LAS ECUACIONES NUMÉRICAS

Y SU RESOLUCIÓN POR FÓRMULAS

HASTA LA DEL GRADO N

POR

Manuel Vázquez Prada

LAS GENERALES EN EL LIBRO PRECEDENTE

Resuélvense en este las del tercer grado,
por fórmulas sin radicales,
fórmulas con solo el radical cuadrado
y fórmulas con el cuadrado y cúbico

TODO FUÉ IMPOSIBLE PARA LOS ALGEBRISTAS

El álgebra es la solución por fórmulas
y no habrá otra en adelante

1899
Imprenta LA ECONÓMICA
San Antonio núm. 7
GIJÓN

PRÓLOGO

El esfuerzo persistente de todos los algebristas de nota en tantos siglos de investigar, no pudo hacer que *la solución algebraica de las ecuaciones numéricas*, pasase del segundo grado. Y de ahí como consecuencia, que más allá de este grado, cuya solución por lo fácil, debiera enseñarse en las escuelas elementales, no hubiese sino de nombre *ciencia de las ecuaciones*; teniendo que hacer sus veces, para cubrir tan lastimoso estado, los arbitrarios procedimientos de aproximación, que cada autor arreglaba á su manera, ya para ganarse entre el vulgo ignaro fácil fama, ya para hacer á los alumnos sudar la gota negra inútilmente en las escuelas. Escribir ó hablar de Algebra superior, es decir, del álgebra más allá del segundo grado, era exhibirse como un monstruo de saber algebraico, y dar con esto solo prueba de talento muy profundo, como así de uno lo dijo hace poco al continente americano Juan Valera. Allende como aquende son muchos los que á diario comulgan con ruedas de molino.

Andando en tales manos, bien podían decir los enemigos, que el Algebra como ciencia era un colosal fracaso.

Con la solución algebraica general, del grado n, puesta en el cuaderno precedente, y la de las numéricas por fórmulas inmanentes y trascendentes, en los grados tercero y cuarto, y por las trascendentes desde el quinto al infinito, que se puede estudiar todo en mes y medio, quedarán ahí muy luego como cuentos viejos inaguantables, todas las hueras teorías que como á destajo se fueron produciendo, con el fin principal de que no se viese el aterrador abismo que en la ciencia había en cuanto se pasaba del segundo grado.

Ahora todo está ya á la vista. Y sin embargo, la ignorancia por un lado, y por otro la vanidad y necio orgullo de clase, y en parte también la sórdida codicia, son enemigos tenaces que por lo viejos y duchos en el oficio, ponen cara torva á la verdad que se les entra por casa adentro, y no ceden ni aún á las tres primeras. Pero, pues que *guta cavat lapidem*, con el tiempo todo se andará.

En este libro, para que con lo mucho de una vez no se tenga miedo, se pone solamente la solución de las numéricas de tercer grado, por fórmulas como la de Cardán, con radicales cuadrado y cúbico, por fórmulas con solo el radical cuadrado; y por fórmulas sin radicales.

Estas últimas nos dan sólo, y directamente, las raíces racionales que tenga la ecuación numérica. Y las otras dos, á la vez que dan también raíces racionales, nos dan las irracionales de cada forma respectiva.

Y los tres modos de resolver las numéricas, complétanse mútuamente, y constituyen en junto *la solución algebraica* en los siguientes grados hasta el infinito.

En el cuaderno *Vindicación de la fórmula de Cardán*, puede verse como esta fórmula, desechada, y anatematizada por los algebristas, sirve, según su clase, para resolver las numéricas con toda seguridad y precisión.

En lo tocante á las fórmulas con solo el radical cuadrado, no es extraño en verdad que la Academia las haya mirado como quien ve visiones espeluznantes, puesto que ni la más remota idea tuvieron los grandes maestros de que tales fórmulas pudieran existir. Así fué que hablaron de ellas, por supuesto, tan desacertadamente como de todo lo demás.

De la fórmula sin radicales, del grado n, para las raíces racionales, no hay para qué hablar, puesto que pasó por las manos académicas, como por las de los pobres indios pasaban los bloques de oro que esmaltaban el rico suelo americano. Pero las gentes nuevas que ya están llegando, no sólo arrebatarán ansiosas los ignorados guijarros vagabundos, sinó que avaras revolverán la tierra, para descubrir y recoger los que ésta, cuidadosa, puede guardar aún en sus entrañas. El tiempo es, pues, inexorable, y no hay modo de eludir el cumplimiento de sus fallos.

LA SOLUCIÓN ALGEBRAICA

de las

ECUACIONES NUMÉRICAS

CAPÍTULO PRIMERO

SEGUNDO GRADO

ARTÍCULO I

Propiedades de la fórmula general

La solución de las numéricas en el segundo grado, por la fórmula y método vulgares, la sabe todo el mundo, y por eso aquí no se dirá tocante á este punto, sinó aquello que tenga alguna relación con el modo de resolver algebraicamente en los siguientes grados.

Ante todo, conviene se fije la atención en que, la fórmula general

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad 1$$

es por sí misma *una solución especial para todas las numéricas* de este grado, con sólo poner los coeficientes de éstas en lugar de las letras de la fórmula. Lo cual, según en las *Nociones generales* ya se ha dicho, se verifica de igual modo en todos los grados, y con todas las fórmulas.

En segundo lugar, deberá tenerse también presente, que la fórmula precedente nos da en todos los casos numéricos, las dos raíces únicas de la ecuación, ya sean dos racionales, ya dos irracionales. Lo cual sucede así, debido á que la cantidad subradical ($b^2—4c$), es constantemente *el cuadrado de la diferencia entre las raíces de la ecuación, ó sea, entre los dos valores de* x.

Represéntense los dos valores de x por p y q; y poniendo en la fórmula, en lugar de b, su igual $p+q$, y en lugar de c, su igual pq, resulta debajo del radical $(p—q)^2$.

En las fórmulas inmanentes de los grados tercero y cuarto, encontraremos también una propiedad análoga en las cantidades subradicales del segundo y del tercer grado.

Lo cual es como luego se verá, y contra lo que creían y demostraban los algebristas, lo que hace que aquellas fórmulas *sirvan para la solución de las numéricas.*

Recuérdese que en el precedente libro, (*Solución general*) página 15, se expone el modo de resolver en el segundo grado, fundándose en la relación de las raíces con los coeficientes, por cuyo método se obtienen ya separadas *las dos raíces de la ecuación*, sin pasar por la doble fórmula de la solución vulgar. Debiendo á la vez fijarse la atención en que la solución fundada *en la relación entre raíces y coeficientes*, la domostraban los algebristas *como imposible.* ¡Y eso que en el segundo grado está todo en la esfera del sentido común!

ARTÍCULO II

Solución teórico-analítica, trascendente al infinito, y sólo para las raíces racionales

La independencia entre las raíces racionales y las irracionales, que yo observaba al multiplicarlas entre sí, para construir una ecuación de coeficientes racionales, hacíame entrever como posible, la existencia de un método especial para determinar en la ecuación numérica, las raíces racionales que contenga, sin que en la fórmula propia de tal método, se aprendiese nada acerca de las raíces irracionales. Este método especial fué ya descubriéndose desde el principio, pero sin que se pudiera apreciar entonces que era en realidad como un complemento necesario en la solución Algebraica de la ecuación del grado n.

El tal método, en el segundo grado, se funda en la propiedad siguiente:

El cuadrado de un número entero es igual al mismo número, más dos veces el término de la tercera serie numérica, empezando desde el cero, que corresponda en orden al número de unidades que contenga el número propuesto.

