayectoria (fig. 29) *trazada en la posicion* M, *del móvil á la época* t, *y en el sentido del movimiento, se toma una longitud* MT, *igual á* v dt, *ó sea, á la velocidad elemental adquirida; si se junta la estremidad* T *de la línea así trazada con* M′, *posicion ocupada por el móvil á la época* t+dt: *la línea* TM′ *será igual á* $\frac{1}{2}$j dt², *siendo* j *la aceleracion total.*

En efecto, siendo x, y, z, las coordenadas de M; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, las de T; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, las de M': resulta para las proyecciones de TM', sobre los ejes,

$$\Delta x-dx, \quad \Delta y-dy, \quad \Delta z-dz. \qquad \text{(b)}$$

Ahora por consideraciones del teorema de Taylor, se tiene

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+\cdots\cdots, \text{ ó tambien}$$

$$f(x+dt)=f(x)+f'(x)\,dt+f''(x)\frac{dt^2}{1.2}+\cdots\cdots, \quad \text{luego}$$

$$f(x+dt)-f(x)=f'(x)\,dt+f''(x)\frac{dt^2}{1.2}+\cdots\cdots,$$

representando el primer miembro por Δx, se tiene

$$\Delta x=f'(x)\,dt+f''(x)\frac{dt^2}{1.2}+\cdots\cdots, \quad \text{de donde}$$

$$\Delta x=\frac{dx}{dt}dt+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dt^2}{1.2}+\cdots\cdots=dx+\frac{d^2x}{1.2}+\cdots\cdots:$$

en este desarrollo nos podemos detener á la diferencial de segundo órden, puesto que las diferenciales de órdenes superiores no tienen razon de ser cuando se trata de relaciones sencillas del círculo osculador; así, pues, tendrémos segun los valores (b)

$$\Delta x-dx=dx+\frac{d^2x}{2}-dx=\frac{d^2x}{2},$$

y, por consideraciones análogas, resulta:

$$\Delta y-dy=dy+\frac{d^2y}{2}-dy=\frac{d^2y}{2},$$

$$\Delta z-dz=dz+\frac{d^2z}{2}-dz=\frac{d^2z}{2},$$

cuyos valores, que son los pedidos, pueden escribirse de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2, \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}dt^2, \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}dt^2.$$

Y siendo estos valores, por lo esplicado anteriormente, las proyecciones de $\frac{1}{2}j\,dt^2$, queda con esto completamente demostrado el principio.

VI.—Aceleracion de un movimiento compuesto.

Así como la velocidad resultante en un instante, depende de la que tienen en el mismo momento las velocidades componentes, á la par la aceleracion total en el movimiento resultante depende tambien de las aceleraciones totales que corresponden á los movimientos componentes. Si los movimientos componentes son de traslacion, segun lo que precede, se sabe que la velocidad v del movimiento resultante ó absoluto en un elemento de tiempo, viene espresada por la diagonal del paralelógramo, cuyos lados contiguos representan las velocidades v' y v'' de las componentes al tiempo t; mas suponiendo á t, un pequeño aumento dt, las velocidades componentes se transforman en $v'+dv'$, y $v''+dv''$, siendo la velocidad resultante $v+dv$; tomando, pues, rectas que representen en direccion y magnitud el valor respectivo de estas velocidades al tiempo t, y $t+dt$, fácil será ver por una construccion geométrica bien sencilla que dv indicará en magnitud y direccion la resultante de dv', y dv'': luego si dividimos respectivamente estos valores por dt, los cocientes representarán las aceleraciones, y supuesto que estas operaciones no deben alterar las relaciones primeras, resulta últimamente que la aceleracion total es la resultante de las aceleraciones componentes.

Si el punto móvil está animado á la vez de más de dos movimientos y todos son de traslacion, bastará atender al polígono de las velocidades para deducir la aceleracion total resultante.

Si uno de los dos movimientos de traslacion que hemos supuesto ántes se transforma en un movimiento cualquiera, por los principios que preceden, sabemos que puede llegarse de la posicion primitiva á la final por medio de dos movimientos: uno de traslacion, y otro de rotacion alrededor de cierto eje. Esta doble condicion hace que la aceleracion total resultante no dependa ahora de dos elementos, como ántes, sino de tres, siendo la aceleracion final, en direccion y magnitud, el valor de la recta que une los estremos de tres rectas, representantes de tres aceleraciones componentes; así, llamando ω la velocidad angular de la rotacion elemental, y α el ángulo que el eje instantáneo forma con la direccion de la velocidad relativa que podemos suponer que corresponda á v'', tendrémos definitivamente la aceleracion final combinando: la aceleracion que corresponde á dv' del caso anterior, con la aceleracion que corresponde á la otra velocidad elemental dv'', junto con otra aceleracion igual á $2\omega v'' \operatorname{sen} \alpha$, dirigida perpendicularmente al plano que pasa por la velocidad relativa v'' y por el eje instantáneo de rotacion de los ejes móviles, y en el sentido de que gira la velocidad relativa en dicho instante.

Nota.—Obsérvese que estas tres aceleraciones son resultado de multiplicar por $\left(\frac{2}{dt^2}\right)$ las distancias que van respectivamente del punto de partida de cada velocidad á su última posicion, cuando haya trascurrido el tiempo dt. Todos estos resultados son consecuencias de los principios anteriores, cuya investigacion dejamos á la curiosidad del lector.

CAPÍTULO V.

Estudio analítico del movimiento de un sólido.

I.—Caso en que el sólido presente un punto fijo.

El estudio general que hemos desarrollado respecto del movimiento de un cuerpo sólido, adolece del defecto de apoyarse en consideraciones geométricas, y este inconveniente es grande, porque impide estudiar la teoría de la composicion de los movimientos en su mayor grado de generalidad.

Vamos, pues, á considerar este estudio de una manera analítica, á fin de salvar todas estas dificultades.

Consideremos un sólido en movimiento, pero que uno de los puntos esté sujeto á permanecer en reposo. Por el punto fijo hagamos pasar tres ejes rectangulares invariables, OX, OY, OZ (fig. 30); sean x, y, z, las coordenadas de un punto M, cualquiera del sólido, tomadas con relacion á estos ejes fijos.

Consideremos ahora un segundo sistema de ejes rectangulares OA, OB, OC, teniendo el mismo orígen que el primero, pero invariablemente ligados al sólido. Sean A, B, C, las coordenadas del punto M, con relacion á estos nuevos ejes. Las fórmulas de transformacion de coordenadas dan:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\,A+b\,B+c\,C,\\ y&=a'A+b'B+c'C,\\ z&=a''A+b''B+c''C,\end{aligned}\right.\qquad (\Delta)$$

siendo a=cos (OX, OA); b=cos (OX, OB); c=cos (OX, OC)..... Se sabe además que los nueve cosenos $a, b, c,$..... están ligados entre sí por diversas fórmulas, tales como

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1\\ a'^2+b'^2+c'^2&=1\\ a''^2+b''^2+c''^2&=1\end{aligned}\right\}\ (1)\qquad \left.\begin{aligned} a'a''+b'b''+c'c''&=0\\ a\,a'+b\,b'+c\,c'&=0\\ a\,a''+b\,b''+c\,c''&=0\end{aligned}\right\}\ (2)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2+a'^2+a''^2&=1\\ b^2+b'^2+b''^2&=1\\ c^2+c'^2+c''^2&=1\end{aligned}\right\}\ (3)\qquad \left.\begin{aligned} a\,c+a'\,c'+a''\,c''&=0\\ ab+a'\,b'+a''\,b''&=0\\ b\,c+b'\,c'+b''\,c''&=0\end{aligned}\right\}\ (4).$$

Supondremos siempre que las direcciones positivas de los nuevos ejes pueden estar colocados en coincidencia con los antiguos. Así, pues, si tomamos las dos últimas ecuaciones del grupo (2)

$$\left.\begin{aligned} a''a+b''\,b+c''\,c&=0\\ a\,a'+b\,b'+c\,c'&=0\end{aligned}\right.\qquad (\alpha)$$

multiplicando la primera por a', y la segunda por a'', resulta

$$\left.\begin{aligned} a''\,a\,a'+b''\,b\,a'+c''\,c\,a'&=0\\ a\,a'\,a''+b\,b'\,a''+c\,c'\,a''&=0\end{aligned}\right\}$$ y restando respectivamente estas dos ecuaciones se deduce

$$b\,(a'\,b''-b'\,a'')+c\,(a'\,c''-c'\,a'')=0,$$ de donde

$$b=\frac{c'\,a''-a'\,c''}{a'\,b''-b'\,a''}c.$$

Si hacemos $c=a'\,b''-b'\,a''$,

se obtiene $b=c'\,a''-a'\,c''$.

Tomando otra vez el grupo (α) y eliminando b, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} aa'b''+bb'b''+cc'b''=0 \\ a''a'b+b''bb'+c''cb'=0 \end{array}\right\} \text{ restando}$$

$$a\,(a'b''-b'a'')+c\,(c'b''-c''b')=0, \qquad \text{luego}$$

$$a=\frac{b'c''-c'b''}{a'b''-b'a''}c,$$

y como $\qquad c=a'b''-b'a'',$

resulta $\qquad a=b'c''-c'b''.$

Así, pues, tendremos

$$\begin{array}{lll} a=b'c''-c'b'' & a'=\cdots\cdots & a''=\cdots\cdots \\ b=c'a''-a'c'' & b'=\cdots\cdots & b''=\cdots\cdots \\ c=a'b''-b'a'' & c'=\cdots\cdots & c''=\cdots\cdots \end{array}$$

Multipliquemos las tres primeras igualdades respectivamente por a, b, c, y tendrémos despues de sumar

$$a^2+b^2+c^2=a\,(b'c''-c'b'')+b\,(c'a''-a'c'')+c\,(a'b''-b'a'').$$

El primer miembro segun el grupo (1) vale la unidad, el segundo espresa el resultado de las seis permutaciones correspondientes á la matriz siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

luego podemos escribir la determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1.$$

Relacion notable que nos da bajo la forma de determinante, los diferentes cosenos de los ángulos formados por los ejes fijos y movibles de los dos sistemas ortogonales que hemos supuesto.

Despues de este pequeño paréntesis, podemos pasar á desarrollar inmediatamente el movimiento de un punto bajo las condiciones del problema.

Si diferenciamos ahora las fórmulas (Δ) con relacion al tiempo; A, B, C, no variarán, pues se consideran constantes respecto á dt; resultando

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mathrm{A}\frac{da}{dt}+\mathrm{B}\frac{db}{dt}+\mathrm{C}\frac{dc}{dt}\\ \frac{dy}{dt}&=\mathrm{A}\frac{da'}{dt}+\mathrm{B}\frac{db'}{dt}+\mathrm{C}\frac{dc'}{dt}\\ \frac{dz}{dt}&=\mathrm{A}\frac{da''}{dt}+\mathrm{B}\frac{db''}{dt}+\mathrm{C}\frac{dc''}{dt}\end{aligned}\right\}\quad(5).$$

Estas fórmulas darán á conocer la velocidad del punto por medio de sus proyecciones $\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sobre los ejes fijos, cuando se conozcan a, b, c, en funcion del tiempo.

Si designamos por μ, ν, ω, las proyecciones de la velocidad del punto M, sobre los ejes OA, OB, OC, siendo $\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)$ las componentes de la velocidad al largo de los antiguos ejes, se tendrá á la vista de la figura

$$\left.\begin{aligned}\mu&=a\frac{dx}{dt}+a'\frac{dy}{dt}+a''\frac{dz}{dt}\\ \nu&=b\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+b''\frac{dz}{dt}\\ \omega&=c\frac{dx}{dt}+c'\frac{dy}{dt}+c''\frac{dz}{dt}\end{aligned}\right\}\quad(6).$$

Si diferenciamos los grupos (3) y (4) ya hallados, se obtienen los resultados siguientes deducidos de simples principios del cálculo diferencial:

$$\left.\begin{aligned}a\,da+a'\,da'+a''\,da''&=0\\ b\,db+b'\,db'+b''\,db''&=0\\ c\,dc+c'\,dc'+c''\,dc''&=0\end{aligned}\right\}\quad(7).$$

$$b\,dc+c\,db+b'\,dc'+c'\,db'+b''\,dc''+c''\,db''=0$$

. . . .

