LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

POR

MANUEL VAZQUEZ PRADA.

CUADERNO OCTAVO.—INDEPENDIENTE.

A los que estudian Álgebra.
Quia senibus nunquam innovationes gratæ fuerunt.

VINDICACIÓN DE LA VIEJA FÓRMULA DE CARDAN.

NO ES UNA SOLA, SINO TRES.

Por vez primera

resuélvense algebraicamente con ella tres ecuaciones numéricas, con raices enteras, entera con irracionales, y todas irracionales.

La segunda se resuelve también por el nuevo método fundado en $c^2=3bn$.
Identidad del radical cúbico en ambos métodos.

Solución de las tres por el nuevo método, *sin radical cúbico.*

Por el nuevo método fundado en la relación de las potencias con las cuatro primeras series numéricas,
Se determinan las raices enteras de las dos primeras ecuaciones.

Las soluciones de tercer grado son tan claras y precisas, en su grado, como en el suyo las de segundo.

Para resolver algebraicamente todas las ecuaciones, basta el Álgebra elemental.

OVIEDO:
IMPRENTA DE PARDO, GUSANO Y COMPAÑIA
Calle de San José, núm. 6.

1890

PRÓLOGO DEL AUTOR.

A no haber acertado á resolver una ecuación numérica de tercer grado, por la fórmula llamada de Cardan, la primera vez que pude verla en el tratado de Algebra de M. Clairaut, se debe el descubrimiento de veinticinco modos nuevos de resolverla, con y sin radicales de grado impar; de doce soluciones nuevas á la de cuarto; de una especial á la de quinto; y de la solución algebraica de todas las ecuaciones hasta la del grado n, inclusos los sistemas de n incógnitas y ecuaciones, y del grado n. Pues con todo esto, aunque parece debiera haber quedado satisfecho el descubridor de tantas soluciones, no fue así, porque á todas horas y en todas partes estaba viendo *indescifrable* aquella horrible fórmula de Cardan.

M. Clairaut en su tratado de Algebra, París, 3.ª edición, 1760, y J. A. Serret en su Algebra Superior, París, 5.ª edición, 1885, se ocupan muy extensamente de la ecuación de tercer grado y de la fórmula de Cardan, pero á ninguno de los dos, ni á otros algebristas que he podido ver, se le ocurrió resolver una ecuación numérica por aquella tan manoseada fórmula.

Esta especie de connivencia tácita entre los tratadistas, autorizaba sin duda para sospechar mal del procedimiento, y participar de la desconfianza que al ocuparse de éste, se descubre en los autores.

M. Clairaut, pág. 285, se expresa así: "Desde el art.º 5.º de "la 4.ª parte, donde solo se trataba de las ecuaciones de dos "términos, se habrá podido advertir la especie de imperfección "que dá á la solución de las ecuaciones de tercer grado, la dife- "rencia de forma de las tres raices; pero esta imperfección es "aquí más notable, puesto que se la encuentra en la misma so- "lución general." (Art.º 8.º la misma pág.)

"Esta desventaja de la solución precedente, de las ecuacio-

"nes de tercer grado, no puede parecer tal, sinó á los que por "decirlo así, consideran el Algebra metafísicamente; pero hay "otra dificultad mucho más grave para todos, y que ha dado mu- "cho que hacer á los algebristas. Y es que esta solución (la de la "fórmula general) no enseña nada en cuanto al valor de la incóg- "nita de la ecuación, en todos los casos en que $(27q^2+4p^3)$ sea "una cantidad negativa." (Se trata de la ecuación general $Y^3+pY+q=0$). Dice esto el autor porque entonces el radical de segundo grado, sometido al de tercero, que entra en la fórmula de Cardan, cubre una cantidad negativa, y es por lo tanto imaginario.

J. A. Serret, tomo 2.°, pág. 458, ocupándose del caso en que $(4p^3+27q^2)$ sea número negativo, y que por lo tanto sea imaginario el radical de segundo grado sometido al de tercero, dice: "El "caso presente es muy notable, porque aunque las raices de la "ecuación sean reales, la fórmula de Cardan presenta sus valores "bajo una forma complicada de imaginarias; y si se trata de ha- "cer que éstos desaparezcan poniendo los radicales cúbicos que "entran en la fórmula de Cardan, bajo la forma $(A\pm B\sqrt{-1})$, se "tendrá que las cantidades A y B dependen de una ecuación en "todo semejante á la propuesta." "Esta es la razón de haberse "llamado el presente *caso irreducible.*"

Por lo expuesto se ve que, según los algebristas, siempre que bajo el radical cúbico de la fórmula se presente la imaginaria de segundo grado, la ecuación, ó no puede resolverse, ó si se puede, será con tantas dificultades que harán preferible el renunciar á resolverla. Pues bien, en este libro se podrá ver la indicación de que, según está evidentemente demostrado, la cantidad subradical de segundo grado, tiene su raíz expresada *por el producto de las diferencias de las tres raices de la ecuación, multiplicado por* $\sqrt{-3}$. Y siendo esto cierto en la ecuación general, y por lo tanto en las numéricas, éstas, según los algebristas, no tienen en ningún caso solución á medio de la repetida fórmula.

Obsérvese por lo demás, que las cantidades subradicales de tercero y segundo grado, que entran en la fórmula de Cardan, son las mismas que entran en las fórmulas de nuestro procedimiento, por más que fué hallado siglos después que aquel, y por caminos casi diametralmente opuestos.

Pero bien mirado, no sorprende que por la de Cardan no se hayan resuelto ecuaciones numéricas. Hay en ella una dificultad que no se pudo ocultar á los algebristas, y que no consiste en haber ó no imaginarias bajo el radical cúbico, sino precisamente en que la cantidad á éste sometida tiene siempre, menos en casos muy excepcionales, la forma de $(A \pm B\sqrt{-3})$.