Es decir que, $x^2 = x + 2\ (0, 1, 3, 6, 10, ...)$ 2

Omitiremos aquí la demostración porque es muy fácil, y porque en todo caso se la puede ver en el cuaderno primero de *Lucubraciones algebraicas.*

Si pues en la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ 3

sustituímos el valor 2 de x^2, tendrase

$$(1+b)x = -c - 2\ (0, 1, 3, 6, 10, ...) \qquad 4$$

Y despejando x será: $x = \dfrac{-c-2\ (0, 1, 3, 6, 10, ...)}{1+b}$ 5

cuya fórmula del segundo grado es la que llamaremos *sintético-analítica*, puesto que siendo teórica como la vulgar, fúndase además en el dato analítico expresado en 2.

Su certeza es tan absoluta como la que se tiene en la solución vulgar. Pero desde luego se ve, que sólo puede ser aplicable á las *ecuaciones numéricas*, y en éstas, á determinar las raíces racionales que contengan, puesto que suponiéndose racionales b y c, están excluídos todos los radicales.

La importancia de la fórmula 2, como fundada en método trascendente al infinito, sólo se acabará de comprenderla cuando se llegue á la solución de quinto grado.

Para hacer uso en la práctica, de esta fórmula, es preferible disponerla del siguiente modo, teniendo en cuenta que x representa en cada vez uno de los términos de la segunda serie numérica, ó sea uno de los números naturales, desde el 1 al infinito.

Quitando el denominador en 5, sustituyendo á x la serie que representa, y pasando al primer miembro el segundo término del numerador, se obtiene:

$$\begin{array}{l}(1+b)\,(1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,\ldots\ldots)\\ \quad +2\,(0,\,1,\,3,\,6,\,10,\,\ldots\ldots)=-c\end{array} \qquad 6$$

El tanteo que se aplica en la fórmula ordinaria, consistente en *hallar una raíz cuadrada, sumarla ó restarla con b, y dividir por 2*, está reemplazado en esta por lo que hay que hacer para averiguar con cuál de los términos de la serie superior 6, se verifica la igualdad, multiplicando el término por $(1+b)$, y por 2 á la vez el término que esté debajo; y sumando luego los dos productos ó restando uno de otro según sea el signo de b.

Este tanteo, si no es más fácil que el de la fórmula ordinaria, no es tampoco más difícil, sobre todo teniendo en cuenta las reglas que se dirán.

El número de arriba, con que se verifique la igualdad, es una raíz de la ecuación.

Pongamos como ejemplo, para que todo se vea, la siguiente:

$$x^2-7x+10=0$$

Sustituyendo á b con -7 y á c con 10, será:

$$\begin{array}{l}-6\,(1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\,\ldots\ldots)\\ +2\,(0,\,1,\,3,\,6,\,10,\,15\ldots\ldots)=-10\end{array}$$

Los números que verifiquen esta igualdad, siendo raices de la ecuación, tienen que ser divisores de c, y por lo tanto ahora de 10. Y en consecuencia, sólo esos divisores hay que tantear.

El 1 es divisor de 10, pero á primera vista se sabe que no verifica la igualdad. Y como en consecuencia el 1 no es raíz, tampoco puede serlo el 10, que es el único factor que produce 10, multiplicándole por *uno*.

El 2, divisor de 10, nos da:

$$-6\times2=-12, \text{ y abajo } +2\times1=2;\ -12+2=-10.$$

Luego el 2 es raíz. Y como no hay más que el 5, divisor de 10, que produzca 10, multiplicado por 2, el 5 tiene que ser la otra raíz. En efecto: arriba da, $-6\times5=-30$, y abajo $+2\times10=+20$; y $-30+20=-10$.

El signo de cada raíz *numérica* quedará indicado por este método al formar con ellas los coeficientes.

Si el 2 no hubiese resultado raíz de la ecuación, tampoco lo sería el 5. Y no habiendo más divisores que tantear, quedaría demostrado que la ecuación no tenía raíces racionales. Pero en tal caso, las raíces de la ecuación serían necesariamente los dos irracionales de la fórmula vulgar.

Esto que aquí parece ser un rodeo inútil, ya se verá luego que es lo normal en los siguientes grados hasta el enésimo, y sobremanera ventajoso en los tercero y cuarto.

Si hay quien diga que las raíces racionales pueden ser halladas tanteando directamente sobre la ecuación los números enteros desde el 1 en adelante, se le hará observar que el tanteo sobre la ecuación misma *excluye la intervención de todo método científico;* y por el contrario, el tanteo sobre la fórmula 6, *no es más que la continuación hasta el fin, del procedimiento esencialmente científico que se aplicó para la deducción de la fórmula.*

CAPÍTULO SEGUNDO

LA SOLUCIÓN EN EL TERCER GRADO

ARTÍCULO I

Estado de la cuestión

Los algebristas, teniendo desde siglos en el tercer grado, *la fórmula de Cardán*, no acertaron después de darle vueltas tanto tiempo, á resolver á medio de ella las numéricas del mismo grado. Y como consecuencia de esto la declararon inútil para tal objeto.

En el cuarto grado tenían también la fórmula general antigua de Ferrari; y como al aplicarla á la solución de las numéricas, hubiese en todos los casos necesidad absoluta *de resolver previamente una ecuación de tercer grado*, estando esto tenido por imposible, la fórmula de Ferrari fué también declarada iuútil para la solución de las numéricas.

Todo esto sin darse cuenta, al parecer, de que las dos fórmulas generales contenían cada una de ellas, *una solución especial*, rigurosamente científica, para todas las numéricas de cada grado respectivo, con sólo sustituir á las letras los coeficientes numéricos.

Pero el caso era que, si construían á priori una ecuación, ya de tercero, ya de cuarto grado, con raíces conocidas, puestas al efecto, estas mismas raíces no podían encontrarlas á medio de las dos fórmulas indicadas.

Y por eso decían *que las fórmulas*, por más que las admitían como científicamente deducidas, *no servían para la resolución de las numéricas*.

El error, la aberración de los maestros que tanto investigaron en este asunto, no pudo ser más grande. Y todo por no haber estudiado la cuestión como debían.

Los que ahora quieran ver, en el tercer grado, que es el de que ante todo se va á tratar, cómo se resuelven las numéricas *por la execrada fórmula*, declarada inútil, pueden hacerlo, leyendo el cuadernito intitulado *Vindicación de la antigua fórmula de Cardán*. Por el prólogo enteraranse también, aunque sólo en parte, de las pestes que de tal fórmula decían los grandes algebristas. ¡Pobre ciencia algebraica! ¡Cómo la trataban los maestros más conspicuos!

De la fórmula de Ferrari, para las de cuarto grado, se hablará luego, y se hará ver que sirve de igual modo para la solución de las numéricas.

Aunque el autor de este libro no hubiese hecho más que esto: *la solución por fórmulas de las numéricas de tercero y cuarto grado*, debería bastar, si los algebristas actuales no estuviesen cegados por la vanidad y necio orgullo de clase, para que hubiesen quemado ya en la plaza pública, todos los libros en que se trata de *la solución de ecuaciones más allá del segundo grado.*

Vamos, pues, á ver esa solución en el tercer grado.

La fórmula de Cardán, en un principio, encontrela yo tan impenetrable como pudo parecerlo á cuantos habían intentado antes sacar de ella algún partido. Lo cual fué el motivo de ponerme á buscar otras soluciones generales diferentes, y que hallada una, y luego otra, fuese hallando *hasta diecinueve* con radicales cuadrado y cúbico, y *otras seis* con el cuadrado solo.

