LA SOLUCIÓN ALGEBRÁICA DEL GRADO N

QUE DICEN QUE ABEL DEMOSTRÓ IMPOSIBLE,
Y ASÍ LO AFIRMABAN, DESPUÉS DE ABEL, TODOS LOS ALGEBRISTAS,
HALLÓLA POR SIETE MODOS DIFERENTES

MANUEL VÁZQUEZ,

Y PUEDE HOY APRENDERLA EL QUE QUIERA, EN ESTE PEQUEÑO LIBRO,
Y EN MUY POCAS HORAS.

SANDIOS Y HUEROS ARGUMENTOS DE LA ACADEMIA Y ECHEGARAY,
Y REFUTACIÓN DE LOS MISMOS.

FÓRMULA GENERAL DEL GRADO N,
Y SISTEMA
DE N INCÓGNITAS, Y N ECUACIONES,
DEL GRADO ENÉSIMO.
SU RESOLUCIÓN ALGEBRÁICA.

OVIEDO
Imp. de Pardo, Gusano y C.ª
San José, número 6

1898

PRÓLOGO

Y

UN POCO DE HISTORIA.

El Algebra es *la ciencia de resolver las ecuaciones*, ya sean generales, ya numéricas.

Unas y otras, por grados, llegan desde el primero hasta el infinito.

Los algebristas, en tantos siglos de investigar, solo encontraron la solución algebráica, *por fórmulas*, hasta el segundo grado de las ecuaciones generales y de las numéricas; y en los tercero y cuarto solo de las generales; llegando á demostrar que las numéricas en estos dos grados, *no tenian solución por fórmulas;* y también demostraban que en ningún grado la solución se podía fundar *en la relación de las raices con los coeficientes.*

Y, por fin, el noruego Abel, cansado sin duda de ver tanto trabajo de investigación inútil, *demostró*, muy formalmente según dicen, *que era imposible la solución algebráica por fórmulas, de las ecuaciones generales más allá del cuarto grado.* Y, como consecuencia, por lo tanto, *la de las numéricas;* pues donde no hay fórmulas, no hay otra solución posible, como no sea *el tosco tanteo* para las raices racionales *en las ecuaciones numéricas.*

Y así estaba *la gran ciencia;* nada entre dos platos. Una miseria de ciencia, engalanada con girones de vanidad y de soberbia.

¡Y hay del que se atrevía á sospechar siquiera que acaso Abel no hubiese demostrado más que una barbaridad!

Con el *díjolo Abel, díjolo Abel*, se tapaba y se tapa la boca á todo el mundo. Y, los que tal argumento usaban, el nuevecientos noventa y nueve por mil, ni leyeron lo que dijo Abel, ni el que lo leyó entendió de ello una palabra.

Por no se qué, y á la buena de Dios, me puse yo un día, sin ser algebrista, á pensar en eso de las ecuaciones, y en unos catorce años de constante elucubrar, *resolví todos los imposibles de los algebristas*. Por eso duele, al parecer; porque lo hizo uno que no es de la familia.

En el segundo grado cuatro soluciones nuevas, y dos de ellas *por la relación entre raices y coeficientes*.

En el tercero, veinte y siete soluciones nuevas, con los radicales cúbico y cuadrado, y con el cuadrado solo; y dos también de ellas, *por la relación de las raices con los coeficientes*.

La solución en el cuarto grado, por siete modos nuevos *no trascendentes;* y por otros siete *sistemáticos*, y trascendentes al infinito.

La solución por las fórmulas en los grados tercero y cuarto, de las ecuaciones numéricas de los mismos grados.

La solución general del grado n, *por los siete modos sistemáticos* ya dichos.

Y la solución por ende de los sistemas de n incógnitas y n ecuaciones del grado n.

Todo esto por fórmulas y métodos deductivos.

Y, por fin, *la fórmula general, deductiva y analítica*, para determinar aparte todas las raices racionales que pueda tener la ecuación numérica del grado n.

Nada quedó por resolver; y *la ciencia de resolver las ecuaciones*, quedó así completa y acabada para siempre.

Hácia 1888 remití los cuadernos impresos á la Academia y á Echegaray, y á otros muchos algebristas distinguidos.