En las ecuaciones de tres raices enteras ó fraccionarias, y en las de una con dos irracionales ó imaginarias conjugadas, no hay solución posible mientras no desaparezca el radical cúbico; y para que éste desaparezca es necesario hallar las raices cúbicas de dicha cantidad, en la forma que las tenga, determinadas ó indeterminadas. La dificultad de hallar estas raices, y nó la presencia de las imaginarias, fué la verdadera causa de no aplicarse la fórmula de Cardan á la solución de las ecuaciones de tercer grado.

En rigor, no les faltó razón para obrar así, puesto que, no conociéndose el modo de hallar las raices de $(A \pm B\sqrt{-3})$, en las ecuaciones que tengan alguna, ó todas las suyas, enteras ó fraccionarias, á nada práctico se podía llegar por aquella fórmula. Que las raices de $(A \pm B\sqrt{-3})$, no se conocia el modo de determinarlas, lo pone bien en claro J. A. Serret, pues por el párrafo que del mismo hemos transcrito, se ve que las tales raices dependen de otras ecuaciones también de tercer grado como la propuesta.

P. L. Cirodde, en su tratado de Algebra, 13.ª edición francesa, 1876, pág. 311, después de indicar que la resolución algébrica de una ecuación consiste en reducirla á una fórmula que contenga todos los valores de la incógnita, dice: "Hasta el pre-"sente solo hemos podido hallar dicha fórmula para las ecuacio-"nes de los cuatro primeros grados, y aun las relativas á las ecua-"ciones de tercero y cuarto, son tan complicadas que casi nunca "se hace uso de ellas." Como se ve, este autor tan leido,—13 ediciones en Francia con traducciones al extranjero—confirma lo dicho por los otros dos que hemos citado. Pero Cirodde, aunque dice „casi nunca“, él tampoco resuelve la numérica de tercer grado ni de cuarto por las mencionadas fórmulas.

Lo que parece algo sorprendente es que, siendo la única fórmula conocida de tercer grado ineficaz en la práctica de los números, no se haya pensado por nadie en buscar otra de mejores condiciones, en vez de dedicarse todos á inventar procedimientos no algebraicos para resolver dicha ecuación y las siguientes.

Pero volvamos á nuestro asunto. Molestado en cierto modo por la idea de que la fórmula de Cardan no resolviese las ecuaciones numéricas, puesto que contrariaba la firme convicción de que, lo cierto en el sugeto tiene que serlo en el objeto, hízose inevitable el emprender con dicha fórmula, para salir de dudas, y ver con toda claridad en su fondo, si tenía ó no razón de ser el horror con que se la miraba.

El resultado fué el que se expone en este libro, á saber: que el procedimiento de Cardan con sus tres fórmulas generales—y no una sola—resuelve las ecuaciones numéricas con toda precisión, dándonos las raices enteras ó fraccionarias cuando las tengan, y en otro caso las indeterminadas con que se haya formado la propuesta.

Resuélvense por la fórmula tres ecuaciones numéricas, una de tres raices enteras, otra de una con dos irracionales conjugadas, y otra de tres raices indeterminadas. En las tres aparece bajo el radical cúbico la imaginaria de segundo grado, tan temida por los algebristas. La segunda ecuación se la resuelve también por nuestro procedimiento, fundado en $c^2 = 3bn$, con radical de tercer grado; y si no se resuelven las otras dos es por no hacer muy extenso este trabajo. Pero sí se resuelven las tres por el método *sin radicales de grado impar*, para que así resalte la superioridad del mismo sobre los otros dos. Y por fin, en las dos primeras se descubren sus raices enteras, por el procedimiento fundado en la relación de las potencias con las cuatro primeras series de los números.

La ventaja de tal procedimiento para descubrir las raices enteras y fraccionarias es indiscutible, y mucho más si se tiene en cuenta, que del mismo modo se aplica á las ecuaciones de grado superior al tercero.

Es por lo demás evidente, que toda vez la de tercer grado se resuelve con sólo radicales de segundo, queda con esto demostrada la posibilidad de que también así se resuelvan las siguientes aunque el exponente de su grado sea número primo.

Con lo expuesto en este libro queda fuera de toda duda y en absoluto demostrado, que la ecuación de tercer grado, cualquiera que sea la forma y clase de sus raices, tiene soluciones tan claras y precisas como pueden serlo las de segundo.

Las fórmulas cumplen su destino dándonos las raices que producen la ecuación; y en ningun modo se las puede culpar, si en algunas ecuaciones sólo descubren raices indeterminadas, pues esto consiste solamente en que no las tienen de otra clase.

Obsérvese por fin que, resueltas todas las ecuaciones á medio de fórmulas, la cuestión de eliminar incógnitas en sistemas de cualquier grado, deja ser tal cuestión, puesto que se identifica con la de *resolver las ecuaciones*, ó más bien *los sistemas de ecuaciones*.

NOTA.—Para que resulte completo el trabajo de investigación, y en lo posible por ahora su comprobación numérica, falta presentar *algebraicamente resuelta* la ecuación $(x^4+x^3-4x^2-4x+1=0)$, y exponer á la vez un método general que resuelva todas las de la misma clase: *Coeficientes racionales con todas las raices irracionales y conjugadas*. La indicada ecuación resistióse *algebraicamente* á los algebristas, y solo por caminos no algebraicos llegaron á descubrirle un sistema de raices. (A. Serret, tomo 2.º, pág. 637.)

[illegible] cuarto, que del teorema no se aplique á las ecuaciones de grado superior al cuarto.

Es por lo tanto evidente que toda y á la de tercer grado se resuelve con solo radicales de segundo grado, y que existe [illegible] la posibilidad de que tambien así se resuelvan las siguientes, aunque su exponente de su grado sea número primo.

Con lo expuesto en este libro queda fuera de toda duda y en absoluto demostrado, que la ecuacion de tercer grado cualquiera que sea la forma y clase de sus raíces, tiene soluciones tan claras y sencillas como pueden serlo las de segundo.

Los capitales complejos su destino dando [illegible] las raíces que producen la ecuacion, y en ningun modo se les puede culpar si en algunas ecuaciones sólo descubren raíces indeterminadas, pues esto consiste solamente en que no las tienen de otra clase.