ARTÍCULO II

Soluciones directas

Puesto ya á buscar, hacia el año de 1878, en un autor francés, profesor que era en París de Análisis algebraico, vi esta indicación: *Si en la ecuación*

$$Y^3+b_1Y^2+c_1Y+d_1=0$$

fuese $b_1^2=3c_1$, *la ecuación estaría resuelta directamente.*

Lo cual es cierto; pues poniendo en lugar de c_1, su igual $\frac{b_1^2}{3}$, y multiplicando y dividiendo por 3 los coeficientes del segundo y tercer término, la ecuación sería

$$Y^3+3\frac{b_1}{3}Y^2+3\frac{b_1^2}{9}Y+d_1=0$$

Y no hay duda que pasando d_1 al segundo miembro, y añadiendo en ambos $\frac{b_1^3}{27}$, el primer miembro será el cubo de $\left(Y+\frac{b}{3}\right)$. Por lo que, tomando las raíces, sería

$$Y+\frac{b_1}{3}=\frac{\sqrt[3]{b_1^3-27d_1}}{3}$$

con lo cual estaría la ecuación resuelta.

Pero la dificultad está en que la relación indicada entre los coeficientes, no hay modo de establecerla por ninguna de las transformaciones que se pueden hacer según la ciencia.

Y por lo tanto, si la tal relación se diese en una ecuación, la solución consiguiente sería un caso particular, y no la solución general que se buscaba.

Análogas á la relación precedente, encontré yo otras trece, que denominé *soluciones directas*, cada una de ellas para un solo caso particular.

Puede ver el que quiera esas soluciones en el *libro segundo* de «Lucubraciones Algebraicas.»

De las catorce relaciones, tan sólo una puede establecerse por transformaciones; y después de hallada esa, al desarrollarla en un método general, halláronse otras tres, más complicadas en la forma, que también se establecen por transformación.

ARTICULO III

Transformaciones

Hacer que una ecuación dada, sin condiciones aparentes para ser resuelta, llegue por operaciones legítimas á tomar estas condiciones, es lo que se llama *transformacion de las ecuaciones.* Los antiguos transformaban, pero no pudieron llegar á este resultado desde el cuarto grado en adelante. Y aun en las de tercero y cuarto estuvieron durante siglos, limitados, que yo sepa, á las soluciones generales de Cardán y de Ferrari, inútiles para resolver las numéricas, según los tratadistas.

Por la transformación en el tercer grado, no se pudo dar á la ecuación directamente, como ya se dijo, más que una de las catorce relaciones directas mencionadas; pero en cambio se le pudieron dar otras tres diferentes que con la anterior las llamaremos *útiles*, porque con cada una de ellas admite la ecuación varias soluciones. Veamos, pues, cómo son y cómo se preparan *estas cuatro relaciones entre los coeficientes.*

Las relaciones, por de pronto, son por su orden las siguientes; bajo el supuesto de que las letras b, c, n, son los coeficientes de la *ecuacion transformada.*

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^a & c^2=3bn \\ 2.^a & 4b^2c=b^4+c^2+6bn \\ 3.^a & 5b^2c=b^4+4c^2+6bn \\ 4.^a & b^4+c^2=2b^2c+12bn \end{array}\right\} \qquad 7$$

Véase ahora el modo de establecer estas relaciones. Sea la ecuación general ya puesta

$$Y^3+b_1Y^2+c_1Y+d_1=0 \qquad 8$$

Haciendo en ella $Y=x+s$, y sustituyendo será

$$\begin{array}{r|r|l} x^3+3s & x^2+3s^2 & x+s^3=0 \\ +b_1 & +2b_1s & +b_1s^2 \\ & +c_1 & +c_1s \\ & & +d_1 \end{array} \qquad 9$$

Expresando los coeficientes de esta, desde el segundo término, por b, c, n, respectivamente, tendremos

$$x^3+bx^2+cx+n=0 \qquad 10$$

En la cual se tiene $b=3s+b_1$

$$c=3s^2+2b_1s+c_1 \qquad 11$$

$$n=s^3+b_1s^2+c_1s+d_1$$

Poniendo estos valores de b, c, n, en cada una de las cuatro relaciones 7, y ejecutando luego en cada una las operaciones indicadas, verase que en todas ellas, desapareciendo los términos con terceras y cuartas potencias de s, queda para ésta una ecuación de segundo grado, á medio de la cual se realiza la relación respectiva en 7, ó sea entre los coeficientes de la ecuación 10, que es la transformada de la propuesta en 8.

La primera relación 7 da lugar á nueve soluciones diferentes para la ecuación 10; la segunda relación produce cinco soluciones; la tercera dos; y la cuarta dos; todas ellas con radical cúbico en la fórmula.

En el citado cuaderno segundo de «Lucubraciones Algebraicas,» pueden verse todas estas soluciones, habiendo algunas entre ellas que se fundan *en la relacion de las raíces con los coeficientes.*

A continuación de las dieciocho mencionadas, puede verse otra con radical cúbico, fundada indirectamente en la primera relación 7.

ARTÍCULO IV

Una solución de tercer grado fundada en la relación $c^2=3bn$

§. 1.º

Exposición del método y deducción de las fórmulas

Siendo esta relación la más breve entre las cuatro, vamos á desarrollar, fundándonos en ella, una solución completa para la ecuación general de x, puesta en el número 10 que es

$$x^3+bx^2+cx+n=0 \qquad 12$$

Poniendo en $c^2=3bn$ los valores 11 de b, c, n; ejecutando las operaciones indicadas, y ordenando para s, resulta

$$(b_1^2-3c_1)s^2+(b_1c_1-9n_1)s+(c_1^2-3b_1n_1)=0 \qquad 13$$

De donde se tiene que

$$s=\frac{-(b_1c_1-9n_1)\pm\sqrt{(b_1c_1-9n_1)^2-4(b_1^2-3c_1)(c_1^2-3b_1n_1)}}{2(b_1^2-3c_1)} \qquad 14$$

Si en 12 se ponen ahora los valores 11 de b, c, n, y en lugar de s el valor que le resulta en 14, no cabe duda que los coeficientes de la ecuación 12 tienen entre sí la relación $c^2=3bn$.

De esta relación resulta: $n=\frac{c^2}{3b}$. Sustituyendo á *n* este valor en 12, multiplicando todo por $\frac{3c}{b^2}$, pasando el primer término al segundo miembro, añadiendo en ambos x^3, tomando la raíz cúbica en los dos, y despejando x, nos da

$$x=\frac{c}{-b+\sqrt[3]{b(b^2-3c)}}=m \qquad 15$$

Esta es la fórmula que en este método, aunque de forma diferente, corresponde á la antigua del método de Cardán.

Poniendo otra vez en 12 el valor de $n=\frac{c^2}{3b}$, y dividiendo la ecuación por la raíz ya conocida $(x-m)$, (15), resulta en el cociente exacto la de segundo grado

$$x^2+(b+m)x+(c+bm+m^2)=0 \qquad 16$$

La cual nos da las otras dos raíces de la ecuación de x.

Haciendo $(b+m)=C$ y $(c+bm+m^2)=C_1$, será en 16

$$x=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4C_1}}{2} \qquad 17$$

Y como en la ecuación propuesta 8, hemos hecho $Y=x+s$, los tres valores de Y, teniendo en cuenta el 15 de x, con los dos de 17, serán:

A estos tres valores generales de Y suele dárseles el nombre de *fórmulas*; por más que los algebristas al aplicar ese nombre en el método de Cardán, parece como que prescinden de las dos últimas, pretendiendo equivocadamente que la primera debía dar las tres raíces de la ecuación.

Conviene se tenga en cuenta que la cantidad subradical cúbica, $b(b^2-3c)$, sustituyendo los valores que en 11 representan, $b=3s+b_1$, y $c=3s^2+2b_1s+c_1$, se convierte en esta otra:

$$b(b^2-3c)=(3s+b_1)(b_1^2-3c_1) \qquad 19$$

Si los tres valores de Y se pasan uno á uno al primer miembro, tendranse *las tres raíces* de la ecuación propuesta en 8, las cuales multiplicadas entre sí *la reproducen exactamente*, y constituyen la solución total de la ecuación.

Esta propiedad de las raíces prueba por modo incontestable, que la solución general es cierta, y el procedimiento legítimo en absoluto.