Se puede, pues, escribir

$$\left.\begin{aligned}p\,dt&=c\,db+c'\,db'+c''\,db''=-(b\,dc+b'\,dc'+b''\,dc'')\\ q\,dt&=a\,dc+a'\,dc'+a''\,dc''=-(c\,da+c'\,da'+c''\,da'')\\ r\,dt&=b\,da+b'\,da'+b''\,da''=-(a\,db+a'\,db'+a''\,db'')\end{aligned}\right\}\quad(8).$$

Si multiplicamos ahora las fórmulas del grupo (5) respectivamente por a, a', a'', resulta:

$$a\frac{dx}{dt}=\mathrm{A}a\frac{da}{dt}+\mathrm{B}a\frac{db}{dt}+\mathrm{C}a\frac{dc}{dt},$$

$$a'\frac{dy}{dt}=\mathrm{A}a'\frac{da'}{dt}+\mathrm{B}a'\frac{db'}{dt}+\mathrm{C}a'\frac{dc'}{dt},$$

$$a''\frac{dz}{dt}=\mathrm{A}a''\frac{da''}{dt}+\mathrm{B}a''\frac{db''}{dt}+\mathrm{C}a''\frac{dc''}{dt}.$$

Sumando se tiene:

$$a\frac{dx}{dt}+a'\frac{dy}{dt}+a''\frac{dz}{dt}=\mathrm{A}a\frac{da}{dt}+\mathrm{A}a'\frac{da'}{dt}+\mathrm{A}a''\frac{da''}{dt}+\mathrm{B}a\frac{db}{dt}$$

$$+\mathrm{B}a'\frac{db'}{dt}+\mathrm{B}a''\frac{db''}{dt}+\mathrm{C}a\frac{dc}{dt}+\mathrm{C}a'\frac{dc'}{dt}+\mathrm{C}a''\frac{dc''}{dt}.$$

Teniendo en cuenta ahora los grupos (6) (7) y (8), resulta

$$\mu=\mathrm{C}q-\mathrm{B}r.$$

Multipliquemos ahora el grupo (5) por b, b', b'', se tiene:

$$b\frac{dx}{dt}=\mathrm{A}b\frac{da}{dt}+\mathrm{B}b\frac{db}{dt}+\mathrm{C}b\frac{dc}{dt},$$

$$b'\frac{dy}{dt}=\mathrm{A}b'\frac{da'}{dt}+\mathrm{B}b'\frac{db'}{dt}+\mathrm{C}b'\frac{dc'}{dt},$$

$$b''\frac{dz}{dt}=\mathrm{A}b''\frac{da''}{dt}+\mathrm{B}b''\frac{db''}{dt}+\mathrm{C}b''\frac{dc''}{dt},$$

sumando y simplificando se deduce, atendiendo á las mismas consideraciones del caso anterior,

$$\nu=\mathrm{A}r-\mathrm{C}p.$$

Multiplicando por fin el grupo (5) por c, c', c'', se tendrá:

$$c\frac{dx}{dt}=\mathrm{A}c\frac{da}{dt}+\mathrm{B}c\frac{db}{dt}+\mathrm{C}c\frac{dc}{dt},$$

$$c'\frac{dy}{dt}=\mathrm{A}c'\frac{da'}{dt}+\mathrm{B}c'\frac{db'}{dt}+\mathrm{C}c'\frac{dc'}{dt},$$

$$c''\frac{dz}{dt}=\mathrm{A}c''\frac{da''}{dt}+\mathrm{B}c''\frac{db''}{dt}+\mathrm{C}c''\frac{dc''}{dt}.$$

Sumando y simplificando resulta

$$\omega=\mathrm{B}p-\mathrm{A}q.$$

Reuniendo las tres ecuaciones halladas, tendrémos

$$\mu = Cq - Br; \qquad \nu = Ar - Cp; \qquad \omega = Bp - Aq. \qquad (\pi)$$

Propongámonos ahora hallar los puntos del cuerpo que á la época t, están animados de una velocidad nula. Para estos puntos se tendrá $\mu=0$, $\nu=0$, $\omega=0$, y las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$Cq - Br = 0, \quad Ar - Cp = 0, \quad Bp - Aq = 0, \qquad \text{luego}$$

$$\frac{C}{r} = \frac{B}{q}, \quad \frac{A}{p} = \frac{C}{r}, \quad \frac{B}{q} = \frac{A}{p}, \qquad \text{ó sea,}$$

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}.$$

De esta série de igualdades, se deducen dos ecuaciones que corresponden á las proyecciones de una recta en el espacio que pasa por el orígen, en cuyos puntos la velocidad es nula á la época t; si se supone $\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \omega$, la recta en cuestion formará, con los ejes movibles, ángulos cuyos cosenos serán

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}, \qquad (1)$$

y esta recta es precisamente la que toma el nombre de eje instantáneo de rotacion. Con estos preliminares podemos pasar á determinar la velocidad V del punto M.

Empezarémos por sumar las ecuaciones (π) despues de haberlas elevado al cuadrado:

$$\mu^2+\nu^2+\omega^2 = V^2 = (Cq - Br)^2 + (Ar - Cp)^2 + (Bp - Aq)^2$$

$$= C^2q^2 - 2CBqr + B^2r^2 + A^2r^2 - 2ACpr + C^2p^2 + B^2p^2 - 2ABpq + A^2q^2$$

añadiendo y quitando la misma cantidad en este segundo miembro, se tendrá

$$V^2 = C^2q^2 - 2BCqr + r^2B^2 + r^2A^2 - 2ACpr + p^2C^2 + p^2B^2 - 2pqAB + q^2A^2$$

$$+ p^2A^2 + q^2B^2 + r^2C^2 - p^2A^2 - q^2B^2 - r^2C^2$$

$$= q^2(A^2+B^2+C^2) + r^2(A^2+B^2+C^2) + p^2(A^2+B^2+C^2) - (pA+qB+rC)^2$$

$$= (p^2+q^2+r^2)(A^2+B^2+C^2) - (pA+qB+rC)^2.$$

Esta fórmula puede escribirse del modo siguiente:

$$V^2 = \omega^2R^2\left[\left(\frac{p^2}{\omega^2}+\frac{q^2}{\omega^2}+\frac{r^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{A^2}{R^2}+\frac{B^2}{R^2}+\frac{C^2}{R^2}\right) - \left(\frac{pA}{\omega R}+\frac{qB}{\omega R}+\frac{rC}{\omega R}\right)^2\right]$$

Ahora, como R representa $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, ó sea, la distancia del punto M al punto fijo O, resulta por sencillas consideraciones de analítica que la fórmula precedente puede espresarse por

$$V^2=\omega^2R^2\,[1-\cos^2(R\omega)],$$

llamando $R\omega$ el ángulo de las dos rectas que ya conocemos, esto es, el ángulo formado por el eje intantáneo con la recta que une el punto M, con el orígen de coordenadas: luego

$$V=\omega R \operatorname{sen}(\omega R); \quad \text{ó bien} \quad V=\omega\delta,$$

llamando δ, la perpendicular bajada desde el punto M al eje intantáneo.

Hay que advertir que el eje instantáneo posee una velocidad nula á la época t; de suerte, que todo el sistema gira durante el tiempo dt alrededor del eje instantáneo. Así, pues, si se divide la velocidad V por la distancia δ del punto M al eje instantáneo, el cociente ω será lo que se puede llamar la velocidad de la rotacion instantánea alrededor de dicho eje instantáneo.

Ahora, siendo Vdt, el cambio del punto M en el tiempo dt, resulta que $\left(\frac{V}{\delta}dt\right)$ ó (ωdt) representará la rotacion efectiva en el tiempo dt; y segun las fórmulas (1) tendrémos que

$$pdt, \qquad qdt, \qquad rdt,$$

serán las proyecciones de esta rotacion sobre los ejes.

De esta conclusion se deduce una consecuencia de alta importancia, y es que si representamos una rotacion por una recta, la proyeccion de esta rotacion vendrá dada por la proyeccion de la recta que representa dicha rotacion.

Observacion: El eje instantáneo no es rigurosamente inmóvil; mas como sus puntos tienen una velocidad nula, el cambio Δs de uno de sus puntos, dado por la fórmula de Taylor,

$$\Delta s=\frac{ds}{dt}dt+\frac{1}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2}dt^2+\cdots\cdots,$$

se reduce á $\quad \Delta s=\frac{1}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2}dt^2+\cdots\cdots;$

así es que á pesar de ser la velocidad nula, el eje instantáneo cambia, pero los caminos recorridos por cada uno de sus puntos son cantidades infinitamente pequeñas de segundo órden á lo menos; de manera que si no se tiene en cuenta nada más que los infinitamente pequeños de primer órden, solo en este caso se podrá decir que el eje instantáneo permanece inmóvil durante el tiempo dt.

II.—Espresion analítica de los cambios que puede adquirir un cuerpo sólido en general.

El movimiento más general que puede tomar un cuerpo sólido, redúcese á una traslacion seguida de una rotacion: la traslacion, como ya se indicó, lleva un punto cualquiera de su posicion inicial á su posicion final; y por fin la rotacion coloca al sólido en su posicion definitiva. Una traslacion y una rotacion estarán, pues, analíticamente determinadas por sus proyecciones, es decir, por las proyecciones de las rectas, que representan aquellos movimientos sobre tres ejes rectangulares; de manera que el movimiento elemental de un sólido se halla determinado por seis parámetros, á saber: las proyecciones de la traslacion y las proyecciones de la rotacion; proyecciones que tienen por objeto llevar el sólido de su posicion inicial á su posicion final.

Calculemos, pues, el cambio de un punto dado del sólido en funcion de los seis parámetros en cuestion.

Sean x, y, z, las coordenadas de un punto M cualquiera del sólido; X, Y, Z, las componentes totales del cambio S, realizado por el punto M bajo la influencia de la traslacion, cuyas proyecciones son a, b, c, y de la rotacion, cuyas proyecciones son p, q, r.

En virtud de la rotacion (p, q, r), habiendo el punto fijo $(x_0\ y_0\ z_0)$, el punto M (fig. 31) describe un arco de círculo cuya medida es $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, y cuyo plano es perpendicular á la recta $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, ($\alpha$) siendo el rádio R la distancia del punto $x_1\ y_1\ z_1$ á esta recta, segun se desprende de la simple inspeccion de la figura.

Vamos á determinar el valor de esta recta R por consideraciones puramente analíticas, y para ello será preciso ántes resolver algunas cuestiones preliminares.

Empecemos por determinar la distancia de una recta dada al orígen de coordenadas, suponiendo los ejes rectangulares.

Sean $x=az+m$, $y=bz+n$ las ecuaciones de la recta dada; sea O P, la perpendicular trazada desde el orígen sobre esta recta; x, y, z, las coordenadas del punto P, pié de la perpendicular sobre la recta; luego

$$OP=\delta=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

reemplazando x, é y, por sus valores deducidos de las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\delta=\sqrt{(az+m)^2+(bz+n)^2+z^2}=\sqrt{(a^2+b^2+1)z^2+2(am+bn)z+m^2+n^2},$$

Falta espresar que la variable z corresponde al punto P, es decir, al pié de la perpendicular trazada desde el orígen de coordenadas á la recta dada, y para esto es preciso que δ sea un mínimo, ó bajo otros términos, que su derivada con relacion á z sea nula, de modo que resulta:

$$\frac{2(a^2+b^2+1)z+2(am+bn)}{2\sqrt{(a^2+b^2+1)z^2+2(am+bn)z+m^2+n^2}}=0$$

luego $$z=-\frac{am+bn}{a^2+b^2+1},$$

sustituyendo este valor en δ, se tiene últimamente

$$\delta=\sqrt{\frac{(an-bm)^2+m^2+n^2}{a^2+b^2+1}}.$$

Empero si la perpendicular no sale del orígen, sino del punto cuyas coordenadas son $(x'\ y'\ z')$, se tomará por nuevo orígen este punto, y las ecuaciones de la recta anterior $x=az+m$, $y=bz+n$, transfórmanse en $x+x'=a(z+z')+m$, $y+y'=b(z+z')+n$; de donde $x=az+(az'+m-x')$, $y=bz+(bz'+n-y')$.

Luego la distancia del nuevo orígen á la recta dada, tendrá por espresion:

$$\delta=\sqrt{\frac{[a(bz'+n-y')-b(az'+m-x')]^2+(az'+m-x')^2+(bz'+n-y')^2}{a^2+b^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{[a(n-y')-b(m-x')]^2+(az'+m-x')^2+(bz'+n-y')^2}{a^2+b^2+1}}.$$

Hechas estas aclaraciones, podemos tomar otra vez el problema primero.

De las igualdades (α) resulta:

$$x-x_0=\frac{p}{r}(z-z_0),\qquad y-y_0=\frac{q}{r}(z-z_0),\qquad \text{de donde}$$

$$x=\frac{p}{r}z-\frac{p}{r}z_0+x_0,\qquad y=\frac{q}{r}z-\frac{q}{r}z_0+y_0.$$

Ahora, como en el caso particular que nos ocupa la $x'\ y'\ z'$, de la fórmula general se transforma en $x_1\ y_1\ z_1$, siendo la

$$m=-\frac{p}{r}z_0+x_0,\quad n=-\frac{q}{r}z_0+y_0,\quad a=\frac{p}{r},\quad b=\frac{q}{r};$$

sustituyendo estos valores en la fórmula general que acabamos de hallar, se tendrá:

$$\delta=\sqrt{\frac{\left\{\frac{p}{r}\left(-\frac{q}{r}z_0+y_0-y_1\right)-\frac{q}{r}\left(-\frac{p}{r}z_0+x_0-x_1\right)\right\}^2+\left\{\frac{p}{r}z_1+\left(-\frac{p}{r}z_0+x_0\right)-x_1\right\}^2+\left\{\frac{q}{r}z_1+\left(-\frac{q}{r}z_0+y_0\right)-y_1\right\}^2}{\frac{p^2}{r^2}+\frac{q^2}{r^2}+1}}$$

Simplificando, por fin, resulta:

$$R=\delta=\sqrt{\frac{[q(x_1-x_0)-p(y_1-y_0)]^2+[p(z_1-z_0)-r(x_1-x_0)]^2+[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2}{p^2+q^2+r^2}}\quad (A).$$

Valor del rádio de la circunferencia descrita por el punto M alrededor del eje instantáneo.