Obsérvese por fin que, resueltas todas las ecuaciones á medio de fórmulas, la cuestion de eliminar incógnitas en sistemas de cualquier grado, debia ser tal cuestion, puesto que se identifica con la de resolver las ecuaciones, ó más bien los sistemas de ecuaciones.

NOTA.—Para que resulte completo el tratado de la ecuacion, [illegible]

LA FÓRMULA DE CARDAN

Y LAS

ECUACIONES NUMÉRICAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

Una con tres raices enteras.

Una ecuación sencilla que puede ponerse de la misma forma que la general, que da origen á la fórmula de Cardan, y de raices enteras, es la siguiente:

$$Y^3-7Y-6=0. \qquad (1)$$

La cual es el producto de las tres raices $(Y-3)\ (Y+2)\ (Y+1)$.

La fórmula de Cardan, tratada por los algebristas, es:

$$Y=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (2)$$

Si en la ecuación general $Y^3+pY+q=0$, se hace $Y=(x+z)$; se sustituye, y luego se hace $x^3+z^3+q=0$, siendo también igual á *cero* lo que queda, se deduce fácilmente la fórmula anterior.

En la cual se tiene: $p=-7$, $q=-6$.

Poniendo en la fórmula estos valores de p y q, se obtiene:

$$Y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{81\pm30\sqrt{-3}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{81\pm30\sqrt{-3}}. \qquad (3)$$

Y siendo una raiz cúbica de $(81\pm30\sqrt{-3})=-3\pm2\sqrt{-3}$, sustituyendo ésta al radical, será:

$$Y=\frac{1}{3}(-3\pm2\sqrt{-3})+\frac{1}{3}(-3\pm2\sqrt{-3}).$$

Y quitando los paréntesis queda

$$Y=-1\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3}-1\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3}. \qquad (4)$$

De esta expresión, como se ve, no sale más que la raiz —2 para la ecuación propuesta, y otras dos raices imaginarias, extrañas á la misma.

Pongamos otra raiz cúbica de la cantidad $(81 \pm 30\sqrt{-3})$, la cual, como luego se demostrará, es $(-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{-3})$; y sustituida en la igualdad (3) quitando los paréntesis dá:

$$Y = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3} - \frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3}.$$

Cuya expresión nos dá sólo la raíz —1 de la ecnación propuesta, con otras dos imaginarias.

Pongamos la tercera raíz de $(81 \pm 30\sqrt{-3})$, la cual es

$$(+\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3});$$

y puesta en (3), quitando paréntesis resulta

$$Y = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{-3} + \frac{3}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{-3}.$$

Cuya expresión nos dá solamente la tercera raíz de la ecuación, +3, y otras dos imaginarias.

En este ejemplo se ve bien claro que en la ecuación con tres raices enteras, *ó fraccionarias*, la cantidad subradical de tercer grado, en general $(A \pm B\sqrt{-3})$, tiene tres raices cúbicas de la misma forma, que expresaremos por $(x \pm z\sqrt{-3})$, teniendo x y z valores enteros ó fraccionarios: y que con cada una de estas raices, la fórmula general de Cardan, no dá más que una raiz de la ecuación propuesta.

Los algebristas han pretendido sacar de la fórmula general (2) todas las raices de la ecuación en su forma general; pero está bien comprobado que esto no puede ser, sinó á condición de que se determinen antes las tres raices de $(A \pm B\sqrt{-3})$.

En el cuaderno cuarto de *Lucubraciones Algebraicas*, está desarrollado con todos sus detalles el primer *modo* de los diez y nueve descubiertos para resolver la de tercer grado con su propio radical, fundado en la relación $c^2 = 3bn$, siendo b, c, n, coeficientes de la ecuación. Allí podrá ver el que quiera, cómo á medio de las tres fórmulas deducidas para Y, se determinan las tres raices de la ecuación, *con cada una de las cúbicas de* $(A \pm B\sqrt{-3})$.

El procedimiento de Cardan conduce al mismo resultado, si se tienen en cuenta las tres fórmulas que contiene para Y.

En efecto, si la ecuación general que proponen

$$Y^3+pY+q=0$$

se la divide por la raíz conocida, que es la llamada fórmula general, pasando todo al primer miembro, es indudable que la división será exacta, y el cociente de segundo grado, (expresaremos por R' y R" las dos cantidades subradicales).

$$Y^2+(\sqrt[3]{R'}+\sqrt[3]{R''})Y+\left(p+(\sqrt[3]{R'}+\sqrt[3]{R''})^2\right)=0 \qquad (5)$$

nos da: $$Y=\frac{-(\sqrt[3]{R'}+\sqrt[3]{R''})\pm\sqrt{-4p-3(\sqrt[3]{R'}+\sqrt[3]{R''})^2}}{2} \qquad (6)$$

Cuya igualdad contiene otras dos fórmulas generales para Y.

Para comprobarlas no hay más que sustituir, por ejemplo, á la cantidad interior de los paréntesis, el valor -2, que tomaron con la primera raíz de $(A\pm B\sqrt{-3})$, y se tendrá:

$$Y=\frac{2\pm\sqrt{28-12}}{2};$$

ó bien $$Y=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=+3=-1.$$

Con las otras dos raices de $(A\pm B\sqrt{-3})$ sucederá lo mismo.

Obsérvese que del segundo miembro de la igualdad (4) resultan otros valores extraños á la ecuación, según ya queda indicado, y lo mismo de las otras dos, que se obtuvieron con las otras dos raices de $(A\pm B\sqrt{-3})$.

ARTÍCULO SEGUNDO.

Una ecuación con una raiz entera, y dos irracionales conjugadas.

§ 1.º

Resolvamos por la fórmula de Cardan esta otra ecuación:

$$Y^3-6Y+4=0.$$

Cuyas raices son $(Y-2)$, $(Y+1+\sqrt{3})$, $(Y+1-\sqrt{3})$; es decir, una entera y dos irracionales conjugadas.