Y si en esto estuvieron conformes los algebristas, también lo estuvieron en considerar á la fórmula general, *como inútil para la solución de las numéricas.*

Obsérvese ahora, y compruébelo quien tenga duda, que la cantidad subradical cúbica, y la cuadrada, del método que precede, aunque deducidas de tan diferente manera, *son las mismas que las de los radicales de la fórmula de Cardán, después de reponer en ella el segundo término que se quitó de la ecuación para deducir la fórmula.*

Está correspondencia íntima de las cantidades subradicales, da como resultado, que cuanto se diga de éstas en las fórmulas nuevas, ha de tenerse como dicho para las fórmulas de Cardán.

Los algebristas, para desechar la fórmula por inútil, fundábanse en que debajo del radical cuadrado se presentaba una cantidad, que por su forma, podía ser *imaginaria*, en cuyo caso le daban el nombre de *irreducible.*

Pero no se fijaron en que eliminado el radical cúbico, *suponiendo esto posible*, el radical cuadrado, por estar en el polinomio dos ó más veces repetido, podría desaparecer por *destrucción* de términos, ó por simplificación de quebrados. Y entonces el caso *irreducible* no existía.

drá que ser de la misma forma que su cubo. Expresándola en general por $x_1 \pm z_1 \sqrt{-3}$, tendrase

$$(x_1 \pm z_1\sqrt{-3})^3 = A \pm B\sqrt{-3} \qquad 28$$

Efectuando el cubo del primer miembro, é igualando con A la suma de los términos racionales, y con $B\sqrt{-3}$ la suma de los irracionales y suprimiendo el radical en ambos miembros se obtiene,

$$x_1^3 - 9\,z_1^2 x_1 = A \qquad 29$$

$$\pm 3z_1^3 \mp 3x_1^2 z_1 = \pm B \qquad 30$$

Y teniendo presente que B es divisible por 3, haciendo $\frac{B}{3} = B_1$ será esta última, expresando sólo el primero de los signos de cada término

$$z_1^3 - x_1^2 z_1 = B_1 \qquad 31$$

Siendo en 28 $\quad x_1 \pm z_1\sqrt{-3} = \sqrt[3]{A \pm B\sqrt{-3}}$

será también $\quad x_1 + z_1\sqrt{-3} = \sqrt[3]{A + B\sqrt{-3}}$

y $\quad x_1 - z_1\sqrt{-3} = \sqrt[3]{A - B\sqrt{-3}}$

Multiplicando ordenadamente estas dos últimas igualdades obtiénese:

$$x_1^2 + 3z_1^2 = \sqrt[3]{A^2 + 3B^2} \qquad 32$$

Y como $A^2 + 3B^2$ es un cubo perfecto, puesto que es el producto de dos cubos, expresando la raiz por R' será:

$$x_1^2 + 3z_1^2 = R^1 \qquad 33$$

Ahora, si en 29, 31 ó 33, se despeja una de las dos incógnitas y se sustituye en cualquiera de las otras, aparécese para la otra incógnita una ecuación de tercer grado, *tan difícil de resolver como la propuesta.*

Lo cual fué el verdadero motivo de que los algebristas renunciaran á buscar las raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$; y en consecuencia, á resolver las numéricas por la fórmula de Cardán, única que conocieron. Y de seguir su ejemplo, no hay duda que la cuestión así estaría eternamente.

Pero es el caso que la cantidad R', por ejemplo, es facilísima de calcular tan luego se ponga una ecuación numérica, puesto que siempre se tiene

$$R'=4(b_1^2-3c_1) \qquad 34$$

Háganse las sustituciones correspondientes en el valor de s, y luego debajo del radical cúbico de la fórmula, y se verá que esto es cierto.

Así, pues, en el caso actual será en 33

$$x_1^2+3z_1^2=4(4^2+3.11)=196 \qquad 35$$

La ecuación 31, más sencilla que la 29, puede escribirse así:

$$z_1(z_1+x_1)(z_1-x_1)=B_1 \qquad 36$$

Y como B_1 es en 25, $4\times120=480$, será en esta última

$$z_1(z_1+x_1)(z_1-x_1)=480 \qquad 37$$

Si para hallar directamente la raíz cúbica de $A\pm B\sqrt{-3}$, por método parecido al de los números enteros, ni por otro diferente, fueron ineficaces todos los esfuerzos que se hicieron, no sucede lo mismo auxiliándose del análisis y valiéndose para ello de las ecuaciones 35 y 37. Pero entendiéndose esto con relación á las ecuaciones que tengan raíces racionales.

La 35 puede escribirse así:

$$3z_1^2=196-x_1^2 \qquad 38$$

En la cual se ve que, restando sucesivamente de 196, los cuadrados desde el 1 al mayor contenido en 196, aquellos restos que, siendo divisibles por 3, den un cociente que sea cuadrado perfecto, nos darán un valor de z_1 en la raíz de este cuadrado, siendo el correlativo de x_1, la raíz del cuadrado que se restó de 196.

Este trabajo experimental será siempre menor que el que exigiría el extraer directamente la raíz cúbica de $A+B\sqrt{-3}$, si se conociera el método para hacerlo, bajo el supuesto de ser cantidad irracional.

En la ecuación 37 vese también desde luego que, 480 es igual á un producto de tres factores tales que, dado

Mas ello es que pudiendo haber casos *no irreducibles*, ningún algebrista llegó, sin embargo, á resolver ecuaciones numéricas por la fórmula de Cardán, lo cual prueba bien claramente que alguna otra dificultad, más seria acaso, habría que vencer para llegar á la resolución de las numéricas. Esa dificultad es la que ante todo está á la vista, y consiste *en que se pueda eliminar ó no* de la fórmula el radical cúbico primero, y después el cuadrado, cuando así lo reclame la forma esencial que corresponda á las raices de cada ecuación.

Pues bien: esa dificultad, imposible para los algebristas, la venció el autor de «Lucubraciones algebraicas,» encontrando las raíces cuadrada y cúbica de las cantidades subradicales, *en función de las raices de la ecuación propuesta*.

§. 2.º

SE RESUELVE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA POR LAS FÓRMULAS QUE PRECEDEN

Con la brevedad posible, sin faltar á la claridad, vamos á resolver una ecuación numérica, por las fórmulas precedentes con radical cúbico, para que desde luego se vaya formando idea de que las tales fórmulas, á despecho de los grandes maestros, *sirven para la resolución de las numéricas*. Convendrá tener á la vista el Cuaderno 4.º de «Lucubraciones», pág. 7 y siguientes, pues allí se desarrolla el procedimiento con todos los detalles.

Sea la ecuación $Y^3+4Y^2-11Y-30=0$ 20

Si en el radical cúbico de x, núm. 15, se sustituyen los valores 11 de b y c, se obtiene como ya se ha dicho:

$$\sqrt[3]{b(b^2-3c)}=\sqrt[3]{(3s+b_1)(b_1{}^2-3c_1)} \qquad 21$$

Expresando los valores de Y por p', q', r', y sustituyendo estos valores ó sea $b_1=p'+q'+r'$, $c_1=p'q'+p'r'+q'r'$, $n_1=p'q'r'$, en el radical de s, la raiz cuadrada de la cantidad subradical es

$$(p'-q')(p'-r')(q'-r'\sqrt{-3} \qquad 22$$

Cuya cantidad es, como se ve, siempre de forma imaginaria.

Y haciendo la sustitución de b_1, c_1 y s, en el radical del segundo miembro núm. 21, resulta,

$$\sqrt[3]{b(b^2-3c)}=p'-\frac{q'+r'}{2}\pm\frac{(q'-r')\sqrt{-3}}{2} \qquad 23$$

Véase la deducción de estas igualdades en el cuaderno 4.°, y en el 2.°, página 42.