El arco descrito por el punto M, durante el tiempo infinitamente pequeño que se supone, es perpendicular á la recta que pasa por el punto $(x_0\ y_0\ z_0)$ y el punto $(x_1\ y_1\ z_1)$; así como tambien á la recta (α); designando, pues, por λ, μ, ν, los ángulos que forma dicho arco con los ejes, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} p\cos\lambda+q\cos\mu+r\cos\nu=0 \\ (x_1-x_0)\cos\lambda+(y_1-y_0)\cos\mu+(z_1-z_0)\cos\nu=0 \end{array}\right\} \quad (\epsilon)$$

Para eliminar $\cos\lambda$, bastará multiplicar la primera igualdad por (x_1-x_0), y la segunda por p; luego

$$p(x_1-x_0)\cos\lambda+q(x_1-x_0)\cos\mu+r(x_1-x_0)\cos\nu=0,$$

$$p(x_1-x_0)\cos\lambda+p(y_1-y_0)\cos\mu+p(z_1-z_0)\cos\nu=0,$$

restando resulta:

$$\cos\mu\{q(x_1-x_0)-p(y_1-y_0)\}=\cos\nu\{p(z_1-z_0)-r(x_1-x_0)\},$$ ó sea,

$$\frac{\cos\nu}{q(x_1-x_0)-p(y_1-y_0)}=\frac{\cos\mu}{p(z_1-z_0)-r(x_1-x_0)}. \quad (r)$$

Si tomamos otra vez las ecuaciones (ϵ) eliminando $\cos\mu$, dedúcese por una marcha parecida á la anterior

$$p(y_1-y_0)\cos\lambda+q(y_1-y_0)\cos\mu+r(y_1-y_0)\cos\nu=0,$$

$$q(x_1-x_0)\cos\lambda+q(y_1-y_0)\cos\mu+q(z_1-z_0)\cos\nu=0,$$

restando se obtiene:

$$\cos\lambda\{p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)\}+\cos\nu\{r(y_1-y_0)-q(z_1-z_0\}=0,$$ luego

$$\frac{\cos\lambda}{q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)}=\frac{\cos\nu}{p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)}.$$

Combinando esta ecuacion con (r), dá

$$\frac{\cos\lambda}{q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)}=\frac{\cos\mu}{r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0)}=\frac{\cos\nu}{p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)},$$

empero por simples consideraciones del álgebra elemental resulta la igualdad siguiente:

$$\frac{\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu}{[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2+[r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0)]^2+[p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)]^2}=\frac{\cos^2\lambda}{[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2}$$

Y como $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, segun la fórmula (A), resulta:

$$\frac{1}{R^2(p^2+q^2+r^2)}=\frac{\cos^2\lambda}{[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2},$$ luego

$$R\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cos\lambda=q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0);$$

de un modo semejante se obtendria:

$$R\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cos\mu=r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0),$$

$$R\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cos\nu=p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0).$$

Adviértase que los primeros miembros de estas ecuaciones, representan el cámbio del punto M, proyectado sobre cada uno de los ejes x, y, z; así como los segundos miembros son las espresiones analíticas de estas proyecciones espresadas en funcion de p, q, r.

Ahora, bajo la influencia de la traslacion, el punto M vá á describir un camino, cuyas proyecciones serán a, b, c; y, por consiguiente, las proyecciones sobre los ejes, del camino total descrito por el punto M, serán, en el concepto de espresarse por X, Y, Z, las proyecciones de dicho camino total, las siguientes:

$$X=a+q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0),$$
$$Y=b+r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0),$$
$$Z=c+p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0).$$

Suponiendo un punto M cualquiera, cuyas coordenadas se pueden espresar por x, y, z, resulta definitivamente:

$$X=a+q(z-z_0)-r(y-y_0),$$
$$Y=b+r(x-x_0)-p(z-z_0),$$
$$Z=c+p(y-y_0)-q(x-x_0).$$

Estas fórmulas son muy importantes, y ellas bastan para demostrar todas las composiciones de rotaciones que hemos visto ya en diferentes casos particulares.

COMPLEMENTO.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA CINEMÁTICA.

I.—Consideraciones de una figura, que se mueve sobre un plano.

Cuando una figura de forma invariable cámbia de lugar sobre un plano segun una ley dada, un punto cualquiera de esta figura, ó ligado invariablemente á ella, se mueve tambien segun una ley que los geómetras del siglo XVII estudiaron ya en el caso particular de la ciclóide.

Una de las cuestiones que preocupó más á los geómetras, fué la de trazar una tangente á la curva descrita por un punto ligado á una curva móvil que vá apoyándose sobre otra fija, en el supuesto de que vaya rodando sobre esta última sin resbalar.

De todos los procedimientos que se conocen para la investigacion de este problema, el de Descartes es el más preferible como el más sencillo y general.

Supónganse dos polígonos, uno fijo y otro móvil, con la particularidad de tener los lados respectivamente iguales, á fin de que el móvil se pueda ir aplicando sucesivamente sobre el fijo; si suponemos un punto invariablemente unido al polígono móvil, describirá una série de arcos de circunferencia que tendrán por centros respectivos los diferentes vértices del polígono fijo; la normal á uno cualquiera de estos arcos pasará por el vértice comun de los dos polígonos. Ahora, si los lados de los dos polígonos disminuyen más y más, hasta confundirse con elementos de las curvas dadas, no dejará de persistir el principio anterior, es decir, que la normal á la curva, límite de todos los arcos de círculo que habíamos concebido, vendrá representada por la recta que une el punto dado en la posicion que se considera con el punto de contacto de las dos curvas dadas, cuyo punto hace las veces de vértice comun alrededor del cual el polígono infinitesimal móvil gira alrededor del fijo.

Una vez hallada la normal, se tendrá la tangente, trazando por la posicion particular del punto dado una perpendicular á la normal.

Este principio se aplica á curvas cualesquiera; pero téngase presente que tan sólo sirve para determinar la tangente en un punto dado, y nada respecto del rádio de curvatura de la curva que vá describiendo el punto invariable unido á la curva móvil. Vamos, pues, á resolver esta segunda parte tan interesante.

Sea U′V′ (fig. 32) la curva móvil que gira sobre la UV, sin resbalar; si suponemos el punto M invariablemente unido á la curva U′V′, resultará que á medida que la curva U′V′ se irá moviendo, tambien se moverá el punto M, describiendo una curva cuyo radio de curvatura se trata de averiguar.

Sea A el punto de contacto de las dos curvas dadas UV y U′V′, correspondiente á una posicion cualquiera del punto M que describe la curva, y cuyo rádio de curvatura se desea determinar.

Sean O y O′, los centros de curvatura de UV y U′V′; por lo que precede, sabemos que AM será la normal á la curva descrita por M; llamemos, pues, n la longitud AM, y φ el ángulo que AM forma con la normal comun á las dos curvas dadas.

Si tomamos sobre las dos curvas UV y U′V′, dos arcos infinitamente pequeños é iguales, AN y AN′, cuando el punto N′ se halle sobre N, el punto M se habrá trasladado, por ejemplo, al M′; entónces la recta MN′ vendrá representada por M′N, cuya recta, prolongada suficientemente, encontrará la prolongacion de MA, determinando en el punto X, por ejemplo, el centro de curvatura del arco MM′; esto en el concepto de ser AN y AN', además de iguales, elementos infinitamente pequeños de las dos curvas dadas.

Segun estos preliminares, podemos pasar inmediatamente á determinar analíticamente el rádio de curvatura MX, que designarémos por ρ.

El movimiento lleva el punto N' á N; la tangente de N' sobre la de N; por consiguiente, es preciso que todas las líneas del sistema se inclinen de un ángulo igual al de estas dos tangentes, ó sea, de la suma de los ángulos AO'N'+AON, á fin de que lo que es ahora normal comun OAO', venga á serlo cuando las rectas O'N' y ON estén en línea recta: sabiendo que AN=AN', y que R y R' son los rádios de curvatura de las curvas dadas, la suma de los ángulos de que debe girar la figura vendrá espresada por

$$\frac{AN}{R}+\frac{AN'}{R'}=AN\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right). \quad (1)$$

Si en vez de referirnos ahora al movimiento angular resultante debido á la normal comun para cuando N' coincide con N, nos referimos al movimiento angular de otro punto tal como M, invariablemente unido al movimiento de la curva móvil U'V', se comprende que para que el punto N' coincida tambien con N, es necesario que la cantidad angular del primero y segundo movimiento sea la misma, porque dichos dos movimientos se refieren á la superposicion de los dos puntos N y N', desde la posicion primitiva cuyo punto comun está en A. Luego si la recta N'M toma la posicion M'NX despues del movimiento, será porque se habrá inclinado de un ángulo igual á N'MX+X; mas despreciando los infinitamente pequeños de órdenes superiores, que no tienen influencia sobre los resultados, segun se desprende de la fig. 32; siendo As un elemento de la curva circunferencia, que lo mismo corresponde al centro M, que al X, en el concepto de ser los movimientos infinitamente pequeños, se puede escribir

$$As=MA\times N'MA, \quad As=AN'\cos\varphi=AN\cos\varphi; \quad \text{luego}$$

$$\frac{AN\cos\varphi}{MA}=N'MA.$$

Por otra parte, se puede suponer sin error sensible

$$X \times AX = As = AN \cos\varphi, \quad \text{de donde} \quad X = \frac{AN \cos\varphi}{AX};$$

luego $$N'MA + X = AN \cos\varphi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right),$$

igualando este valor con (1), por lo que hemos esplicado anteriormente resulta:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right) \cos\varphi, \qquad \text{reduciendo}$$

$$\frac{R' + R}{RR'} = \frac{\rho}{\rho n - n^2} \cos\varphi, \qquad \text{de donde}$$

(2) $$\rho = \frac{n^2 (R' + R)}{n(R' + R) - RR' \cos\varphi}, \quad \text{ó bajo otra forma}$$

(3) $$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} - \frac{RR' \cos\varphi}{n^2 (R + R')}.$$

La fórmula (2) puede presentarse tambien de la manera siguiente:

(4) $$\rho = \frac{n(R^{-1} + R'^{-1})}{R^{-1} + R'^{-1} - n^{-1} \cos\varphi}.$$

Si la curva V'U' hubiese sido interior á UV, resultaria:

$$\rho = \frac{n(R^{-1} - R'^{-1})}{R^{-1} - R'^{-1} - n^{-1} \cos\varphi},$$

y si UV fuese interior á U'V', se tendria

$$\rho = \frac{n(R'^{-1} - R^{-1})}{R'^{-1} - R^{-1} - n^{-1} \cos\varphi}.$$

Estas últimas fórmulas se deducen fácilmente de la (4), en el concepto de que si la convexidad de la curva UV gira en sentido contrario de lo que espresa la fig. 32, es preciso cambiar $+R$, en $-R$; sucediendo lo propio respecto al valor de R'; en cuanto al rádio de curvatura del punto M, si el centro X se halla al mismo lado que M, será preciso cambiar $+\rho$ en $-\rho$.

Las fórmulas (2) y (3) dan el rádio de curvatura del lugar M por medio de los rádios de curvatura de las dos curvas dadas en su punto de contacto A, junto con la distancia del punto M al A, y el ángulo que esta recta forma con la normal comun á las dos curvas en dicho punto A.

Los círculos osculadores, en los puntos que se consideran, pueden sustituir á las curvas dadas, pues si bien en este concepto el lugar descrito por el punto M sufre alguna alteracion, no afecta en cámbio á su rádio de curvatura.

Consecuencias.—Si la línea UV es recta, se tiene $R=\infty$, y entónces la fórmula (2) se transforma en

$$\rho=\frac{n^2}{n-R'\cos\varphi}.$$

Si U'V' es una línea recta, ó sea, $R'=\infty$, por razones análogas tendrémos:

$$\rho=\frac{n^2}{n-R\cos\varphi}.$$

Si, además, el punto M está situado sobre la recta móvil, se tiene

$$\varphi=\frac{\pi}{2}; \text{ luego } \rho=n.$$

II.—Aplicaciones á los epiciclóides.

Si las dos curvas dadas UV y U'V', se transforman en circunferencias, en este caso el punto M invariablemente unido á la circunferencia móvil describe una curva, que toma el nombre de epiciclóide plana. Sean O y O' las dos circunferencias dadas (fig. 33) y M el punto que está sujeto á la circunferencia móvil que, para mayor sencillez, supondrémos ser un mismo punto de la circunferencia. El triángulo AMB nos dá $\cos\varphi=\frac{n}{2R'}$; tomando ahora la fórmula general del rádio de curvatura, resultará:

$$\rho=\frac{n^2(R+R')}{n(R+R')-RR'\cos\varphi}=\frac{n^2(R+R')}{n(R+R')-RR'\frac{n}{2R'}}=\frac{2n(R+R')}{R+2R'},$$

dividiendo el numerador por el denominador resulta

$$\rho=n+\frac{nR}{R+2R'}.$$

Este resultado nos facilita una construccion para hallar gráficamente el centro de curvatura, y para lo cual basta trazar el diámetro MM_1; luégo la recta M_1O; y el encuentro de esta recta con la prolongacion de MA nos dará en X el punto pedido.

En efecto, la cuerda BM_1, siendo paralela é igual á MA, dá orígen á la proporcion

$$AX:BM_1::AO:BO, \text{ ó sea, } AX:n::R:R+2R'; \quad \text{luego}$$

$$AX=\frac{nR}{R+2R'}, \text{ de donde, } MX=n+\frac{nR}{R+2R'}=\rho,$$

conforme nos habíamos propuesto demostrar.

Si R es infinito, la curva que traza el punto M es una ciclóide, resultando $\rho=2n$, conforme debia suceder segun la teoría de esta curva.

Si $R=-2R'$, se encuentra $\rho=\infty$, lo que nos dice que la epiciclóide se transforma en una línea recta.

El punto M, si en lugar de estar sobre la circunferencia móvil, está en el interior ó esterior de la misma, describe una epiciclóide achatada ó prolongada, cabiendo en dichas curvas las mismas consideraciones del caso anterior.

Se puede hallar tambien la ecuacion de la epiciclóide por medio de dos ejes coordenados.