Poniendo en el radical los valores de $p=-6$, y $q=4$, resulta:

$$Y=\sqrt[3]{-2\pm 2\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-2\pm 2\sqrt{-1}}.$$

La raíz cúbica de $(-2\pm 2\sqrt{-1})$ es $(1\pm\sqrt{-1})$.

Sustituyendo esta cantidad al radical, se tiene:

$$Y=(1\pm\sqrt{-1})+(1\mp\sqrt{-1}).$$

La expresión del segundo miembro en sus cuatro combinaciones, sólo nos dá la raíz $+2$.

Obsérvese como en el ejemplo anterior, que con una sola raiz de $(-2\pm 2\sqrt{-1})$, sólo nos dá la fórmula una raíz de la ecuación. Pero haciendo uso de la doble fórmula (6), se obtienen como antes las otras dos raices de la ecuación, con una sola de $(A\pm B\sqrt{-3})$.

En efecto; sabemos que $(\sqrt[3]{R'}+\sqrt[3]{R''})$ tiene un valor $+2$, y sustituido en la fórmula (6), nos da:

$$Y=\frac{-2\pm\sqrt{24-12}}{2},$$

ó bien:

$$Y=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}=-1+\sqrt{3}=-1-\sqrt{3}.$$

Es decir, las otras dos raices de la ecuación.

§ 2.º

RAICES DE $(A \pm B\sqrt{-3})$.

Queda dicho que la ecuación actual, con todas las de su clase, no puede tener más que una raiz determinada, ó sea con valores enteros ó fraccionarios para x y z en la expresión $(x \pm z\sqrt{-1})$, considerada como comprensiva de las tres raices que se atribuyen á la cantidad $(A \pm B\sqrt{-1})$, ó bien $(A \pm B\sqrt{-3})$, según resulta en nuestro procedimiento.

En el cuaderno cuarto, páginas 9 al 23, puede verse la demostración de que la cantidad $(A \pm B\sqrt{-3})$ tiene siempre sus raices cúbicas en función de las raices de la ecuación propuesta, y que siendo éstas p, q, r, la relación que las enlaza es:

$$\sqrt[3]{A \pm B\sqrt{-3}} = p - \frac{q+r}{2} \pm \frac{(q-r)\sqrt{-3}}{2}. \qquad (7)$$

Y representando en general las raices de $(A \pm B\sqrt{-3})$ por la expresión $(x \pm z\sqrt{-3})$, estas raices se enlazan con las de la ecuación en las tres igualdades siguientes, en las que b es el coeficiente del segundo términо:

$$p = \frac{b+x}{3}$$

$$q = \frac{2b-x+3z}{6} \qquad (8)$$

$$r = \frac{2b-x-3z.}{6}$$

En estas igualdades, p, q, r representan cada una indiferentemente las tres raices de la ecuación; y por lo tanto se ve en ellas con evidencia que: si una raíz de la ecuación es racional, entera, ó fraccionaria, habrá un par de valores de la misma clase para x y z; que si las dos raices son irracionales de cualquiera forma, tendrá que ser irracional x ó z en los otros dos pares de valores; que si las tres raices son racionales, lo serán tambien x y z en los tres pares de valores; y por fin que, si las tres raices son irracionales, lo habrá de ser igualmente x ó z en los tres pares de valores.

No se olvide que b, c, n, coeficientes de la ecuación, se les supone racionales.

§ 3.º

Continuación de las raices de $(A \pm B\sqrt{-3})$.

Procede ahora indicar, aunque sea de paso, el modo de determinar las raices cúbicas de $(A \pm B\sqrt{-3})$; para lo cual es preciso distinguir entre las tres clases de ecuaciones: las de tres raices racionales, enteras ó fraccionarias; las de una sola raiz racional con las otras dos irracionales conjugadas; y las de tres raices irracionales. Entiéndase que nos referimos á la ecuación general con sus coeficientes todos racionales.

Elevando al cubo la expresión $(x \pm z\sqrt{-3})$, é igualando con A los dos términos racionales del cubo, y con $\pm B\sqrt{-3}$ los dos términos irracionales, dividiendo ésta por $\pm\sqrt{-3}$, resultan las dos ecuaciones:

$$x^3 - 9xz^2 = A. \qquad (9)$$

$$3z^3 - 3zx^2 = B \qquad (10)$$

Y como B, según se hace ver en el cuaderno cuarto, donde esto se explica latamente, es siempre divisible por 3, haciendo $\frac{B}{3} = B_1$, será:

$$z^3 - zx^2 = B_1. \qquad (11)$$

Esta ecuación puede escribirse así:

$$z(z+x)(z-x) = B_1. \qquad (12)$$

En esta se ve que, descomponiendo B_1 en sus divisores simples y compuestos, todo producto de tres factores, que igualando con B_1, sean aquellos tales que, uno de ellos *mas* una diferencia *d*, iguale con uno de los otros dos, y *menos* la diferencia *d*, iguale con el tercero, dará un par de valores para x y z, siendo z el factor tomado, y $x = d$. Estos pares de valores han de de resolver también la ecuación (9).

Este procedimiento, que llamaremos aritmético, y no conocido antes de ahora, dá muy fácilmente las tres raices de

$(A \pm B\sqrt{-3})$, en la ecuación con tres raices enteras ó fraccionarias; pero no así en las otras dos clases de ecuaciones, porque en ellas aparece alterada la relación de las dos ecuaciones (9) y (10). Sin embargo, en la ecuación de una raíz racional y las otras dos irracionales conjugadas, será casi siempre posible, á medio de las ecuaciones (9) y (10), determinar el par de valores racionales que corresponde para x y z. Y si no se pudiese ó fuese muy difícil, se deducirá una ecuación que sólo contenga x ó z, y como en ella uno de sus valores ha de ser racional, se hará uso, para determinar éste fácilmente, del método que luego explicaremos, fundado en la relación de las potencias con las cuatro primeras series de los números. Los otros dos valores de z se hallarán por la ecuación de segundo grado, que allí también se indicará como regla general. Determinados los tres valores de z, por ejemplo, los tres de x los darán las ecuaciones (9) y (10).