Conforme con esto, sustituyendo en el valor 14 de s, los de b_1, c_1, n_1, tomados en la ecuación 20, ó sea: $b_1=-4$, $c_1=-11$, $n_1=-30$, se tiene

$$s=\frac{226\pm120\sqrt{-3}}{2.49} \qquad 24$$

Y sustituyendo en el segundo miembro de 21 los valores de b_1, c_1, n_1, haciendo operaciones nos da

$$\sqrt[3]{b(b^2-3c)}=\frac{\sqrt[3]{-1144\pm12.120\sqrt{-3}}}{2} \qquad 25$$

Haciendo $-1144=A_1$ y $12.120=B$, será

$$\sqrt[3]{b(b^2-3c)}=\frac{\sqrt[3]{A\pm B\sqrt{-3}}}{2} \qquad 26$$

Y como la primera fórmula de Y, en 18, es

$$Y=s+\frac{c}{-b+\sqrt[3]{b(b^2-3c)}} \qquad 27$$

no hay duda que, si de esta ha de poder salir un valor racional para Y, cuando así los tenga en su ecuación, lo primero que se necesita es que desaparezca el radical cúbico; y puesto que está solo una vez en la fórmula, la desaparición no podrá verificarse si no se determina la raíz cúbica de $A\pm B\sqrt{-3}$. Lo cual fué *la dificultad insuperable* para los algebristas.

Lo que esta dificultad dió que hacer al autor de «Lucubraciones», hay que verlo en los cuadernos ya citados más atrás. Aquí se pone no más que lo necesario para que se vea como se verifica la solución de las numéricas.

Es indudable que la raíz, ó raices de $A\pm B\sqrt{-3}$ tenuno, z_1, los otros dos han de ser ese mismo, sumando y restando de él una misma cantidad. Esta cantidad ó número será lo que valga x_1.

Los valores que se encuentren por cualquiera de los dos caminos, para ser buenos han de satisfacer la ecuación del otro, y también la 29.

Si no se encontrase ningún par de valores que satisfaga las tres, será prueba de que la ecuación propuesta no tiene raíces racionales.

Cada cual puede escoger el método que más le agrade entre las ecuaciones 37 y 38.

Desde luego, para este caso, nos atendremos á la última.

Obsérvese que no siendo 196 múltiplo de 3, y debiendo serlo cada resto que haya de dar una solución, se descuentan, desde luego, los cuadrados que son múltiplos de 3.

$$196-1=195; \text{ dividido por } 3=65$$

$$196-4=192; \quad \text{»} \quad \text{por } 3=64=8^2$$

1.ª solución. De donde sale $z_1=8$, $x_1=2$

$$196-16=180; \text{ dividido por } 3=60$$

Los cuadrados 25, 64, y 100, dan los cocientes 57, 44, y 32, que no son cuadrados.

$$196-49=147; \text{ dividido por } 3=49.$$

Lo cual daría $r_1=7$ y $x_1=7$, cuya solución daría en la ecuación 37

$7(7+7)(7-7)=480$, lo que es absurdo, puesto que el primer miembro es cero.

$$196-121=75; \text{ dividido por } 3=25=5^2$$

2.ª solucción. De donde sale $z_1=5$, $x_1=11$.

$$196-169=27, \text{ dividido por } 3=9=3^2$$

3.ª solucción. De donde sale $z_1=3$, $x_1=13$.

En el cuaderno 4.°, página 22, puédese ver las fórmulas de solución directa, sacadas de las raíces de $A\pm B\sqrt{-3}$, en tal modo que, conocida una de estas raíces, obtiénense con ella las tres de la ecuación, sin tener que acudir á las fórmulas generales.

Expresándose las raíces de la ecuación ó valores de

Y por p', q', r', se relacionan del siguiente modo con las raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$

$$p' = \frac{b_1 + x_1}{3}$$

$$q' = \frac{2b_1 - x_1}{6} + \frac{z_1}{2} \qquad k$$

$$r' = \frac{2b_1 - x_1}{6} - \frac{z_1}{2}$$

De suerte que, con una cualquiera de las tres raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$, puestas en estas igualdades, obtiénense las tres de la ecuación numérica, *cuando sean todas racionales*; y si no lo es ninguna, ó solo es una racional, ninguna puede resultar en estas igualdades. Y no puede, porque de resultar una tendrían que resultar las tres.

Poniendo en las fórmulas k el valor de b_1 en 59, y luego los pares de los valores que aquí proceden para x_1 y z_1, se verá que con cada uno de éstos aparecen las mismas tres raíces de la ecuación 53, alternando con cada uno de los pares x_1 y z_1.

Hay que comprobar sin embargo los tres pares de valores que preceden, en la igualdad 37.

El par primero da, $8(8+2)(8-2)=480=8.10.6$ 39

La segunda da $5(5+11)(5-11)=-480=5.16\times-6$ 40

La tercera da $3(3+13)(3-13)=-480=3.16\times-10$ 41

Recuérdese que 480 pueden ser en su ecuación 37 positivo ó negativo.

Comprobadas las tres raíces de $A \pm B\sqrt{-3}_1$ en la ecuación 29 resultan todas exactas.

Ahora falta ver cómo con estas raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$, se obtienen los valores de Y en su ecuación 20.

La primera fórmula de Y en 18 es

$$Y = s + \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}} \qquad 42$$

Sustituyendo al radical la primera raíz, número 39 que es $\frac{2 \pm 8\sqrt{-3}}{2}$ (véase 26); y sustituyendo también los valores 11 de b y c, resulta efectuando operaciones:

$$Y=s+\frac{3s^2+2b_1s+c_1}{-3s-b_1+1\pm 4\sqrt{-3}}=\frac{5s-11\pm 4s\sqrt{-3}}{-3s-3\pm 4\sqrt{-3}} \qquad 43$$

Poniendo en el último quebrado el valor de s, y reduciendo los números racionales, nos da

$$Y=\frac{-384\pm 300\sqrt{-3}\mp 452\sqrt{-3}}{192\mp 180\sqrt{-3}\pm 196\sqrt{-3}} \qquad 44$$

En esta fórmula, no destruyéndose los radicales por la igualdad que falta de los coeficientes arriba y abajo, si ha de resultar un valor racional, se necesita que el numerador sea divisible por el denominador, y que el cociente sea racional.

Al efecto, ya se ve que el término racional de arriba, es doble que el de abajo.

Esto ya nos indica que de las muchas combinaciones de signos, hasta dieciseis aparentemente, que pueden hacerse en el quebrado, solo producirán cantidad racional, aquellas que den arriba cooficiente doble que el de abajo.

Si se restan arriba y abajo, como parece que indican los signos, no resulta arriba el coeficiente doble que se necesita; como tampoco resulta si arriba se resta y abajo se suma, ó arriba se suma y abajo se resta.

No quedan, pues, más combinaciones probables, que las de sumar arriba y sumar abajo.

Y en efecto. Tomando arriba *más* con *más*, y abajo, *menos* con *menos*, resulta

$$Y=\frac{-384+752\sqrt{-3}}{192-376\sqrt{-3}}=\frac{-2(192-376\sqrt{-3})}{192-376\sqrt{-3}}=-2 \qquad 45$$

Tomando arriba *menos* con *menos*, y abajo *más* con *más*, resulta

$$Y=\frac{-384-752\sqrt{-3}}{192+376\sqrt{-3}}=\frac{-2(192+376\sqrt{-3})}{191+376\sqrt{-3}}=-2 \qquad 46$$

Es decir, que la fórmula nos da dos veces el mismo valor racional para Y; siendo inútiles para el presente caso, los demás valores que contiene porque son todos de forma irracional.