Si se toma por eje de las x la recta que junta los centros de las circunferencias dadas en el momento en que el punto que describe la epiciclóide se halla sobre la línea de los centros (fig. 34), la curva epiciclóide podrá estar representada por las ecuaciones siguientes:

$$x=(r+r)'\cos u-r'\cos\frac{r+r'}{r'}u$$

$$y=(r+r)'\operatorname{sen} u-r'\operatorname{sen}\frac{r+r'}{r'}u,$$

en el concepto de representar r y r' los rádios respectivos de las dos circunferencias, y φ el ángulo que forma el eje de las x con la segunda posicion de la línea de los centros.

Sea, pues, OO' el eje x; b el punto de la epiciclóide en la segunda posicion; Om y mb las coordenadas ortogonales que se buscan; luego

$$mO=nO-nm=(r+r')\cos u-nm. \qquad (1)$$

Ahora $nm = bc = ab \cos abc$, empero si la recta ad es paralela al eje de las x, se puede escribir

$$abc = dab = daf + fab = u + fab;$$

pero como fb debe ser igual á fs, se tiene:

$$r : r' :: fab : u; \text{ luego } fab = \frac{ur}{r'};$$

así tendrémos: $nm = r' \cos\left(u + \frac{ru}{r'}\right) = r' \cos\left(\frac{r+r'}{r'}\right)u$, y

sustituyendo, por fin, este valor en (1), se obtiene:

$$mO = x = (r+r')\cos u - r' \cos \frac{r+r'}{r'} u.$$

El valor de y se hallaria por un procedimiento semejante:

$$y = bm = an - ac = (r+r') \operatorname{sen} u - r' \operatorname{sen} \frac{r+r'}{r'} u.$$

En estas fórmulas r' tendrá el signo $+$ si las circunferencias r y r' son esteriores; el signo $-$ en caso contrario.

III.—La evoluta de una epiciclóide debe ser otra epiciclóide semejante á la primera.

Sea A la posicion primitiva de la epiciclóide (fig. 35), lo que supone que MB=0, y que el punto X coincide con el mismo punto A. Supongamos que el desarrollo de toda la semi-circunferencia móvil sobre la fija equivalga al arco AE; entónces el punto M vendrá á M′, es decir, á su distancia máxima $R + 2R'$ respecto al centro O; resultando lo propio respecto de Ex, representante de la distancia de la circunferencia fija al centro de curvatura en sentido de la normal á la epiciclóide: esta distancia por lo dicho anteriormente sabemos que viene dada por $\left(\frac{nR}{R+2R'}\right)$, y como n tiene el máximo valor, resulta tambien el máximo para Ex; lo que equivale á un mínimo para Ox.

El valor Ex, en el caso particular que nos ocupa, será $\left(\frac{2RR'}{R+2R'}\right)$; luego $Ox = OE - xE = R - \frac{2RR'}{R+2R'} = \frac{R^2}{R+2R'}$.

Supóngase ahora $Ox=r$, $xE=2r'$, y resultará

$$r=\frac{R^2}{R+2R'},\quad r'=\frac{RR'}{R+2R'},$$

de cuyas fórmulas se deducen las relaciones notables:

$$\frac{r}{R}=\frac{R}{R+2R'},\quad \frac{r'}{R'}=\frac{R}{R+2R'};\qquad \text{luego}$$

(1) $\qquad r:R::r':R'$, ó tambien, $r:r'::R:R'$.

Esto supuesto, si con el rádio $Ox=r$ trazamos una circunferencia, y con $BF=xE$ considerado como diámetro describimos otra circunferencia, cuyo rádio sea r' verémos cómo el centro de curvatura X respecto al punto M de la epiciclóide, pasa por un punto de la circunferencia de rádio r'.

Prolongando la recta MB hasta en X, por ser los triángulos MBS y BtX semejantes, dan

$$\frac{BX}{MB}=\frac{r'}{R'};\ \text{mas como}\ \frac{r'}{R'}=\frac{R}{R+2R'},\qquad \text{resulta}$$

$$\frac{BX}{MB}=\frac{R}{R+2R'};\ \text{luego}\ BX=\frac{nR}{R+2R'},\qquad \text{de donde}$$

$$MB+BX=n+\frac{nR}{R+2R'}:$$

espresion que corresponde á la del rádio de curvatura; de modo que el punto donde la prolongacion de la recta MB encuentra á la circunferencia de rádio r', es el centro de curvatura de la epiciclóide respecto al punto M, y de consiguiente un punto de la evoluta pedida.

Ahora nos falta ver cómo este punto X se puede suponer de otra epiciclóide engendrada bajo condiciones especiales.

Los arcos BX y MB son semejantes por comprender una misma cantidad angular, y por lo tanto son proporcionales con sus rádios r', R', ó tambien con r, R, segun lo demostrado en (1). Tomando ahora los arcos suplementarios debe realizarse la misma proporcion, ó sea $XF:BD::r:R$; pero BD=BE, supuesto que por hipótesis se tiene MBD=ABE, y AB=MB; así, pues, tendrémos $XF:BE::r:R$; además los arcos Fx y BE son proporcionales con sus rádios, es decir, que $Fx:BE::r:R$; comparando, por fin, esta proporcion con la anterior, se tiene $XF = xF$: de donde resulta que el punto X está constantemente sobre una epicicloide descrita por un punto de la circunferencia de círculo de rádio r', que gira sobre el círculo de rádio r, partiendo dicha epicicloide del punto x.

De estas consideraciones se deduce que el punto de retroceso de esta epicicloide evoluta, corresponde al punto máximo de la envolvente, y recíprocamente. Los dos nuevos círculos r y r', forman un sistema semejante al de los círculos R, R'; y las dos epicicloides resultantes son semejantes, siendo la razon de semejanza

$$\frac{r}{R}, \text{ ó sea, } \frac{R}{R+2R'}.$$

IV.—Cámbio contínuo sobre un plano de una figura dada.

Hemos visto que el movimiento más general de un sólido, presentando un punto fijo, se reduce á una rotacion efectuada alrededor de una recta á la cual se le ha dado el nombre de eje instantáneo. Empero, si el punto fijo se trasporta al infinito, todos los puntos del sólido van á describir líneas planas, y entónces podrémos decir que todas las veces que una figura plana cámbia sin deformarse en su plano, su movimiento se reduce á una rotacion efectuada alrededor de un punto fijo, que se llama centro instantáneo de rotacion.

Consideremos uno de esos movimientos de rotacion infinitamente pequeños respecto de una figura plana. Sea M'N' (fig. 36) la posicion ocupada por MN, cuando la figura sufre un cámbio infinitamente pequeño: tracemos las perpendiculares medias á las rectas MM' y NN'; el punto O de interseccion situado á una distancia finita ó infinita, servirá de centro de rotacion para llevar la figura de la primera á la segunda posicion segun el ángulo MOM'; de donde resulta que MM' será un elemento de curva descrito por un punto cualquiera de la figura móvil, siendo PO su normal; luego:

Las normales á las curvas descritas por los puntos de la figura móvil pasan en un mismo instante por un punto fijo, tal como O′, ó sea, el centro instantáneo de rotacion.

Si desde el punto O, trazamos las perpendiculares, ó normales á las rectas MN y M′N′, se tendrá OR=OR′ y MOM′=ROR′; luego la recta OR caerá sobre OR′, cuando MN haya coincidido con M′N′; de suerte que el punto R describirá un elemento de la envolvente de la recta MN, en el supuesto de ser el ángulo de que gira la figura muy pequeño.

Supongamos ahora un número indefinido de posiciones del sistema, las cuales se vayan estrechando más y más; podrémos pasar siempre de una posicion á su inmediata por una simple rotacion alrededor de un punto fijo. Los centros sucesivos son distintos en cantidades tanto más pequeñas cuanto más próximas son las posiciones; y juntándolos por medio de rectas, se formará un polígono determinado y fijo.

Si consideramos ahora los puntos ligados al sistema móvil que vienen sucesivamente á coincidir con los vértices de este polígono, tendrémos un polígono móvil que formará parte del sistema; de consiguiente, si los lados de este último polígono móvil son respectivamente iguales á los del polígono fijo, constituido éste por los diferentes centros de rotacion instantáneos, se podrá hacer pasar el sistema por todas las posiciones intermedias que se han escojido, haciendo rodar tan sólo el polígono ligado del sistema sobre el otro polígono fijo.

Si las posiciones se multiplican indefinidamente, el movimiento se irá acercando al movimiento contínuo que hemos supuesto en un principio, y por consiguiente los dos polígonos anteriores tienden hácia curvas determinadas; de suerte que el movimiento dado, cualquiera que sea éste, puede realizarse, suponiendo una cierta curva ligada al sistema móvil, junto con otra que permanezca fija, en el supuesto de que la primera ruede sobre la segunda sin resbalar.

M. Chasles, apoyándose más ó ménos en estos principios, ha deducido un método muy fácil para trazar una normal, y, por consiguiente, luégo una tangente á la trayectoria de un punto cualquiera del sistema, cuando se conozcan las tangentes á las trayectorias de dos de sus puntos. En efecto, el punto de contacto de la curva fija y móvil constituye el centro instantáneo de rotacion, el que unido con el dado dá la normal en dicho punto, y luégo la tangente; así, si conocemos dos tangentes, trazando las normales tendrémos en su punto de encuentro el centro instantáneo de rotacion, á pesar de no conocer el punto de contacto entre la curva fija y móvil, y el problema quedará reducido al caso anterior.

Casos particulares:

1.º Supongamos que una recta de longitud constante se mueve de manera que sus estremidades permanezcan sobre dos rectas dadas; por la teoría anterior será fácil determinar la tangente á la elipse que describe un punto de la recta dada, pues atribuyendo un pequeño movimiento á dicha recta, recorrerán sus puntos estremos dos elementos de las rectas sobre las cuales resbala, de modo que las perpendiculares trazadas á estas dos rectas en dicha posicion, fijarán el centro instantáneo en el momento que se considere; ahora, uniendo este punto con el dado de la recta móvil, tendrémos la direccion de la normal á la elípse en dicho punto, y luégo la tangente.

2.º Si en lugar de las dos rectas fijas, consideramos dos curvas, para determinar la tangente en un punto de la trayectoria que describe un punto de una recta de longitud constante, que vaya resbalando sobre las curvas dadas, no habrá más que trazar las normales á dichas dos curvas con la condicion de que pasen por los estremos de la recta dada en la posicion particular que se le atribuya, y el punto de interseccion será el centro de rotacion instantáneo, el cual bastará unir con el punto dado de la recta móvil para tener la direccion de la normal á la trayectoria, y en su virtud luégo la tangente. En caso de ser las curvas dadas dos circunferencias, se simplifica mucho el problema, pues con facilidad se trazan entónces las dos normales á las curvas dadas en la posicion particular que se considere, siendo este caso particular de alta trascendencia para ciertos movimientos aplicados á las máquinas.

3.º Sea una línea recta que se mueve de modo que pase constantemente por un mismo punto M (fig. 37); resbalando el punto A sobre la recta BC, la estremidad de la recta MAD, ó sea, el punto D, traza una curva llamada conchoide; pues si suponemos un pequeño movimiento en la posicion particular que ocupa la recta MAD, el punto A describirá un elemento de la recta BC, y el punto M un elemento de MA; luego bastará trazar por los puntos A y M perpendiculares respectivas á BC y MA, para determinar el punto O, el cual, unido con D, dará la direccion de la normal á la conchoide en dicho punto, siendo EF perpendicular á OD, la tangente respectiva.

4.º Sean dos rectas rectangulares AC, Cz (fig. 38); tómense dos longitudes iguales CB y BA, y hágase mover un ángulo recto AVU de manera que VU=AC, y que el punto U se apoye constantemente sobre Cz, y que el lado VA pase siempre por el punto fijo A; el punto M, mitad de UV, describirá una cisóide, empezando en B, y teniendo por asíntota la paralela á Cz, á una distancia CB′=CB.

Esto supuesto, para trazar la tangente en M, bastará elevar en U una perpendicular á la recta Cz; y en A una perpendicular á AV; el punto de encuentro de estas rectas será el centro instantáneo, el cual unido con M, dará la normal á la cisóide en dicho punto.

5.º Para determinar la normal en un punto del lugar geométrico descrito por el vértice de un ángulo recto cuyos lados son tangentes á una elipse, basta trazar perpendiculares á los lados del ángulo en cada uno de los puntos de contacto, juntando luégo su punto de encuentro con el vértice del ángulo móvil.

Esta normal vendrá en direccion de una diagonal de un rectángulo, que tendrá por segunda diagonal la cuerda de contacto de las dos tangentes á la elipse en la posicion particular que se suponga; dicha normal, pues, pasará por el punto medio de la cuerda de contacto, dirigiéndose hácia el centro de la elipse.

Supuesto que todas las normales al lugar en cuestion pasan por el centro, se infiere que el lugar geométrico de los diferentes vértices del ángulo recto en movimiento debe ser una circunferencia de rádio $\sqrt{a^2+b^2}$, representando a y b los dos ejes de de la elipse.

Los mismos razonamientos se aplicarian inmediatamente para la hipérbola; mas ese problema no es siempre posible, pues en el caso particular de la parábola, las normales al lugar considerado son paralelas al eje, viniendo representado dicho lugar geométrico por la directriz de la parábola.

Aclaraciones acerca lo que precede.—Para que el lector no tenga que ir á sacar el polvo de varios libros, y pueda refrescar la memoria, por si acaso se le han olvidado los principios de la Geometría analítica en que se funda todo lo que precede, ponemos lo que sigue como via de paréntesis.