En el caso actual estas dos ecuaciones se presentan así:

$$x^3-3xz^2=-2. \qquad (13)$$

$$z^3-3zx^2=-2. \qquad (14)$$

En las cuales se ve claramente que al menos un valor de x ha de ser igual á otro de z.

Poniendo en la segunda z^2 en vez de x^2 será:

$$z^3-3z^3=-2z^3, \text{ ó } -2z^3=-2.$$

De donde $z^3=1$, ó bien $z=1$.

Y poniendo en la primera, en vez de z^2, x^2, será:

$$x^3-3x^3=-2x^3, \text{ ó } -2x^3=-2.$$

De donde $x^3=1$, ó bien $x=1$.

Si en las ecuaciones (9) y (10), y en el presente caso en las (13) y (14), se despeja en la primera z^2, y luego z, sustituyendo en la segunda, se obtiene para x la ecuación

$$64x^9+96x^6-168x^3=-8. \qquad (15)$$

Haciendo $x^3=u$, sustituyendo y dividiendo por 8, resulta:

$$8u^3+12u^2-21u=-1. \qquad (16)$$

De esta ecuación veremos luego cómo se deduce fácilmente, por método algebraico, un valor de u, y luego por consecuencia los otros dos.

ARTÍCULO TERCERO.

Procedimiento nuevo con radical de tercer grado.

La misma ecuación se resuelve por el primer *modo* fundado en $c^2=3bn$.

Las tres fórmulas de Y, (pág. 9, cuaderno 4.°) son:

$$Y=s+\frac{c}{-b+\sqrt[3]{b(b^2-3c)}},\quad Y=s+\frac{-C+\sqrt{C^2-4C_1}}{2},$$

$$Y=s+\frac{-C-\sqrt{C^2-4C_1}}{2}. \tag{16}$$

$$C=b+\frac{c}{-b+\sqrt[3]{b(b^2-3c)}},\quad C_1=c+\frac{bc}{-b+\sqrt[3]{b(b^2-3c)}}+$$

$$\frac{c^2}{\left(-b+\sqrt[3]{b(b^2-3c)}\right)^2} \tag{17}$$

$b=3s+b_1$, $c=3s^2+2b_1s+c_1$, n_1 (en s)$=4$, $b_1=0$, $c_1=-6$.

Sustituyendo valores en el radical cúbico se transforma en $3\sqrt[3]{2\pm2\sqrt{-1}}$; y como la raíz cúbica de $(2\pm2\sqrt{-1})$ sea $(-1\pm\sqrt{-1})$, el radical se convierte en $(-3\pm3\sqrt{-1})$.

Las fórmulas de Y en este procedimiento se obtienen, haciendo $Y=x+s$, sustituyendo, y luego dando á s el valor nececesario para que, *el coeficiente del tercer término, elevado al cuadrado, sea igual á tres veces el coeficiente del segundo término, multiplicado por todo el último término de la ecuación.* Obteniendo la primera raíz, se divide por ella la ecuación, y resultan las otras dos de la de segundo grado que aparece en el cociente exacto.

La fórmula de s es: $s=\dfrac{-bc+9n\pm\sqrt{(bc-9n)^2-4(b^2-3c)(c^2-3bn)}}{2(b^2-3c)}$

La cantidad interior al radical, que expresaremos por (M), tiene siempre raíz cuadrada en función de las raices de la ecuación, multiplicada por $\sqrt{-3}$, en esta forma: (Véase en el cuaderno 2.º)

$$\sqrt{M}=(p-q)(p-r)(q-r)\sqrt{-3}$$

siendo p, q, r, las raices de la ecuación.

Sustituyendo en la fórmula de s, $b=0$, $c=-6$, $n=4$, se obtiene:

$$s=1\pm\sqrt{-1}.$$

Sustituyendo en la primera fórmula de Y, el quebrado se hace igual á $(1\mp\sqrt{-1})$, y por lo tanto será:

$$Y=(1\pm\sqrt{-1})+(1\mp\sqrt{-1})$$

Uno de los valores que dá el segundo miembro es igual á $+2$, ó sea una raíz de la ecuación.

Sustituyendo valores en la fórmula de C, resulta

$$C=3s+(1\mp\sqrt{-1})=3\pm3\sqrt{-1}+1\mp\sqrt{1}=4\pm2\sqrt{-1}.$$

Sustituyendo en C_1 será primero:

$$c=3s^2-6=3(1\pm\sqrt{-1})^2-6=3(1\pm2\sqrt{-1}+1)-6=$$
$$6-6\pm6\sqrt{-1}=\pm6\sqrt{-1}.$$

Obsérvese que decimos $(\sqrt{-1})^2=+1$, porque $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1\times-1}=\sqrt{1}=+1$. Este valor de $(\sqrt{-1})^2$ es el valor lógico de la expresión; y al contrario, el valor -1 es una ficción, consecuencia de la primera, que consiste en suponer que -1 tiene una raíz cuadrada.

El primer quebrado en el valor de C_1, sin el factor $b=3s$, ya hemos visto que vale $(1\mp\sqrt{-1})$; y por lo tanto, el quebrado vale:

$$3s(1\pm\sqrt{-1})=3(1\pm\sqrt{-1})(1\mp\sqrt{-1})=1^2-(\sqrt{-1})^2=1-1=0.$$

Obsérvese que aquí tenemos un producto de dos factores igual á *cero*, sin que sea *cero* ninguno de los factores. Pero esto no sorprende cuando se trata de cantidades imaginarias, ó simplemente irracionales; puesto que con ellas también se tiene que, un producto de dos cantidades puede ser divisible por una cantidad dada, sin que lo sea ninguno de los factores. En efecto:

$(1+\sqrt{-3})$ y $(1-\sqrt{-3})$, ninguna de las dos es divisible por 2; y sin embargo, el producto 4 es divisible por 2.