Conviene que la atención se fije en lo que sucede con la fórmula 44. Contiene un valor racional para Y. Mas, para que ese valor resulte de ella, hay que tomar arriba y abajo, los dos términos del radical, con signo contrario al que viene indicado por el procedimiento. Pues bien, según Echegaray, el de profundo talento matemático al decir de Juan Valera, no se podrían tomar sinó, *primero* con *primero* y *segundo* con *segundo*, arriba y abajo. Y precisamente, como se acaba de ver, para que resulte el valor que tiene Y, único racional, hay que tomar los signos arriba y abajo, en sentido contrario á lo que él con tenacidad inaudita pretendió.

El sostener yo lo que ahora la realidad, con su elocuencia brutal, pone á la vista de todo el mundo, me costó tener que aguantar pacientemente, para que él, el profundo algebrista, no abandonara desde luego la contienda, toda la retahila de epítetos corteses, que hay desde tonto hasta bárbaro y salvaje.—Véase en el libro anterior, «Objecciones y su refutación.»

Si la ecuación dada se divide por la raíz conocida Y+2, el cociente exacto que es

$$Y^2+2Y-15=0 \qquad 47$$

dará los otros dos valores de Y que son —5 y +3.

Pero atendiendo á que aquí se trata de que se vea con evidencia *la solución por fórmulas en el tercer grado*, y puesto que el camino ya está indicado, debe cada uno andar por él hasta que lo vea todo.

Poniendo la raíz primera de $A\pm B\sqrt{-3}$, en la segunda y tercera fórmulas de Y, número 18, tendranse en éstas los otros dos valores de Y, —5 y +3, uno en cada una.

Y poniendo sucesivamente las otras dos raíces de $A\pm B\sqrt{-3}$, en las tres fórmulas de Y, obtendranse con cada una los mismos tres valores de Y; alternando de modo que en cada fórmula aparezcan los tres valores, uno de cada vez.

No se pone aquí ese trabajo, por confiar en que los lectores no resistirán á la curiosidad de hacerlo y verlo todo por sí mismos.

Hallar los tres valores de Y, á la vez, en su primera fórmula, fué no más que una pretensión inocente de los algebristas, seducidos por lo que observaban en el segundo grado.

Téngase presente que el método que precede, con radical cúbico y cuadrado, resuelve, como se acaba de ver, las numéricas de tres raíces racionales.

En lo que toca á las de *una racional con dos irracionales cuadradas*, ó *tres irracionales*, dirase lo procedente después que se vea en el artículo siguiente la solución de una numérica por las fórmulas *en que sólo entra el radical cuadrado.*

Sería de oir lo que diría el malogrado Abel, autor de la famosa demostración de imposibilidad, si allá donde estuviere, le presentasen de repente la solución general que precede, y de seguida la trascendente al infinito con sólo el radical cuadrado.

ARTÍCULO V

Solución de ecuaciones numéricas por las fórmulas sin radical cúbico

§. 1.º

FÓRMULAS YA CONOCIDAS

Habiendo dicho la Academia, ó quien habló por boca de ella, que la ecuación de tercer grado no estaba resuelta *por las fórmulas sin radical cúbico*, y estando hecha esa solución con evidencia incontrastable, como general, en el libro precedente, pág. 25 y siguientes, va á verse ahora como por esa misma solución general y por sus fórmulas, se resuelven las numéricas, con igual precisión y claridad que las de segundo grado por su fórmula respectiva.

Y como esto fué también negado por la Academia ó por la estulta Pitonisa que se ocultó detrás de ella, resultará palmario que la Academia en esto de las ecuaciones no dijo más que disparates.

Las fórmulas del procedimiento, página 29 de dicho libro anterior, son.

$$\left.\begin{array}{l} Y=\dfrac{-1+rq}{q} \\[2ex] Y=\dfrac{1-bq-rq\sqrt{(1-bq-rq)^2-4sq^2}}{2q} \\[2ex] Y=\dfrac{1-bq-rq-\sqrt{(1-bq-rq-4rq^2}}{2q} \end{array}\right\} \quad 48$$

La fórmula de los valores de r, página 28 del libro anterior, es

$$r=\frac{bn+2s^2-2cs\pm n\sqrt{b^2-4c+4s}}{bs-2n\mp s\sqrt{b^2-4c+4s}} \qquad 49$$

Para q tomaremos, por ser más sencillo, el valor que le resulta en la igualdad 5, página 27, que es

$$q=\frac{s}{rs+n} \qquad 50$$

Obsérvese, que igualando este valor con el segundo de q, núm. 8, pág. 27 ya citada, resulta para r la misma fórmula ya puesta aqui en 49.

§. 2.°

Relación entre las pórmulas

Las fórmulas generales del número 18 y las del número 48 en este libro, son por sí mismas la solución que llamaremos *absoluta*, de todas las ecuaciones numéricas de este grado, con sólo poner en las fórmulas los coeficientes numéricos en lugar de los literales. Las del número 18 darán raíces de forma irracional con radical cúbico y cuadrado, y las del número 48 raíces de forma irracional con solo el radical cuadrado.

Las del número 48 son de forma análoga á las del número 18, cuando en éstas puede ser eliminado el radical cúbico. Pero entonces, unas y otras podrán convertirse en racionales, cuando también se elimine el radical cuadrado.

§. 3.°

Formas de las raíces numéricas en el tercer grado

Por lo que va dicho, se habrá comprendido ya que las raíces de la ecuación numérica de tercer grado, han de ser de una de estas formas: *Tres racionales; dos irracionales cuadradas con una racional;* ó *tres irracionales*, como las generales del número 18 con radical cúbico, ó bien *tres irracionales*, como las del número 48 sin radical cúbico, pero sí con el cuadrado, puesto que entra en los valores de r y de q.

Inténtese construir una ecuación de coeficientes racionales, con raíces de otra forma, y se verá que no se puede.

§. 4.°

Una solución numérica por las fórmulas 48

Sea la ecuación $Y^3+2Y^2-68Y+120=0$ 51

Obsérvese que ahora no se trata de si las raíces de esta ecuación serán más ó menos fáciles de descubrir, sinó solamente de hacer ver que las raíces con que está formada, se descubren con toda precisión á medio de las fórmulas 48.

Esa es la cuestión que se ventila, y nada más. Poniendo en la primera fórmula 48 el valor 50 de q, se obtiene,

$$Y=-r+r-\frac{n}{s} \qquad 52$$

En esta fórmula se ve que en general puede desaparecer el valor r; pero si se atiende á que r en 30 puede tomar cuatro valores, poniendo éstos uno á uno en 52, en lugar de —r, y de +r, se verá que con dos de esas combinaciones, no desaparece r de la fórmula 52.

Los valores de las incógnitas auxiliares, no es arbitrario el aceptar unos ú otros, nó, sinó que todos deben ser, uno á uno, tenidos en cuenta.

Suponiendo ahora que r desaparece de la fórmula, sin atender á sus valores individuales, quedará

$$Y = \frac{-n}{s} \qquad 53$$

En este caso no hay duda que lo único que falta es averiguar el valor que corresponde á s para que $\frac{-n}{s}$, sea un valor de Y.

Por de pronto ya se ve que, siendo n el producto de los tres valores, á s le corresponde ser el producto de dos, á fin de que el cociente sea el otro valor.

Ya queda dicho que s es disponible, y se le puede dar el que convenga.

Sentado esto, y teniendo en cuenta que r puede en general desaparecer por sí misma de la fórmula 52, no hay duda que un valor bueno de s, deberá reducir á *cero* el numerador de r en su fórmula 49.

Para limitar el número de valores aplicables á s, basta fijarse en que, siendo n igual á 120, y siendo 120 $=1.120=2.60=3.40=4.30=5.24=6.20=8.15=10.12$, los valores de s no pueden ser más que uno de cada uno de estos productos binarios.