Determinemos primero la fórmula general de la tangente á la elipse. Sábese que la elipse tiene por espresion $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; sea la recta $y=mx+n$; determínense los valores m y n, para que dicha recta sea tangente á la elipse; si eliminamos y entre las dos ecuaciones anteriores, resulta:

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2mn\,a^2x+a^2(n^2-b^2)=0.$$

Si la recta que se considera debe ser tangente, el último valor hallado debe representar un cuadrado perfecto, y para esto se necesita que el cuadrado de la mitad del segundo término sea igual al producto de los dos términos estremos; luego

$$a^4m^2n^2-(a^2m^2+b^2)a^2(n^2-b^2)=0,$$

de donde $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$; así la ecuacion de la recta primera se transforma en $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

Si se trata de la parábola $y^2=2px$, se tiene procediendo como ántes:

$$m^2x^2+2(mn-p)x+n^2=0.$$

Y por razones análogas al caso anterior, se deduce:

$$y=mx+\frac{p}{2m}.$$

Con estos datos podemos pasar á resolver los problemas siguientes:

Hallar el lugar descrito por el vértice de un ángulo dado que permanece constantemente circunscrito á una elipse determinada por la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ecuaciones de las dos tangentes

(1) $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$, (2) $y=m'x+\sqrt{a^2m'+b^2}$.

Si estas tangentes forman el ángulo α, se tiene:

$$tg\,\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

Si se consideran las ecuaciones (1) y (2) simultáneas, x é y representarán las coordenadas del punto de interseccion de las dos tangentes, ó del vértice del ángulo móvil.

De la ecuacion (1) resulta:

$$(a^2-x^2)m^2+2xym+b^2-y^2=0.$$

La ecuacion (2) nos daria un resultado semejante, sólo que la m se transformaría en m'; luego m y m' se pueden considerar como raices de la misma ecuacion; de suerte que $m+m'=-\frac{2xy}{a^2-x^2}$ y $mm'=\frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}$; empero como $(m-m')^2=(m+m')^2-4mm'$, resulta $m-m'=\sqrt{(m+m')^2-4mm'}=\sqrt{\frac{4x^2y^2}{(a^2-x^2)^2}-\frac{4(b^2-y^2)(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2}}$

$$=\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{a^2-x^2}.$$

Por último, se obtiene:

$$tg\,\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{a^2-x^2+b^2-y^2}.$$

Si el ángulo α es recto, se debe suponer $x^2+y^2=a^2+b^2$.

Luego el lugar geométrico descrito por el vértice de un ángulo recto circunscrito á una elipse, es pues una circunferencia que tiene el mismo centro que dicha elipse, y por rádio $\sqrt{a^2+b^2}$; es decir, una circunferencia circunscrita al rectángulo construido sobre los ejes de la elipse.

Pasemos á la parábola.—Hallar el lugar geométrico descrito por el vértice de un ángulo determinado, cuyos lados permanecen constantemente tangentes á una parábola dada.

Sea la ecuacion de la parábola $y^2=2px$; las ecuaciones de las tangentes

$$(1) \quad y=mx+\frac{p}{2m}$$

$$(2) \quad y=m'x+\frac{p}{2m'}.$$

Si dichas tangentes forman el ángulo α, se tendrá:

$$(3) \qquad tg\,\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}.$$

De la ecuacion (1) se obtiene:

$$2m^2x-2my+p=0.$$

Una cosa análoga nos daria la ecuacion (2), y por lo que ya se manifestó en el caso de la elipse, se deduce:

$$m+m'=\frac{y}{x},\quad mm'=\frac{p}{2x};$$

y como $m-m'=\sqrt{(m+m')^2-4mm'}=\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-\frac{4px}{2x^2}}=\frac{\sqrt{y^2-2px}}{x}$; luego la ecuacion (3) se reduce á

$$tg\,\alpha=\frac{\frac{\sqrt{y^2-2px}}{x}}{1+\frac{p}{2x}}=\frac{2\sqrt{y^2-2px}}{2x+p}.$$

Si el ángulo α es recto, se tiene

$$2x+p=0,\quad ó\quad x=-\frac{p}{2}.$$

De modo que el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos circunscritos á una parábola, viene representado por la directriz de la curva.

Nota.—Hemos dicho que la normal al lugar descrito por el vértice P del ángulo recto circunscrito á la elipse, pasa por el punto medio de la cuerda ab (fig. 39) y por el centro O; esto se esplica considerando la elipse como proyeccion de una circunferencia cuyo diámetro sea igual al eje mayor de la elipse. De este modo resulta que todos los puntos y rectas de la elipse son proyecciones de las líneas respectivas de la circunferencia que la engendra como proyeccion sobre un plano. En la circunferencia, si desde un punto esterior se trazan dos tangentes á la misma, uniendo el punto dado con el punto medio de la cuerda que une los dos puntos de tangencia, debe resultar una recta perpendicular á la cuerda, pasando dicha perpendicular por el centro de la circunferencia; luego como las proyecciones de las tangentes á la circunferencia sobre el plano de la elipse se transforman en aP y Pb, la recta Pn, siendo n el punto medio de ab, será la proyeccion de la recta del círculo que une el punto comun de las dos tangentes con el punto medio de la recta que une los puntos de tangencia de las dos tangentes dadas; y como esta recta hemos dicho que pasa por el centro del círculo, tendrémos que la recta Pn deberá forzosamente pasar por el centro de la elipse, supuesto que el centro de la elipse no es más que la proyeccion del centro de la circunferencia dada.

V.—De la envolvente de una curva de forma invariable ligada á una curva que rueda sobre otra.

Sea HMK (fig. 40) la curva que debe engendrar la envolvente; M el punto donde ella toca á la envolvente.

Los puntos de contacto entre la curva HMK y la envolvente, cambian de una manera contínua; de suerte que el punto M de HMK está situado sobre H'M'K' á una distancia infinitamente pequeña de M'; la distancia á la envolvente será una cantidad infinitamente pequeña de segundo órden; luego la curva H'M'K' es tangente á UV en M', de donde resulta que con el pequeño movimiento de la curva HMK, el punto M describe un elemento de la envolvente UV, cuya conclusion se puede resumir del modo siguiente: Los puntos donde una curva móvil invariable toca á su envolvente en una cualquiera de sus posiciones, son los que describen trayectorias tangentes á la curva móvil en la posicion que se considera.

Luego la trayectoria de un punto ligado á la curva que rueda, tiene su tangente perpendicular á la recta que junta el punto que se considera con el centro instantáneo de rotacion, siendo este centro, como ya sabemos, el punto de contacto de la curva que rueda con la curva fija.

Con estos principios, es posible determinar ya ciertas envolventes de líneas invariablemente ligadas á una curva que rueda sobre otra.

Ejemplo.—Dado un círculo cuyo centro es O′ (fig. 41) que rueda sobre un círculo fijo O; determinar la envolvente de un diámetro del círculo O′, tal como BB′.

Sea M el punto del círculo O que coincide con B en la primera posicion de la circunferencia O′; luego los arcos AB y AM son iguales: para tener ahora el punto del diámetro BB′ que en la posicion presente coincide con su envolvente, bastará, segun lo esplicado, trazar del punto A una perpendicular á dicho diámetro, y el punto C será el pedido; empero si se describe una circunferencia, tomando por diámetro O′A, fácil es ver que los arcos AB y AC son iguales; luego el punto C pertenece á una epiciclóide descrita por una circunferencia de diámetro AO′, que rueda sobre el círculo fijo: esta epiciclóide es, pues, la envolvente pedida.

Otro ejemplo.—Consideremos ahora la envolvente de una recta de longitud constante cuyas estremidades estén sujetas á permanecer sobre dos curvas dadas.

Trácense las normales á las dos curvas en las estremidades de la recta correspondiente á la posicion particular que se suponga; luégo del punto de interseccion, ó sea del centro instantáneo, bájese una perpendicular á la recta dada y se tendrá un punto de la envolvente; y como éste todos los demás.

Si las dos curvas se reducen á dos rectas perpendiculares, resulta un caso notable que creemos del caso estudiar. Una recta BC (fig. 42) de longitud constante K, se mueve de manera que sus estremidades permanecen sobre los lados del ángulo recto YAX; se pide la curva á la cual ella es siempre tangente.

Podemos seguir dos métodos: uno geométrico y otro analítico: vamos á ver cómo por los dos llegamos á una misma ecuacion, correspondiente á la curva llamada *cardioïde.*

Método geométrico.—Dos cuestiones se presentan aquí: primera, determinar el límite del punto de encuentro de una cualquiera de estas rectas con la que le corresponde á una distancia infinitamente próxima; segunda, determinar el lugar de estos puntos límites que establecen la ecuacion de la envolvente que se busca.

Para resolver la primera parte supondrémos una posicion infinitamente próxima á la recta BC (fig. 42), tal como la B'C': dichas rectas se cortan en el punto n, y se trata de hallar el límite I, de este punto variable n; si haciendo centro en n, describimos dos arcos B'D y CE, resultará, segun la hipótesis, BD=EC'; de donde

$$B'D = BD \times tg B, \quad CE = EC' \times tg C' = BD \times \cot B;$$

así, pues,
$$\frac{B'D}{CE} = \frac{tg B}{\cot B} = tg^2 B. \qquad (a)$$

Ahora, la relacion $\frac{Bn}{nC}$ se transforma en $\frac{Dn}{nC}$ cuando $\frac{Bn}{nC}$ se esprese por su límite $\frac{BI}{IC}$; luego $\frac{BI}{IC} = \frac{Dn}{nC}$.

Mas de los triángulos semejantes B'Dn y nEC, se infiere

$$\frac{Dn}{nC} = \frac{B'D}{CE}; \quad \text{de donde} \quad \frac{BI}{IC} = \frac{B'D}{CE};$$

y segun la igualdad (a) se tiene, por fin,

$$\frac{BI}{IC} = tg^2 B.$$

Considerando ahora el triángulo ABC, resulta:

$$AC = AB \times tg B \text{ ó sea } \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = tg^2 B; \qquad \text{luego}$$

$$(b) \qquad \frac{BI}{IC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Por otra parte, si desde A trazamos la perpendicular á BC, tal como AP, se tendrá:

$$\overline{AB}^2=BC\times BP;\quad \overline{AC}^2=BC\times PC;$$

sustituyendo estos valores en (*b*), se tiene:

$$\frac{BI}{IC}=\frac{PC}{BP};\quad \text{ó sea}\quad \frac{BI+IC}{IC}=\frac{PC+BP}{BP};$$

y como los numeradores son iguales, resulta

$$IC=BP.$$

Este resultado permite determinar inmediatamente dicho punto I, pues basta tomar desde C una cantidad igual á BP; ó tambien, completando el rectángulo ABFC, trazar desde F una perpendicular á BC, para tener directamente el punto I; este resultado es muy notable y está conforme con todo lo que precede respecto de la envolvente de una línea móvil; pues el punto F debe ser el centro de rotacion de la recta móvil BC, segun lo demostrado en otra parte; así es, que si desde este punto trazamos una perpendicular á la recta BC, ó bajo otros términos más generales, si desde el punto F trazamos la normal á la línea móvil que se considera, el punto I de encuentro debe corresponder á la envolvente, conforme hemos hallado ya.

Ecuacion de la envolvente.—De la figura 42, se desprende con facilidad por los triángulos semejantes que se forman, designando por x é y las coordenadas del punto I, las siguientes proporciones:

$$\frac{x}{AC}=\frac{BI}{BC};\quad \frac{y}{BA}=\frac{IC}{BC};\qquad \text{luego}$$

$$(1)\quad x=\frac{AC\times BI}{BC}\qquad (2)\quad y=\frac{BA\times IC}{BC};$$

mas anteriormente hemos hallado $\frac{BI}{IC}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$; si suponemos $BI+IC=K$, podrémos deducir:

$$BI+\frac{\overline{AB}^2\times BI}{\overline{AC}^2}=K;\quad BI(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=K\times\overline{AC}^2,$$

ó sea, $BI\times K^2=K\times\overline{AC}^2$; de donde $BI=\frac{\overline{AC}^2}{K}$.

Por consideraciones análogas se obtiene:

$$IC=\frac{\overline{AB}^2}{K}.$$

Luego sustituyendo los valores de BI é IC en (1) y (2), tendrémos:

$$x=\frac{\overline{AC}^3}{K^2};\quad y=\frac{\overline{AB}^3}{K^2};\quad \text{ó sea}\quad \begin{cases} AC=K^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} \\ AB=K^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

De la figura resulta tambien $AC^2+AB^2=K^2$; luego

$$K^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+K^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=K^2;$$

simplificando, por fin, se obtiene:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=K^{\frac{2}{3}}.$$

Ecuacion de la curva llamada cardioïde.

Determinacion de esta ecuacion por medio del análisis.— Para esto hemos de recordar que cuando una ecuacion con dos variables encierra un parámetro ó una constante arbitraria a, esta ecuacion representa una curva que irá variando de forma y posicion conforme vaya variando dicho parámetro; de modo que si a varia por cantidades infinitamente pequeñas, podrémos considerar la posicion de dos curvas inmediatas enteramente próximas, para determinar un elemento de la envolvente, ó sea, de la curva que representa el resultado de las diferentes posiciones de la curva variable.

Es bien fácil despues de esto, obtener las ecuaciones de la curva que hemos llamado envolvente.

En efecto, sea $f(x,y,a)=0$ (1), la ecuacion de la curva variable; para una posicion infinitamente próxima á ésta resulta: $f(x,y,a+da)=0$ (2); eliminando la a entre (1) y (2) se tendrá la ecuacion del lugar; mas es preferible presentar la ecuacion (2) bajo otra forma, ó sea, $\frac{df}{da}=0$ (3), resultado de restar las dos ecuaciones anteriores y dividir la diferencia por da; ahora, de la ecuacion (3) puede deducirse el valor de a, esto es, $a=f'(x,y)$, y sustituyéndolo en (1) se obtiene:

$$f[x,y,f'(x,y)]=0;$$

ecuacion del lugar pedido, ó sea, de la envolvente.