El segundo quebrado del valor de C_1 es evidentemente igual á

$$(1\mp\sqrt{-1})^2=2\mp\sqrt{-1}.$$

Juntando, pues, los tres valores del segundo miembro de C_1, será:

$$C_1=\pm6\sqrt{-1}+0+2\mp2\sqrt{-1}=2\pm4\sqrt{-1}.$$

Según esto se tiene que, la cantidad subradical en el segundo y tercer valor de Y, es (C^2-4C_1).

Y como $\qquad C=4\pm2\sqrt{-1}$

y $\qquad C_1=2\pm4\sqrt{-1}$,

será bajo el radical: $16\pm16\sqrt{-1}+4-8\mp16\sqrt{-1}=12$.

Con esto el valor doble de Y será:

$$Y=s+\frac{-C\pm\sqrt{12}}{2}.$$

O bien $\qquad Y=1\pm\sqrt{-1}+\dfrac{-4\mp2\sqrt{-1}\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

De donde $\qquad Y=-1+\sqrt{3}=-1-\sqrt{3}$,

ó sean las otras dos raices de la ecuación.

ARTÍCULO CUARTO.

Los dos ejemplos se resuelven sin radical de tercer grado.

Primer ejemplo.

Para que cada uno pueda fácilmente apreciar las ventajas del procedimiento especial, sin radical de tercer grado, que se demuestra también en el cuaderno cuarto, vamos á resolver por el mismo las dos ecuaciones numéricas que preceden.

Las fórmulas de Y son:

$$Y=\frac{-1+rq}{q} \tag{18}$$

$$Y=\frac{1-(b+r)q\pm\sqrt{(1-(b+r)q)^2-4sq^2}}{29} \tag{19}$$

Con estas tres raices, multiplicadas, se reproduce en todos los casos la ecuación propuesta.

$$r=\frac{bn+2s^2-2cs\pm n\sqrt{b^2-4c+4s}}{bs-2n\pm s\sqrt{b^2-4c+4s}} \qquad (20)$$

$q=\dfrac{2r+b\pm\sqrt{b^2-4c+4s}}{2r^2+2br+2c-2s}=\dfrac{s}{rs+n}$; $b=0, c=-7, n=-6$. (En el primer ejemplo.)

La cantidad subradical en r, siendo $b=0$, y $c=-7$ se convierte en $\sqrt{28+4s}$, en la que s es disponible. Esta cantidad será 6^2 dando á s el valor 2; y será 4^2 dando á s el valor -3. Con cualquiera de estos valores resulta para r el valor *cero*. Sea $s=2$.

Siendo $r=0$, será $q=-\dfrac{1}{3}$.

Pero entónces la primera fórmula de Y será:

$$Y=\frac{-1}{q}=\frac{-1}{-1/3}=3.$$

O sea un valor de la ecuación dada.

La segunda fórmula de Y será también:

$$Y=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4sq^2}}{2q}$$

O bien, sustituyendo los valores de s y q:

$$Y=\frac{3\pm1}{-2}=-2=-1.$$

Es decir: los otros dos valores ó raices de la ecuación dada.

Si $s=-3$, será $q=\frac{1}{2}$; y entónces Y en la primera fórmula es

$$Y=\frac{-1}{1/2}=-2.$$

Y en la segunda fórmula será:

$$Y=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{1}=1\pm\sqrt{4}=1\pm2=+3=-1.$$

La superioridad de este procedimiento sobre los otros dos es inmensa, puesto que con igual facilidad se resuelven por el mismo las ecuaciones, cualquiera que sea la naturaleza de sus raices.

Para saber el valor que corresponde á s en r, véase el cuaderno cuarto.

Segundo ejemplo.

Se tiene $b=0$, $c=-6$, $n=4$, $r=\dfrac{2s^2+12s\pm4\sqrt{24+4s}}{-8\pm s\sqrt{24+4s}}$

Para que la cantidad subradical sea un cuadrado, está indicado como menor valor de $s=-2$, con el cual el valor de r es *cero.*

Con esto se tendrá $q=\dfrac{s}{n}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

El primer valor de Y es: $Y=\dfrac{-1}{q}=2$: que es una raíz de la ecuación.

Para los otros dos valores de Y se tiene:

$$Y=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4sq^2}}{2q}=\frac{1\pm\sqrt{1^2+2}}{-1}=-1\pm\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})$$

Es decir, las otras dos raices de la ecuación.

Obsérvese que si al dar valor á s, lo hacemos de modo que no desaparezca el radical de r, irá dicho radical á las tres raices de la ecuación. Esto, en rigor, es lógico cuando la ecuación no tenga ninguna raíz entera ni fraccionaria.

ARTÍCULO QUINTO.

Una ecuación con tres raices irracionales por el método de Cardan.

Vamos por fin á resolver una ecuación sin ninguna raíz entera ni fraccionaria.

Sea la ecuación:

$$Y^3-7Y+7=0. \qquad (21)$$

La cual, aplicándole el método fundado en la relación de las potencias con las series de los números, como luego se verá, no da ninguna raíz exacta, entera ni fraccionaria. De esto se deduce que sus tres raices han de ser indeterminadas, de forma irracional, ó imaginarias, ó de ambas clases.

Poniendo en la primera fórmula de Cardan los valores $p=-7$, $q=7$, se obtiene:

$$Y = \frac{1}{6}\sqrt[3]{-756 \pm 84\sqrt{-3}} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{-756 \pm 84\sqrt{-3}} \qquad (22)$$

Esta fórmula con las dos contenidas en la del número (6), dan las tres raices de la ecuación propuesta. Las raices cúbicas de $(-756 \pm 84\sqrt{-3})$, está demostrado que han de ser indeterminadas de la misma forma, y con radical de tercer grado, puesto que del mismo grado son las ecuaciones de x y z que nos han de dar aquellas. Y por lo tanto, en ecuaciones de esta clase es inútil pasar adelante, en busca de las raices indeterminadas de $(A \pm B\sqrt{-3})$. Si se quieren valores aproximados de las raices indeterminadas, se obtendrán hallando aritméticamente las aproximadas de $(A \pm B\sqrt{-3})$.