Este tanteo sobre los números es el único que hay en este procedimiento. No debiéndose perder de vista, que aun en el segundo grado, con ser tan simple, hay que hacer el tanteo de hallar una raíz cuadrada, cifra á cifra, sumar y restar la raíz con el valor anterior de b, y luego dividir por 2.

Aun aquí no se tiene que ir á ciegas para fijar el valor ó valores que correspondan á s en cada caso.

En el presente se sabe desde luego qne 120 no es valor de s, puesto que el 1 no es raíz de la ecuación. Y por consiguiente, tampoco pueden ser valores de s ni el 2 ni el 3 ni el 5. Para ver entre los demás cual podrá serlo, se tiene ante todo que el primer efecto que ha de producir el que lo sea, es hacer que la cantidad subradical en r sea cuadrado perfecto; y el que tal haga, ha de convertir luego en *cero* el numerador todo.

Pongamos pues en el numerador los valores de $b=2$, y de $c=-68$, y de $n=120$. Con lo cual será

$$r = \frac{240+2s^2+136s \pm 120\sqrt{276+4s}}{\qquad} \qquad 54$$

Dando á s el valor +60, resultaría debajo del radical 516 que no es cuadrado perfecto. Y dando á s el valor —60, queda debajo del radical $276-240=36=6^2$. Luego el valor —60 puede ser bueno para s. Falta que reduzca á *cero* el numerador.

Dando, pues, á s el valor —60, y tomando el radical el valor 6, el numerador de r se transforma en

$$r=\frac{240+7200-8160+720}{}=0 \qquad 55$$

Luego siendo $s=-60$, será $-n=-120:-60=+2$ y por lo tanto se tiene que una raíz de la ecuación propuesta es $Y-2=0$.

Y si ahora se divide por esta raíz la ecuación dada, el cociente $Y^2+4Y-60$, dará las otras dos raíces.

Pero como ahora se trata de saber lo que dan de sí las fórmulas 48, hay que ver si hallada una raíz en la primera, resultan las otras dos en las fórmulas segunda y tercera de dicho número.

Para lo cual, suprimiendo en el valor 50 de q, el término rs que es *cero* y poniendo los valores de $n=120$ y de $s=-60$, resulta

$$q=\frac{s}{n}=\frac{-60}{120}=-\frac{1}{2} \qquad 56$$

Sustituyendo en las fórmulas 48, segunda y tercera, los valores de b, q, s, y suprimiendo los términos de r, tendrase

$$Y=\frac{1+1\pm\sqrt{2^2+60}}{2\times-\frac{1}{2}}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{-1}=-2\mp8=-10=+6 \qquad 57$$

Que son precisamente los otros dos valores de Y.

Debe observarse, para evitar dudas, que el valor $-\frac{1}{2}$ sacado para q de la igualdad 50, es uno de los dos que tiene en su fórmula segunda del número 8, página 27. En efecto, suprimiendo los términos de r, y sustituyendo los valores de b, c, s, queda

$$q=\frac{2\pm6}{-136+120}=\frac{2\pm6}{-16}=\frac{1\pm3}{-8}=-\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \qquad 58$$

Pero el valor de r no es *cero* solamente con el valor —60 para s, sino que lo es tambien con los de s, —20 y

+12, que salen de los productos $120=6\times20$ y $120=10\times12$. Haciendo con éstos las demás operaciones, como con el —60, llégase al mismo resultado que con el valor —60; pero dándose en la primera fórmula 48, el valor de Y, +6, con el —20 de s, y el valor de Y, +2, con el +12 de s, y no se encontrarán para s más valores que anulen el valor de r.

§. 5.º

Otra solución numérica por las fórmulas 29
Una raíz racional con dos irracionales cuadradas

En el párrafo precedente se acaba de ver que por el procedimiento y fórmulas 29, se resuelven las ecuaciones numéricas, cuando sean éstas *de tres raíces racionales*. Veamos ahora como se resuelven también las de *una raíz racional con dos irracionales cuadradas*.

Sea la ecuación $Y^3-7Y^2+22Y-30=0$ 59

Tenemos que $30=1\times30=2\times15=3\times10=5\times6$ 60

Poniendo en el numerador de r, los valores de b, c, n, será:

$$r=\frac{210+2s^2-44s\pm30\sqrt{-39+4s}}{} \qquad 61$$

No siendo el 1 raíz de la ecuación, tampoco el 30 puede ser valor de s. Y no siendo el 1 raíz, no pueden ser valor de s ni el 2×1, ni el 3×1, ni el 5×1, puesto que el valor de s ha de ser el producto de dos raíces. Y solo quedan de los factores 60, como valores probables de s, los 15, 10 y 6.

Poniendo en el radical del numerador de r, los valores $b=-7$, y $c=22$, resulta la cantidad $-39+4$ s. Cuya cantidad no es cuadrado perfecto dando á s el valor +15, ni el —15. Ni tampoco es tal cuadrado con el valor de s, +6, ni —6.

Pero dando á s el valor +10 resulta debajo del radical, $-39+40=1$, que es cuadrado perfecto.

Poniendo en r fuera del radical, los valores de $b=-7$, $c=22$ y $n=-30$, resulta

$$r=\frac{210+2s^2-44s\pm30\sqrt{-39+40}}{\quad}$$

Y poniendo $+10$ en lugar de s, será:

$$r=\frac{210+200-440\pm30\times1}{\quad}=0 \qquad 62$$

Luego; si s vale $+10$, sera $Y=\frac{+30}{10}=+3$. Que es la única raíz racional que tiene la ecuación.

Suprimiendo los términos de r en la segunda y tercera fórmulas 48, y poniendo los valores de b, s, y $q=\frac{s}{n}=\frac{10}{-30}=-\frac{1}{3}$ será

$$Y=\frac{-\frac{4}{3}\pm\sqrt{-\frac{24}{9}}}{-\frac{2}{3}}=\frac{-4\pm2\sqrt{-6}}{2}=2\pm\sqrt{-6} \qquad 63$$

Estos mismos dos valores de Y se obtienen dividiendo la ecuación dada por la primera raíz $Y-3$, y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta en el cociente.

Con lo cual queda con evidencia demostrado que este procedimiento, con sólo el radical cuadrado, además de contener una solución general tan legítima como la del procedimiento con radical cúbico, sirve, en relación á las numéricas, para tanto como éste; puesto que si éste nos da las raíces á priori de la ecuación *de tres raíces racionales*, y de la que tenga *tres irracionales cúbicas*, el otro nos da también las de *los primeros* y los de la ecuación de *una racional con dos irracionales cuadrados*. Y si el primero no da esta clase de raíces, el segundo no da las tres raíces cúbicas.

El primero no da esta combinación de raíces, porque cuando la ecuación las tiene tales, no se puede eliminar el radical cúbico. Y á su vez, el segundo método, no puede dar la combinación de *tres raíces irracionales cúbicas*, porque falta el radical cúbico en las fórmulas. Esto último se ve á simple vista; y el dato anterior le tendrá que observar el que estudie por sí mismo el otro método, con aplicación á las numéricas.

Pero no se ha de perder de vista que las fórmulas de cada método son siempre *una solución especial* para las numéricas de su grado, con sólo sustituir los coeficientes.

Esa solución especial, con la evidencia que la caracteriza, es la que constituye, en *esencia*, la solución algebraica de todas las ecuaciones.

ARTÍCULO VI

La solución teórico-analítica en el tercer grado. Raíces racionales

Este método, como ya se vió en el segundo grado, es el más fácil de todos para determinar en las numéricas las raíces racionales que contengan. Y una vez separadas éstas, las irracionales que queden en la ecuación, estarán determinadas por las fórmulas generales de cada grado, con sólo sustituir los coeficientes numéricos.

No se pierda de vista que, con cada raiz racional, *prima*, que se determine en una ecuación, se rebaja una unidad à su grado.