Apliquemos estas consideraciones generales al caso particular que nos ocupa.

La ecuacion de la recta móvil es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (1), representando a y b las longitudes interceptadas á partir del orígen; en este supuesto se tiene $a^2+b^2=K^2$ (2), siendo K la longitud de la recta interceptada entre los ejes coordenados rectangulares.

Para eliminar a y b nos podemos valer de los coeficientes indeterminados, escribiendo las ecuaciones de condicion

$$\alpha\frac{x}{a^2}=a; \quad \alpha\frac{y}{b^2}=b; \tag{3}$$

sumando estas dos ecuaciones despues de haberlas multiplicado respectivamente por a y b, se tendrá

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=a^2+b^2;$$

pero, segun las igualdades anteriores, tendrémos $\alpha=K^2$.

Sustituyendo este valor en (3), resulta $a^3=K^2x$, $b^3=K^2y$, ó sea,

$$a^2=K^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}, \qquad b^2=K^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}};$$

sumando estas dos igualdades y comparando el resultado con la ecuacion (2), se obtiene definitivamente

$$K^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}.$$

Fórmula exactamente igual á la que ya habíamos hallado por el otro procedimiento.

Observaciones notables acerca lo que precede.

1.ª *observacion.*—Determínese la envolvente de las diferentes elipses representadas por la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(K-a)^2}=1. \tag{1}$$

En esta ecuacion, la K representa la magnitud constante de una recta que se mueve apoyándose sobre los ejes coordenados; y a espresa una parte cualquiera de dicha recta K, á contar desde uno de sus estremos.

Segun los principios precedentes, aplicándolos á la fórmula anterior, resulta:

$$\frac{df}{da}=\frac{x^2}{a^3}-\frac{y^2}{(K-a)^3}=0,\qquad \text{luego}$$

$$K-a=\frac{ay^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},\qquad \text{de donde}$$

$$a=\frac{Kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}},\quad \text{y}\quad K-a=\frac{Ky^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}};$$

sustituyendo estos valores en (1), se obtiene despues de simplificar:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=K^{\frac{2}{3}};$$

fórmula exactamente igual á la que hallamos anteriormente.

Digno de análisis es este resultado, pues la ecuacion (1) representa las diferentes elipses de ejes variables segun el valor de a, siendo K constante; de suerte que suponiendo las diferentes elipses engendradas por los varios puntos de la recta K, moviéndose sobre los dos ejes, resulta que dichas elipses tendrán una envolvente que no será más que la misma envolvente de la recta K, siendo esta la razon porque las ecuaciones de las envolventes se identifican.

2.ª *observacion.*—El movimiento de la recta AB (fig. 43) sobre los ejes OX y OY, se puede suponer realizado por el movimiento de la circunferencia T sobre la S, segun se desprende fácilmente de la figura y por consideraciones anteriores. Ahora bien: si tomamos mn, mitad de On, y consideramos esta recta como diámetro de una nueva circunferencia, resultará $R'=\frac{1}{4}R$, llamando R′ el rádio de la circunferencia O′, y R el rádio de la circunferencia O; empero el arco nC es igual al arco nB, como es fácil de comprender; por igual razon resulta que el arco nB es igual á ND: luego el punto C es el punto D, despues de haber girado la circunferencia menor dentro de la mayor sin resbalar; mas, por otra parte, se tiene que nC es perpendicular á AB, siendo n el centro de rotacion instantáneo; así, segun lo esplicado anteriormente, el punto C debe pertenecer á la curva llamada cardioïde; deduciéndose, por fin, de todo esto que la epiciclóide descrita por un punto de una circunferencia que gira sin resbalar en el interior de otra, que tiene el rádio cuádruplo de la primera, no es más que una cardioïde, ó sea, la envolvente de todas las elipses descritas por los diferentes puntos de una recta igual á R, que se mueve, resbalando por los ejes OX y OY.

Adviértese, segun la observacion anterior, que las elipses descritas por los diferentes puntos de la recta R, vienen sintetizadas por la ecuacion general $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(R-a)^2}=1$; siendo a una cantidad variable entre 0 y R.

VI.—Rádio de curvatura de la envolvente de una curva de forma invariable ligada á una curva que rueda sobre otra.

Sea AB (fig. 44) la curva fija; CD la móvil, la cual lleva la curva EF, cuya envolvente es E'F'. Sea M el punto de contacto de AB y CD en una posicion dada; O y O' los centros de curvatura respectivos de las curvas dadas AB y CD; R y R' los rádios de curvatura respectivos; n la longitud de la normal MN_1 trazada de M á EF; y, por fin, φ el ángulo que dicha normal forma con la normal comun O'MO á las dos curvas AB y CD.

Segun lo esplicado anteriormente, se comprende que el punto N_1 corresponda á la envolvente de EF; determinemos, pues, ahora, á dónde irá á parar un punto de dicha envolvente infinitamente próximo al primero en el supuesto de que la curva CD gire sin resbalar sobre AB, y en el supuesto de llevar en su movimiento á la curva EF invariable.

Para ello tomemos sobre AB y CD, dos arcos iguales infinitamente pequeños, tales como MN y MN′, que designarémos por ω; N′I se supone ser la normal á la curva EF desde el punto N′: cuando en el movimiento de CD el punto N′ venga á coincidir con N, el punto B'_1 de EF vendrá á un punto de la envolvente E′F′, tal como B_1, y en este concepto B_1N será la normal comun á EF y E′F′. El punto donde esta recta encuentra la normal infinitamente próxima, tiene por límite el centro de curvatura de la envolvente, tal como X, en el supuesto de representar B_1X la posicion límite. Además, supóngase el punto de encuentro I de las dos normales á EF en los puntos infinitamente próximos N_1 y B_1; I será el centro de curvatura de EF en dicha posicion; luego $N_1I=\rho'$, $N_1X=\rho$, designando por ρ' y ρ los rádios de curvatura respectivos.

Esto supuesto, cuando el punto N sea el punto de contacto, el sistema móvil habrá girado de una cantidad angular igual al ángulo que hacen las dos tangentes en N y N′, siendo M actualmente el punto de contacto: y este ángulo puede espresarse por la suma de MO′N′ y MON, que podemos designar por O+O′, ó sea, $\frac{\omega}{R}+\frac{\omega}{R'}$ (1).

Mas, por otra parte, la línea $N'B'_1I$, coincidiendo con B_1NX, debe girar de la cantidad angular I+X, de donde resulta:

$$O+O'=I+X. \qquad (2)$$

Determinemos ahora los valores de I y X: suponiendo desde M perpendiculares á IN′ y B_1X, puede deducirse

$$I=\frac{\omega\cos\varphi}{n+\rho'}, \qquad X=\frac{\omega\cos\varphi}{\rho-n}.$$

De donde se infiere, en virtud de las igualdades (1) y (2),

$$\frac{\omega}{R}+\frac{\omega}{R'}=\frac{\omega\cos\varphi}{n+\rho'}+\frac{\omega\cos\varphi}{\rho-n}, \qquad \text{y por fin,}$$

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\cos\varphi\left(\frac{1}{n+\rho'}+\frac{1}{\rho-n}\right). \qquad (\alpha)$$

Fórmula que determina ρ por medio de R, R′, ρ', n y φ.

Se vé, pues, que el rádio de curvatura en un punto cualquiera de la envolvente no depende sino de los rádios de curvatura de las tres curvas AB, CD, EF, y no de estas curvas mismas; de suerte que en la posicion particular que se suponga bastará reemplazar dichas curvas por sus círculos osculadores.

De lo que precede podemos deducir uno de los casos estudiados anteriormente, suponiendo $\rho'=0$.

En efecto, la ecuacion (α) se transforma segun este supuesto en

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\rho-n}\right)\cos\varphi,$$

fórmula exactamente igual á la que hallamos ya cuando se trató de determinar el rádio de curvatura de una curva descrita por un punto invariablemente unido á una curva que gira sobre otra sin resbalar.

Además podemos aplicar dicha fórmula (α) al caso particular de ser las curvas AB y CD dos circunferencias, y EF un diámetro del círculo CD, el cual se supone girar sobre AB.

Hemos de suponer R y R′ constantes y $\rho'=\infty$; estos datos reducen la fórmula (α) á la siguiente:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{\cos\varphi}{\rho-n}, \qquad \text{de donde}$$

$$\rho=n+\frac{\cos\varphi}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}},$$

espresando ahora $\cos\varphi$ por medio de n, despues de la relacion evidente $n=R'\cos\varphi$, resulta:

$$\rho=n+\frac{\frac{n}{R'}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}}=\frac{n(2R+R')}{R+R'}.$$

Comparando este resultado con el valor hallado de la epicicloide $\rho=\frac{2n(R+R')}{R+2R'}$, ó sea, $\rho=\frac{n(2R+2R')}{R+2R'}$,

se reconoce que ρ es el rádio de curvatura de una epicicloide descrita por un punto de una circunferencia de rádio $\left(\frac{R'}{2}\right)$ que rueda sobre la circunferencia de rádio R, conforme habíamos hallado ya en otra parte.

VII.—Medida del resbalamiento de la curva móvil sobre su envolvente.

Si el arco N_1B_1 pudiera ser igual á $N_1B'_1$ la curva EF rodaria sin resbalar sobre E'F': mas entonces el sistema móvil deberia girar alrededor del punto de contacto N_1, lo que no puede ser, porque siéndolo tambien M, habria un movimiento de rotacion contra el supuesto, á no ser que se concedieran velocidades nulas para todos los puntos del sistema, lo que es tambien inadmisible segun los datos.

El cálculo nos manifestará que corresponden valores muy distintos para N_1B_1 y N_1B_1: en efecto, se tiene:

$$N_1B_1=\rho X=\frac{\rho\omega\cos\varphi}{\rho-n};\quad N_1B'_1=\rho'I=\frac{\rho'\omega\cos\varphi}{\rho'+n};$$

luego $N_1B_1-N_1B'_1=\omega\cos\varphi\left(\frac{\rho}{\rho-n}-\frac{\rho'}{\rho'+n}\right)=n\omega\cos\varphi\frac{\rho+\rho'}{(\rho-n)(\rho'+n)}$.

Y en virtud de la ecuacion ya hallada

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\cos\varphi\left(\frac{1}{n+\rho'}+\frac{1}{\rho-n}\right),\qquad \text{se obtiene:}$$

$$N_1B_1-N_1B'_1=n\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=n(O+O').$$

Así es como M. Savany determina el arco de resbalamiento cuya consideracion es indispensable en la teoría de las máquinas.

Empero hemos de ver cómo es posible calcular este arco de resbalamiento sin introducir los rádios de curvatura de las dos curvas, y, por consiguiente, sin necesidad de conocer ninguna fórmula. En efecto, ántes de calcular esta fórmula hemos visto que si se toman dos arcos infinitamente pequeños iguales MN y MN' (fig. 44) sobre AB y CD, trazando desde N' una normal $N'B'_1$ sobre EF, y de N una normal NB_1 sobre E'F', el punto B'_1 de la curva móvil viene á tomar la posicion B_1, cuando N' coincide con N: luego los arcos $N_1B'_1$ y N_1B_1, siendo tangentes, el punto B'_1 puede ser considerado como perteneciente al arco N_1B_1, despreciando los infinitamente pequeños de segundo órden; así, pues, se puede tomar $B_1B'_1$ por la diferencia $N_1B_1—N_1B'_1$, ó sea, por el arco de resbalamiento. Pero $B_1B'_1$ tambien puede considerarse como un arco de círculo descrito desde M con el rádio n, para que el sistema gire del ángulo $O+O'$, á fin de llegar á la segunda posicion; luego

$$N_1B_1-N_1B'_1=n(O+O')=n\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Fórmula exactamente igual á la anteriormente ya hallada.

VIII.—Método de Roberval.

El método de este célebre matemático, tiene por objeto trazar tangentes á las curvas, valiéndose de consideraciones análogas á las fluxiones de Newton.

La tangente á una curva, dice, no es más que la direccion de la velocidad de un móvil sujeto á describir esta curva: de manera que si se puede descomponer esta velocidad en varias otras, fáciles de hallar, se podrá determinar la velocidad resultante, y en su virtud la tangente á la curva en cuestion. Tal es el principio del método de Roberval.

Vamos á considerar solamente una aplicacion de este método en la elipse.

Sean F y F' los focos de la elipse (fig. 45), y M un punto cualquiera de la curva; supongamos que un móvil, describiendo la curva, llegue á M á la época t; descompongamos su velocidad en otras dos dirigidas: la una $M\mu$, segun MF; la otra $M\nu$, segun MF': se sabe que $MF+MF'=2a$, siendo $2a$ el eje mayor de la elipse; diferenciando segun t, resulta

$$\frac{dMF}{dt}+\frac{dMF'}{dt}=0;$$

de donde se deduce inmediatamente que las velocidades $M\mu$ y $M\nu$ representadas por $\frac{dMF}{dt}$ y $\frac{dMF'}{dt}$ son iguales: de manera que la velocidad buscada es la diagonal de un rombo que tiene por direccion y sentido de sus lados contiguos: uno, el primer rádio vector, y el otro, la prolongacion del segundo: resultando en virtud de estas consideraciones que la bisectriz exterior del ángulo de los dos rádios vectores debe ser la tangente á la elipse. Este razonamiento aplicado á la hipérbola por Roberval no es muy exacto, por cuanto admite que μ es igual á $\frac{d\text{MF}}{dt}$.