Estas aproximadas nos las dan las ecuaciones de los números (9) y (12), y una tercera que resulta de igualar $(x + z\sqrt{-3})$ con $\sqrt[3]{A + B\sqrt{-3}}$, y la diferencia $(x - z\sqrt{-3})$ con $\sqrt[3]{A - B\sqrt{-3}}$, y multiplicando las dos igualdades resulta $x^2 + 3z^2 = \sqrt[3]{A^2 + 3B^2}$, igual en este caso á $+84$. Escribiendo la del (9) como se ve, las tres ecuaciones son

$$x(x+3z)(x-3z) = -756$$
$$z(z+x)(z-x) = B_1 = 28$$
$$x^2 + 3z^2 = 84.$$

Hallados en la primera los divisores de 756, y en la segunda los de 28, se encuentra entre los primeros el producto ternario $3 \times 12 \times 21 = 756$, del que sale $12 + 9 = 21$, $12 - 9 = 3$: de donde $x = -12$, $z = 3$: entre los segundos sale $1 \times 4 \times 7 = 28$, ó sea $4 + 3 = 7$, $4 - 3 = 1$; de donde $x = 3$, $z = 4$.

En la tercera, si quitamos de 84 el cuadrado de 1 para x^2, el resto no es divisible por 3: si quitamos 2^2, el resto no es divisible por 3: si quitamos 3^2, el resto 75, dividido por 3, nos dá el cuadrado de 5: luego $x = 3$, $z = 5$.

El valor 3 es, como se ve, el más repetido para x, y por lo mismo será el que llevaremos á las fórmulas. Pero adviértase que cada par de valores hallados para x y z, solo resuelve la ecuación que le dá, y no las otras, siendo en consecuencia raices aproximadas. Al llevar 3 á las fórmulas como valor de x, omitiremos desde luego el sumando $\pm z\sqrt{-3}$, puesto que desaparece por sí mismo.

Con el 3 la primera fórmula (2), (22), nos dá

$$Y = \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = +1.$$

Y la doble fórmula (6) nos dá:

$$Y = \frac{-1 \pm \sqrt{28-3}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3 = +2.$$

Compruébense estos valores en la ecuación dada, y se verá que cada uno la reduce á *cero* quedando solo una unidad.

A resultados idénticos conducirá nuestro procedimiento ya expuesto, fundado en $c^2 = 3bn$; á cuyas fórmulas generales, no hay apenas duda que se llegará por los otros diez y ocho modos descubiertos, y explicados en el cuaderno segundo.

Con lo expuesto queda evidentemente demostrado, que las fórmulas de tercer grado, con su propio radical, lógicamente deducidas, son ciertas no solo en el sujeto, si que también en el objeto, puesto que nos descubren en cada ecuación numérica las raices con que se la formó. Para llegar á estas raices están de más los métodos de tanteo, los geométricos y logarítmicos, puesto que, como se acaba de ver en los ejemplos precedentes, aún en el caso más difícil, el *irreducible* de los algebristas, aquel en que $(27q^2 + 4p^3)$ nos dé cantidad negativa, las fórmulas generales contienen y dan extrictamente las raices con que se haya formado la ecuación. La dificultad no está en lo que valga la indicada expresión, sinó en determinar las raices cúbicas de $(A \pm B\sqrt{-3})$, cuando las tenga *determinadas*, tres, ó una, según los casos. Y cuando la cantidad $(A \pm B\sqrt{-3})$ no tenga raices determinadas, entónces ya sabemos que las tres fórmulas de cada procedimiento contienen exactamente las tres raices de la ecuación.

Pedir más al Algebra, es pedirle que haga imposibles; es pedirle que convierta en determinado lo que es por sí mismo indeterminado, en real lo que es de suyo imaginario, en racional lo que es por naturaleza irracional, en conmensurable lo que por su misma esencia es inconmensurable.

Las ecuaciones de coeficientes irracionales quedan resueltas en las tres fórmulas de cada procedimiento.

Sobre el radical cúbico en la de tercer grado, diráse la última palabra en el libro siguiente.

ARTICULO SEXTO.

La misma ecuación se resuelve por el método sin radicales de grado impar.

Véanse las fórmulas (18),)19) y (20).

Siendo ahora $b=0$, $c=-7$, $n=7$, la fórmula de r (20) será:

$$r=\frac{2s^2+14s\pm\sqrt{28+4s}}{-14\pm s\sqrt{28+4s}}$$

Si hacemos $s=-7$, el radical es cero, y el valor de r es cero.

Entónces $q=\frac{-7}{7}=-1$; en (18) $Y=+1$, y en la doble del 19

será $$Y=\frac{1\pm\sqrt{29}}{-2}=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}.$$

Obsérvese que si en estos dos últimos valores de Y tomamos la raiz entera más próxima de 29, que es 5, se obtienen como antes los dos valores -3 y $+2$: y si queremos aproximarlos no hay más que aproximar la raíz de 29. La ventaja de este procedimiento, por la facilidad y seguridad con que se llega al fin, es incomparable, y lo será mucho más si se fija la atención en que, si con las tres raices halladas, $+1$, $\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$, se construye la ecuación, nos dan directamente iguales los coeficientes b y n; y para que resulte también c, no hay más que hacer indeterminada la primera raíz, en este caso 1, anteponiéndole el ± 1. Al hacer indeterminada esta raíz, siéndolo ya las otras dos, se procede lógicamente, puesto que está demostrado que las tres raices de la ecuación han de ser indeterminadas. Si además se quiere que cada una de las tres raices

$$(Y\pm 1),\ \left(Y-\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right),\ \left(Y+\frac{+1+\sqrt{29}}{2}\right),$$

sea un divisor de la ecuación, no hay más que poner en ésta en vez de b, la suma de las tres raices, que le iguala: en vez de c, la suma de los productos binarios, que le es igual: y en vez de n, el producto de las tres raices, que le es igual.