§. 1.°

FÓRMULA GENERAL

La solución en el tercer grado fúndase en la relación siguiente:

$$Y^3 = Y + 6(0, +1+3+6+10+\ldots.. \text{ hasta } Y \text{ términos}). \qquad 64$$

Es decir que: *el cubo de un número entero es igual al mismo número, más seis veces la suma de los términos de la tercera serie numérica, empezando desde el cero, hasta tantos términos como unidades tenga el número.*

Omitiremos la demostración por suponerla sabida, por lo fácil, y porque en todo caso se la puede ver en el cuaderno primero de «Lucubraciones algebraicas.»

Y como la suma de Y términos de la tercera serie, es, según la ley de formación de las series, el término Y de la cuarta, será

$$Y^3=Y+6(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,.....) \qquad 65$$

También se tiene que $Y^2=Y+2(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,.....)$ 66

Y asimismo es $Y=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,.....)$ 67

Luego la ecuación $Y^3+b_1Y^2+c_1Y+n_1=0$

sustituyendo en ella y reduciendo nos da

$$\begin{aligned}&(1+b_1+c_1)(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,.....)\\&+(2b_1)(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,.....)\\&+(6)(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,.....)=-n_1\end{aligned} \qquad 68$$

De esta fórmula se da por dicho, en cuanto á sus aplicaciones y valor intrínseco, cuanto se ha dicho en la de segundo grado; y el modo de proceder en las dos es idéntico.

§. 2.º

Una solución numérica

Tomaremos la numérica ya conocida de tres raíces racionales

$$Y^3+2Y^2-68Y+120=0$$

sustituyendo los coeficientes en 68 resulta:

$$\begin{aligned}&-65(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10.....)\\&+4(0\ \ 1\ \ 3\ \ 6\ \ 10\ \ 15\ \ 21\ \ 28\ \ 36\ \ 45.....)\\&+6(0\ \ 1\ \ 4\ \ 10\ \ 20\ \ 35\ \ 56\ \ 84\ \ 120\ \ 165.....)=-120\end{aligned} \qquad 69$$

La unidad no es atendible, porque en la misma ecuación se ve que no es raíz.

El 2 como factor de 120, nos da: $-65\times2+4\times1+6\times1=-120$. Luego el 2 es una raíz.

El 3, el 4 y el 5, no verifican la igualdad.

El 6, también factor de 120, nos da: $-65\times6+4\times15+6\times35=-120$. Luego el 6 es otra raíz.

Ningún otro número de la serie superior verifica la igualdad; y como falta una raíz, tiene que observarse que, la fórmula 68, sacada directamente de la ecuación, da las raíces que sean de un mismo signo, y para obteher las del signo contrario, hay que hacer en la ecuación el cambio de Y en —Y, cambiar luego los signos que resulten, y construir de nuevo la fórmula. Hágase, y se verá que en la nueva fórmula aparece la raiz 10, y no las 2 y 6.

§. 3.°

Otra ecuaciòn numérica

Sea la que ya se ha visto también, de una raiz racional con dos irracionales cuadradas.

$$Y^3-7\,Y^2+22\,Y-30=0 \qquad 70$$

Poniendo los coeficientes en la fórmula 68 será:

$$\begin{array}{l} 16(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.......) \\ -14(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10.......) \\ +6(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20.......)=30 \end{array} \qquad 71$$

El 1 vese en la ecuación que no es raiz.

El 2 vese desde luego que no verifica esta igualdad.

El 3 nos da $16\times3+6\times4-14\times3=\times30$ luego el 3 es una raiz.

Sígase ensayando los factores de 30 y se verá que ya no hay otro número que verifique la igualdad, ni aunque se cambie Y en —Y.

Lo cual es prueba de que la ecuación no tiene más que una raiz racional, y dividiendo la ecuación por Y+3, ó por Y—3, el signo será el que dé cociente exacto, que es Y—3.

El cociente exacto es:

$$Y^2-4\,Y+10=0 \qquad 72$$

que nos da $Y=\frac{4\pm\sqrt{16-40}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{-6}}{2}=2\pm\sqrt{-3}$ ó sea las otras dos raices de la ecuación, ó valores de Y

§. 4.°

Raíces irracionales

Si se pone la ecuación

$$Y^3-7\,Y+7=0 \qquad 73$$

y se sustituyen los coeficientes en la fórmula 68, se verá de seguida que ni el 1 ni el 7, únicos factores de 7, verifican la igualdad, aunque se cambie Y en —Y. Con lo cual se prueba que la ecuación es *de tres raices irracionales*; y que para obtener éstas exactamente, bastará sustituir los coeficientes $b=0$, $c=-7$, y $n=7$, en las fórmulas generales, con radical cúbico, del número 18; ó en las 48, si se quiere de solo radical cuadrado, cuidando de tomar en este caso el segundo valor de q y de sustituir separadamente los valores respectivos de r y q. Para estos casos es preferible, por la brevedad, tomar las fórmulas del número 18, con el radical cúbico.

Vese pues que, á medio de la fórmula 68, la solución de las numéricas en el tercer grado, se hace casi instantáneamente y sin trabajo alguno.

No debiéndose perder de vista, que la fórmula 68, es en si misma tan cierta, y está deducida con rigor tan científico, como las del número 28.

El tiempo que se invierte por la fórmula 68 para las raíces racionales, es menor que el que se necesita para hallar la segunda cifra de una raíz cúbica, en el método de las fórmulas 18.

En el cuaderno, *Vindicación de la fórmula de Cardan* páginas 20 á 23, está la ecuación que precede, resuelta por las fórmulas de dicho autor, con radical cúbico; y allí se hace ver que, no teniendo ninguna raiz exacta la cantidad $A \pm B\sqrt{-3}$, no puede tener la ecuación ninguna raíz racional, teniendo que ser en consecuencia irracionales las tres. El radical cúbico se presenta así,

$$\frac{1}{6}\sqrt[3]{-756 \pm 84\sqrt{-3}} \qquad 74$$

Y no teniendo la cantidad subradical ninguna raíz exacta, no hay duda que esta cantidad es parte esencial en las raíces de la ecuación. Y al ver los algebristas una cantidad imaginaria debajo del radical, todos á una voz gritaban y tronaban contra el método y fórmula de Cardán. Pero en esto, como en todo, estaban completamente desorientados.

Para ver esto claramente basta poner un ejemplo en el segundo grado. La ecuación

$$Y^2+4Y+9=0 \qquad 75$$

no tiene, ni puede tener más que estas dos raíces irracionales y además imaginarias,

$$\frac{Y+2+\sqrt{-5}}{Y+2-\sqrt{-5}} \qquad 76$$

De seguro que no se habrá ocurrido á ningún algebrista protestar contra la fórmula de segundo grado, por más que de ella no se puedan sacar para la ecuación 75, sinó las dos raíces imaginarias 76.

No tiene pues explicación admisible, como no sea la de no saber lo que traían entre manos, la crueldad con que hablaron de la fómula de Cardán, porque no consiguieron sacar de ella más que raíces de forma irracional, como la 74, para ecuaciones de composición análoga á la del número 73.

Pero hay más aun. Las ecuaciones que como la 73 dan raices *con imaginarias* por las fórmulas con radical cúbico, *dan raíces reales*,— aunque irraccionales, cuando se las resuelve por las fórmulas en que solo entra el radical de segundo grado.

Hay que ver esto en la página 23 del cuaderno que se acaba de citar, así como la precisión con que de tales fórmulas, y aun de las que tienen el radical cúbico se obtienen para la práctica, cuando sea necesario, *las verdaderas raíces aproximadas*, únicas admisibles en ciencia, puesto que son las únicas que salen de las fórmulas científicas de cada procedimiento.

Todo lo que no sea esto, no es más que música celestial, buena tan solo para entretener á tontos en las escuelas, en las Academias y en los Ateneos.

ÍNDICE