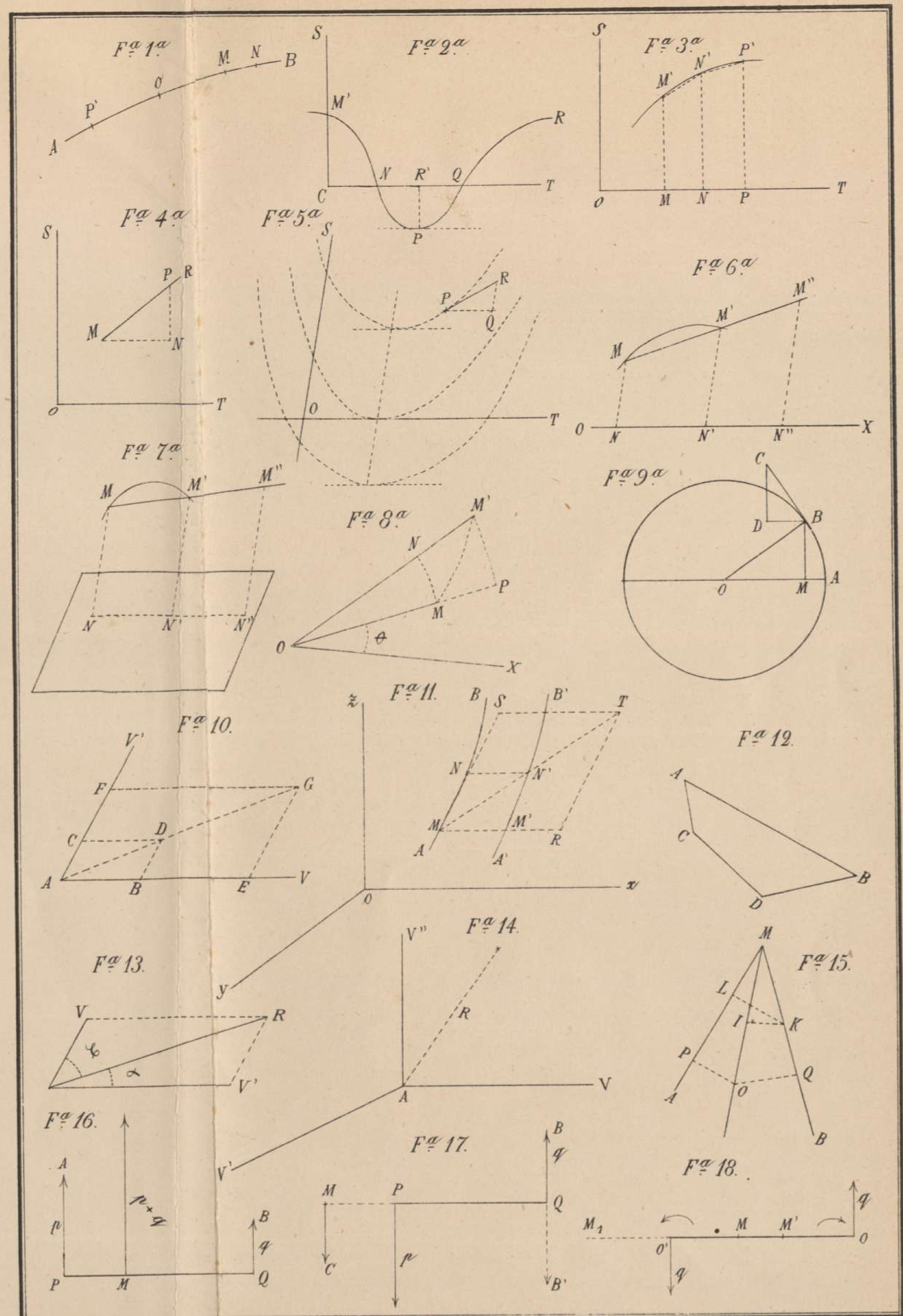
Hé aquí cómo presenta esta cuestion el distinguido Laurent, salvando todas las dificultades.

La velocidad MT que se desea determinar puede considerarse como la resultante de otras dos velocidades (fig. 45): 1.º, de la velocidad $\text{M}\mu = \frac{d\text{MF}}{dt}$ del punto M, segun FM; 2.º, de la velocidad de circulacion μT del rádio FM; mas dicha velocidad MT puede tambien considerarse como la resultante de $\text{M}\nu = \frac{d\text{MF}'}{dt}$, y de la velocidad de circulacion νT, del rádio F′M. Ahora, como $\text{M}\mu = \text{M}\nu$, resulta que los dos triángulos rectángulos MμT y MνT son iguales por tener una misma hipotenusa y un cateto igual: luego MT es la bisectriz exterior del ángulo de los dos rádios vectores.

De un modo parecido podríamos hallar la direccion de la tangente en un punto de la conchoide y de todas aquellas curvas que permiten tomar una suma ó diferencia de distancias á puntos fijos, igual á una cantidad constante, cualquiera que sea la posicion que se suponga para el punto móvil; empero para no estendernos en consideraciones que nos separarian demasiado del fin que nos impulsó al escribir este tratado de Cinemática, daremos fin aquí, en el concepto de que si bien no hemos dado al público una obra estensa de esta ciencia, puede servir ella, no obstante, de un gran auxiliar para los jóvenes que se dedican á carreras especiales y no les queda más tiempo que el necesario para hojear una obrita como ésta.

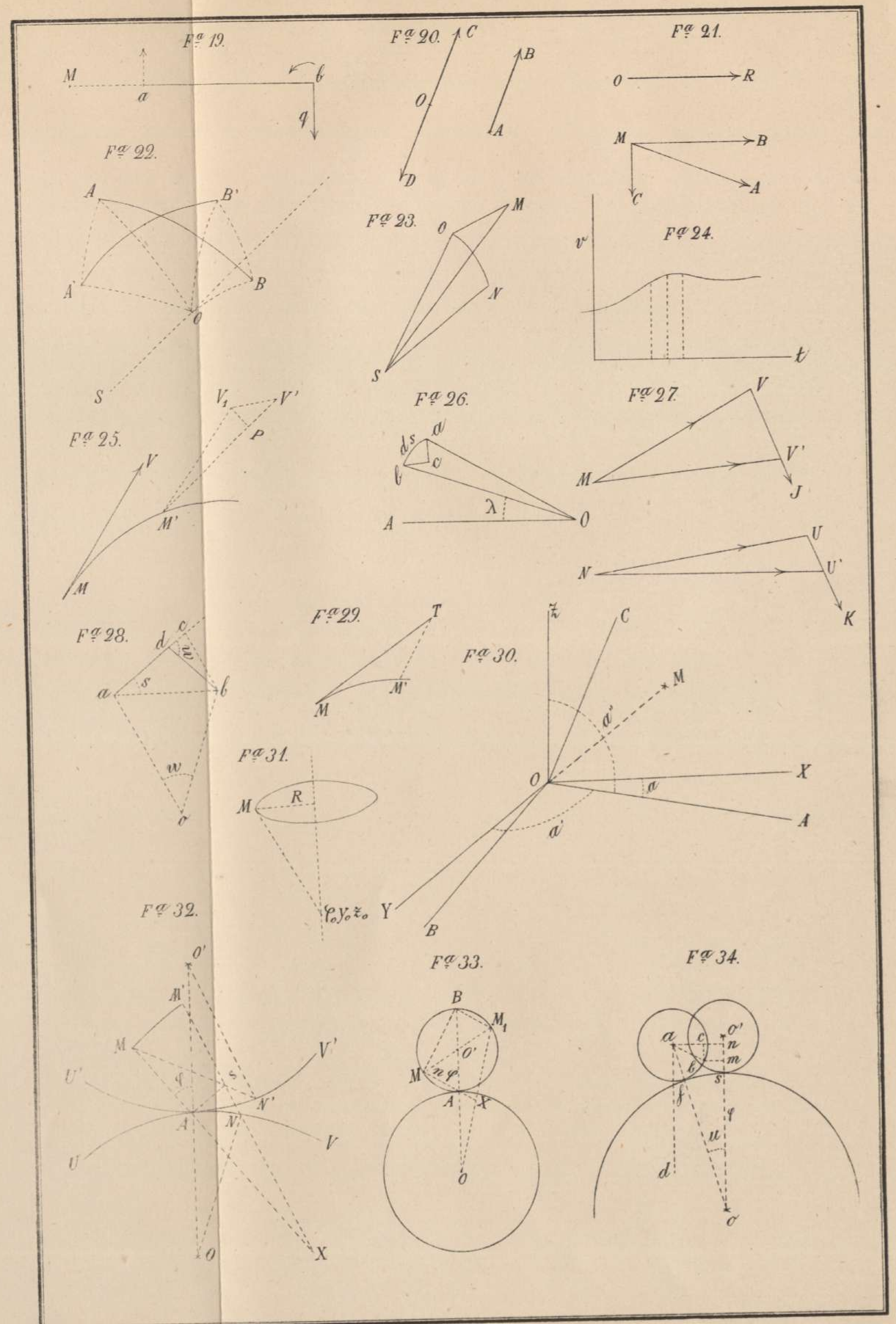
ÍNDICE.

PÁGINAS.

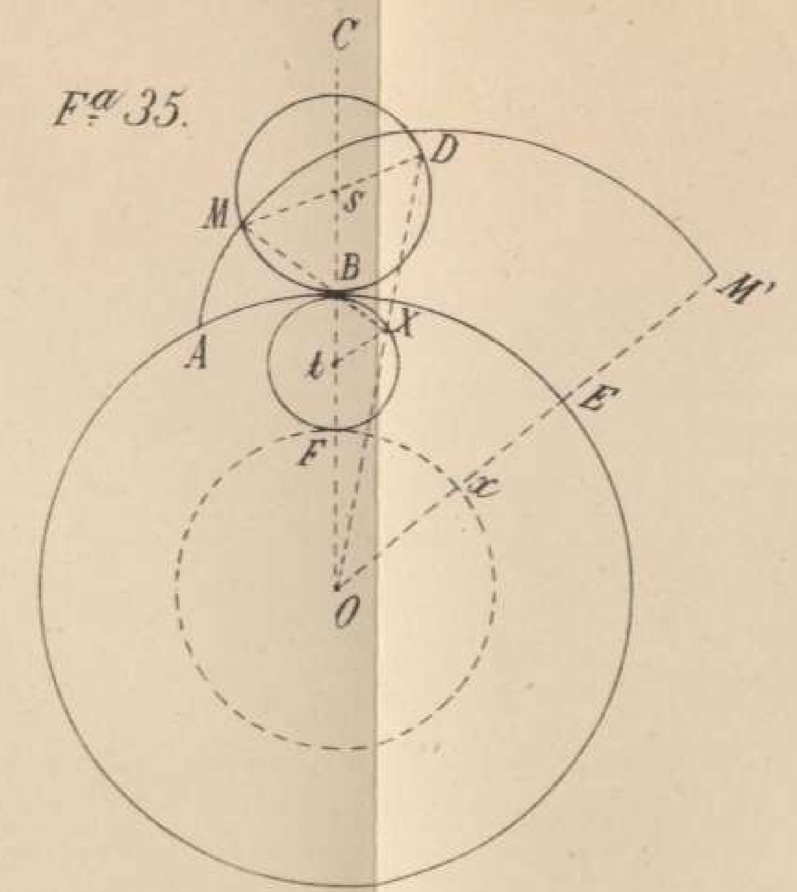


LIT. BARCELONESA TARRAGONA.

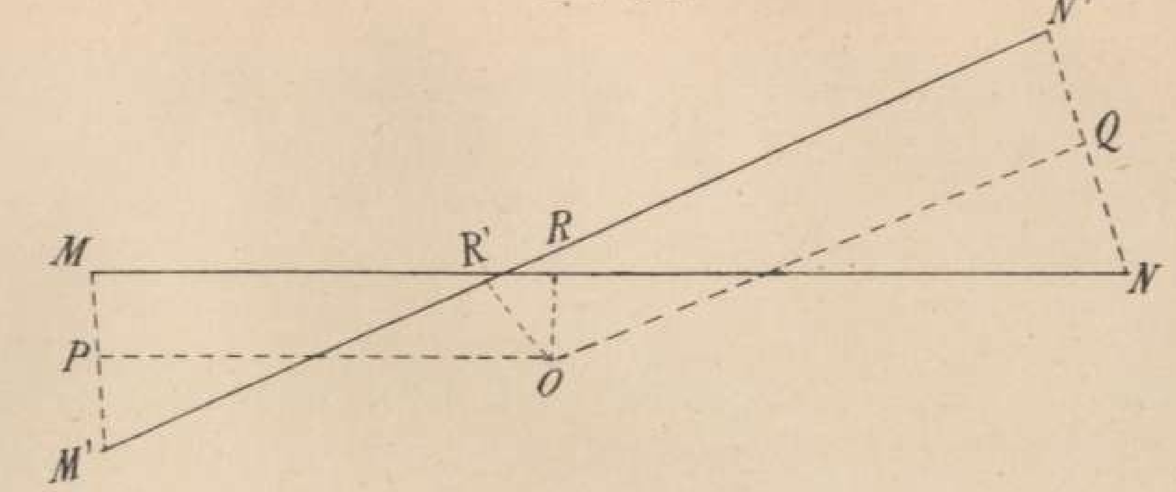
Lámina 2.ª


Fª 19.
Fª 20.
Fª 21.
Fª 22.
Fª 23.
Fª 24.
Fª 25.
Fª 26.
Fª 27.
Fª 28.
Fª 29.
Fª 30.
Fª 31.
Fª 32.
Fª 33.
Fª 34.