Vese, pues, con evidencia, que las soluciones de tercer grado son en todos los casos tan claras y precisas como las de segundo.

Debe verse en J. A. Serret, pág. 338 y siguientes, tomo 1.º, cómo se trata esta ecuación, y los rodeos inmensos por donde allí se llega á dos raices aproximadas en décimas.

ARTÍCULO SÉPTIMO.

Se determinan las raices enteras por el método fundado en la relación de las potencias con las series.

En el cuaderno primero están demostradas para el tercer grado estas igualdades:

$$Y^2 = Y + 2(0,\ 1,\ 3,\ 6.....)$$
$$Y^3 = Y + 6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)$$

Entendiéndose que el 2 y el 6 que preceden á los paréntesis, han de multiplicarse en cada caso por el término interior al paréntesis, que corresponda en orden al número de unidades que valga Y.

El primer paréntesis comprende la tercera serie numérica, y el segundo la cuarta.

Esto así, tendremos en la primera ecuación ($Y^3 - 7Y + 7 = 0$)

$$Y^3 = Y + 6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)$$
$$-7Y = -7Y.$$

Y por lo tanto: $Y^3 - 7Y = -6Y + 6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....) \quad = -6.$

Pero como Y vale un término de la segunda serie natural (1 . 2 . 3 . 4....), tendremos:

$$Y^3 - 7Y = \left\{ \begin{array}{l} -6(1,\ 2,\ 3,\ 4.....) \\ +6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....) = -6. \end{array} \right.$$

Ahora se tiene:

$-6 \times 1 + 6 \times 0 = -6$; luego 1 es raíz de la ecuación.

$-6 \times 2 + 6 \times 1 = -6$; luego 2 es raíz de la ecuación.

$-6 \times 3 + 6 \times 4 = +6$; luego 3 es raíz de la ecuación.

El signo del 1, 2, 3, es el mismo que resulta al 6 en estos segundos miembros.

En la segunda ecuación tenemos $(Y^3-6Y+4=0)$

$$Y^3=Y+6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)$$
$$-6Y=-6Y$$
$$Y^3-6Y=-5Y+6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)=-4$$
$$Y^3-6Y=\left\{\begin{array}{l}-5(1,\ 2,\ 3,\ 4.....)\\ +6(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)=-4\end{array}\right.$$

Ahora: $-5\times1+6\times0$ no iguala á -4; luego 1 no es raíz de la ecuación.

$-5\times2+6\times1=-4$; luego 2 es raíz de la ecuación.

$-5\times3+6\times4=9$; luego 3 ya no es raíz, como tampoco 4 y los siguientes.

Vese, pues, que el procedimiento dá las tres raices enteras (ó fraccionarias en su caso), cuando las tenga la ecuación, y una sola cuando solo una tenga la ecuación.

Cuando la ecuación no tenga ninguna raíz racional, este procedimiento nos lo dá á conocer, no dándonos ninguna raíz.

En el segundo ejemplo, determinada la raíz $(Y-2)$, se divide por ella la ecuación, y el cociente exacto (Y^2+2Y-2), nos dá las otras dos raices:

$$Y=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1+\sqrt{3}=-1-\sqrt{3}.$$

La tercera ecuación, aplicándole este método de las potencias, no dá ninguna raíz, como puede comprobarse, y por lo tanto nos demuestra esto que tiene sus tres raices indeterminadas.

El método que precede para *separar* las raices enteras y fraccionarias en la de tercer grado, por la facilidad, rapidez y seguridad con que la separación se consigue, no podrá menos de ser admitido como el mejor de cuantos se conocen hasta ahora, debiendo advertirse que del mismo modo se aplica á las de cuarto y quinto grado, y aun á las siguientes hasta la del grado *n*.

ARTÍCULO OCTAVO.

Continuación á las raices de $(A \pm B\sqrt{-3})$.

Tomemos ahora la ecuación del número (16) que es:

$$8u^3+12u^2-21u=-1 \qquad (16)$$

En ella se tiene

$$8u^3=8u+48(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)$$
$$12u^2=12u+24(0,\ 1,\ 3,\ 6.....)$$
$$-21u=-21u \qquad =-1.$$

Luego:

$$-1(1,\ 2,\ 3,\ 4.....)$$
$$+24(0,\ 1,\ 3,\ 6.....)$$
$$+48(0,\ 1,\ 4,\ 10.....)=-1$$

$-1\times1+24\times0+48\times0=-1$; luego $+1$ es raíz de la ecuación, y por lo tanto $u=1$. El 2, y con mayor razón los siguientes, no son raices, como puede comprobarse.

Dividiendo, pues, la ecuación (16) por la raiz $(u-1)$, el cociente exacto $8u^2+20u-1=0$, nos dá para u los otros dos valores:

$$u=\frac{-5\pm3\sqrt{3}}{4}=\frac{-5+3\sqrt{3}}{4}=\frac{-5-3\sqrt{3}}{4}.$$

Y como en la ecuación (15) es $x^3=u$, tendremos para x:

$$x=-1=\sqrt[3]{\frac{-5+3\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{-5-3\sqrt{3}}{4}}.$$

Poniendo estos valores de x en la del número (13) ó (14), se tendrán los tres correlativos de z.

Con lo expuesto en este libro queda fuera de duda que la ecuación de tercer grado, cualquiera que sea la forma y clase de sus raices, tiene soluciones tan claras y precisas como la de segundo, sin más diferencia que las dificultades propias de su grado.

De las ecuaciones en cuyos coeficientes se presenta algún radical, no hay para qué ocuparse, puesto que sus raices están determinadas en las fórmulas generales de cualquiera de los procedimientos demostrados.

La ecuación, pues, de tercer grado, al que posea regularmente siquiera el Algebra elemental, no puede ofrecerle dudas ni dificultades de ninguna especie, cualquiera que sea la forma en que se presente.

Esto mismo se verá que tiene lugar con todas las de grado superior al tercero.