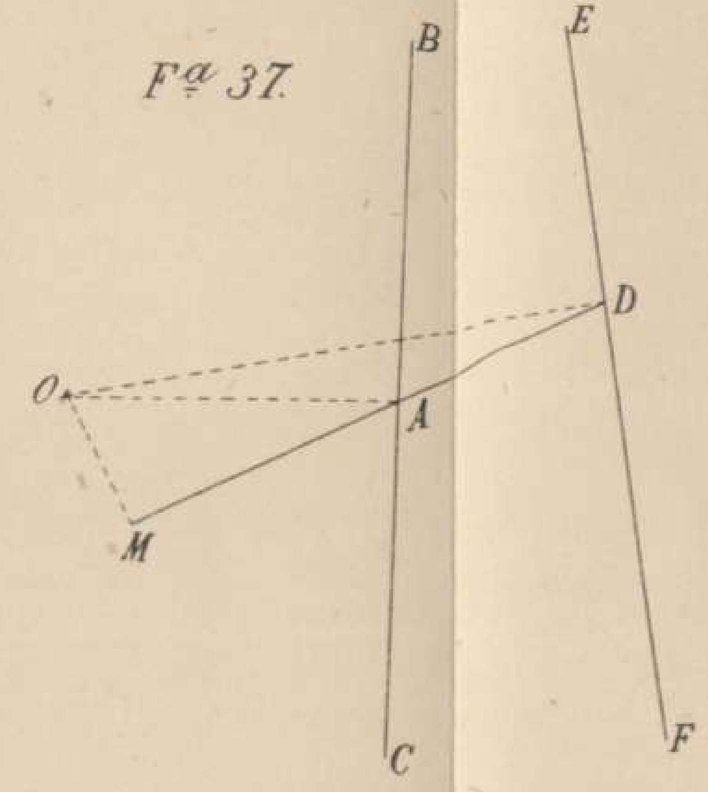
Fª 35.



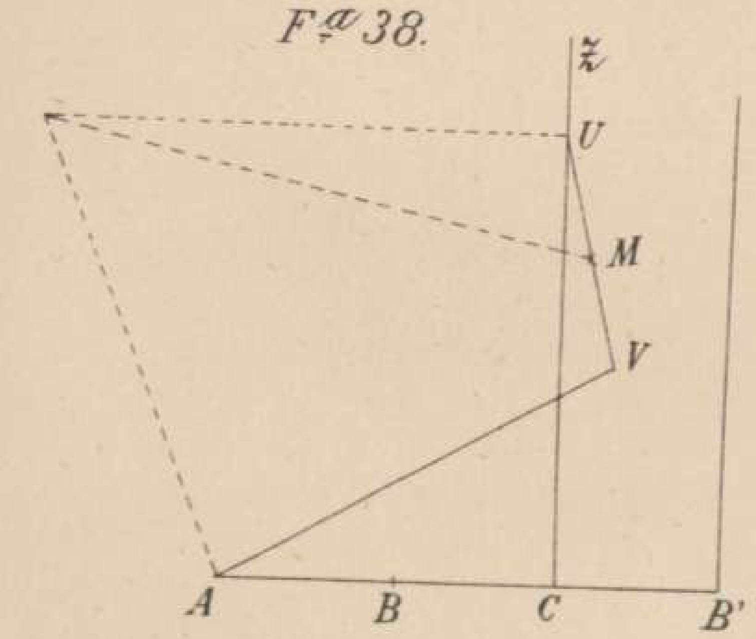
Fª 36.



Fª 37.

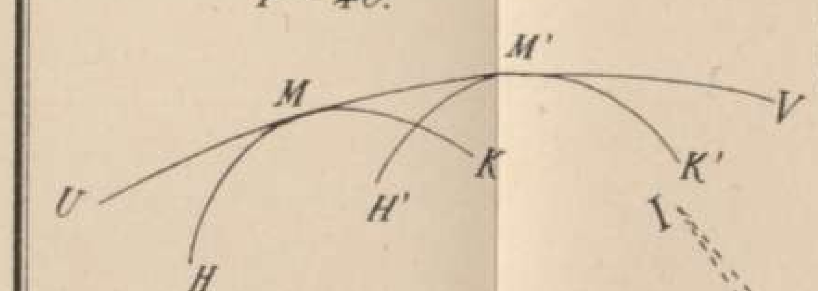


Fª 38.

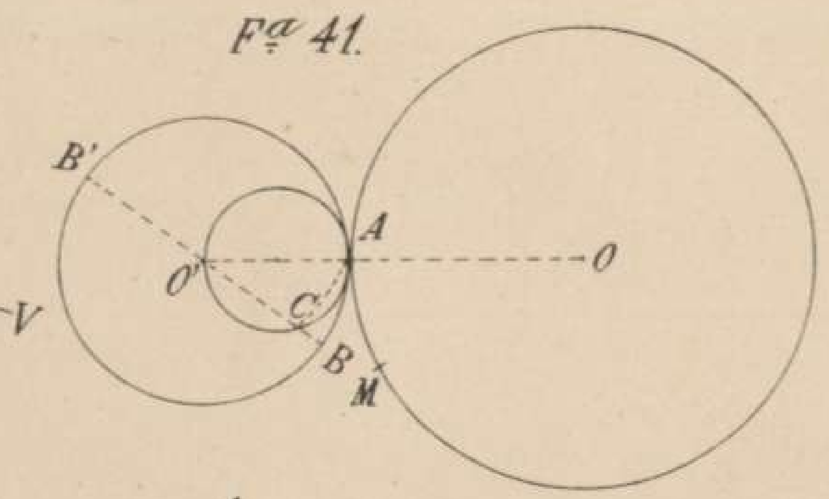


Fª 39.

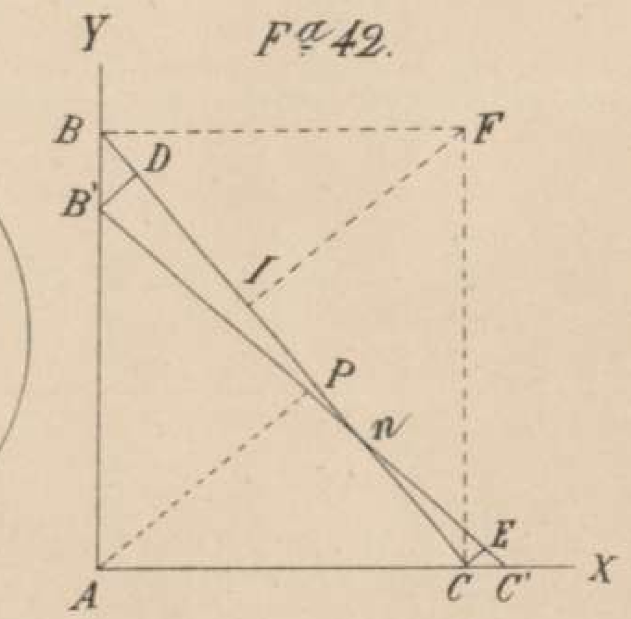
Fª 40.



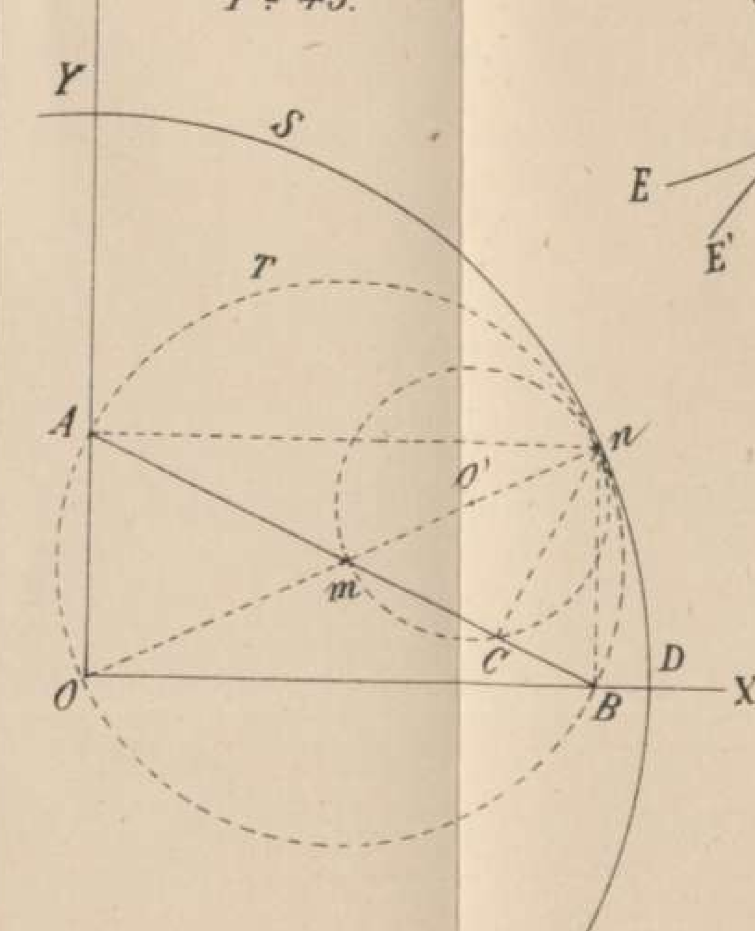
Fª 41.



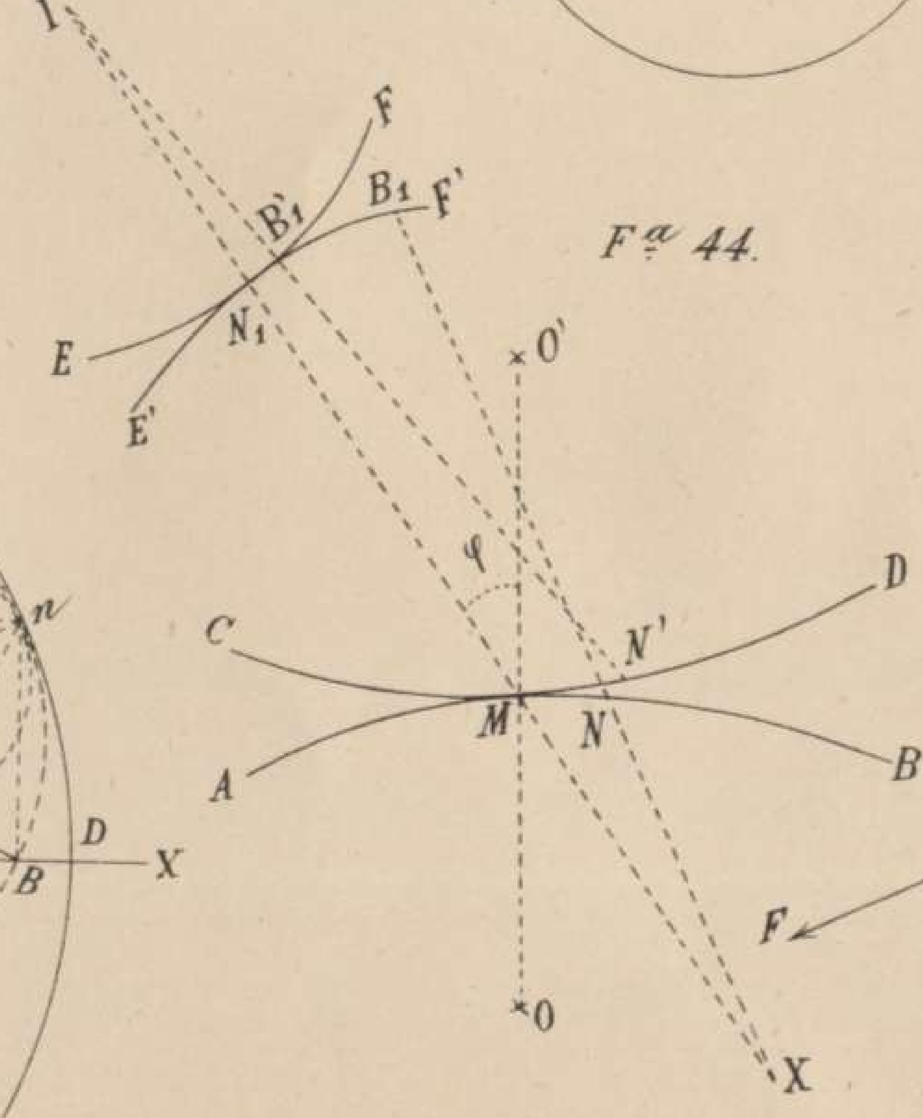
Fª 42.



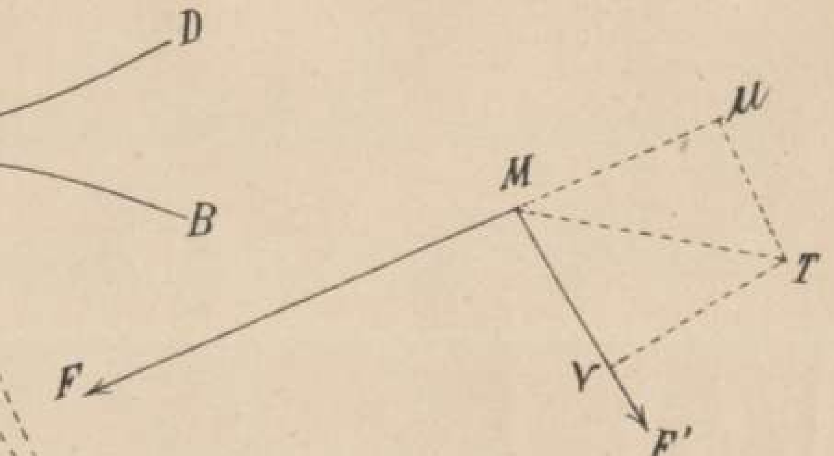
Fª 43.



Fª 44.



Fª 45.



LIT. BARCELONESA TARRAGONA.