En el Anuario de 1891, la Academia, ocupándose del Método Nuevo *para extraer las raices de los números*, que puse en el primer cuaderno, y sin decir ella entonces nada acerca de las ecuaciones, maltratóme desaforadamente con motivo *de un triángulo de números* que puse en dicho primer cuaderno, página 2, llegando hasta calumniarme del modo descarado que luego se verá.

Y en el Anuario de 1893, negó la Academia que fuese verdad todo lo que yo le presenté, *demostrado*, no con razonamientos teóricos tan solo, *sinó con hechos tan reales* como el guijarro que se encuentra en medio de la calle.

No se quedó atrás, por supuesto, el *díjolo Abel*, y si bien se atrevió ella á presentar contra la solución del grado n, un argumento de cosecha propia al parecer, salióle tan desgraciado, que por sí solo bastaría para probar que allá dentro no se sabe aún lo que es una ecuación, ni mucho menos lo que es el resolverla algebráicamente.

Quien crea esto exagerado, que lo vea todo por sí mismo, y diga despues en público, si para tanto tiene valor, lo que acerca de ello le pareciere.

El indicado argumento, que luego se pondrá á la vista, se avergonzaría de haberle hecho el maestro elemental de la aldea más remota.

Pedir, como yo pedí á su tiempo, que se rectificase todo, y especialmente la calumnia en lo del triángulo, fué solo, como puede suponerse, perder el tiempo. La previsora Academia, en 1893, ya lo dijo bien claro al acabar su disparatado juicio acerca de mi solución algebráica de todas las ecuaciones: *esta Corporación no se ocupará ya más de tal asunto.*

Hácia principios de 1894, invité al Sr. Echegaray, para que, siquiera fuese privadamente, tuviese á bien discutir *mi solución algebráica;* pero á condición de que cada uno de los dos, pudiera en su día, si le conviniese, publicar lo que se digera por una y otra parte.

Aceptó él de seguida, y al empezarse el debate me dijo: *si en el trabajo de usted no hubiese el vicio que yo veo, la cuestión estaría resuelta.*

Para señalar el vicio aludido, empleó el Sr. Echegaray cuatro argumentos, no á la vez, sinó cada uno despues de discutido y refutado el anterior. Siendo de notar en esto que el primer argumento presentado por él, fué el mismo tan desconcertado de la

Academia, que cualquiera tendrá por imposible, al enterarse de lo que es, que Echegaray le haya patrocinado.

Y también es de advertir que el Sr. Echegaray, para dirigir sus argumentos, lo hizo *contra la misma solución cuarta sistemática,* que antes, entre las siete que son, había elegido la Academia.

Como se va á ver de seguida lo que son los cuatro, aquí bastará decir, *y á la prueba me remito,* que los otros tres de Echegaray, no son de mejor juez que el primero, y que los cuatro juntos, *en contra de mi solución algebráica,* no tienen más valor que la interfección de un niño atropellado, para detener un tren *exprés* á toda marcha.

El último argumento, *la solución de las numéricas por fórmulas,* le presentó ya el Sr. Echegaray, como quien se agarra á clavo ardiendo; y sin esperar á discutirle, y antes de tener que decir forzosamente sí, ó nó, abandonó la arena, sin querer decir una palabra más, aunque con insistencia se le suplicó.

¿Dónde está pués el vicio, el sofisma de que usted hablaba? ¡Ah! Demasiado comprendió usted que no le hay, que no está en ninguna parte, y solo por eso se cerró á la banda, negándose á decir una palabra más.

Esa palabra más era la decisiva, la sacramental, *estoy conforme,* y si usted no pudo, ni podrá decirla, espérese un poco, que Dios no es viejo, y si no aquí, allá ó más allá, no faltará quien la diga, con aprobación y aplauso de cuantos algebristas tengan siquiera un poco de sentido común.

Hácia fines del 94, publiqué un librito microscópico, con la solución algebráica del grado n, puesta en el tercer grado, para ver si había quien la impugnase públicamente, en otro libro de iguales condiciones; á cuyo efecto se remitió á la Academia, á Echegaray, y á muchos otros conspícuos en la ciencia.

Pero, quiá. El error y la mentira, donde dominan á sus anchas, no tienen valor para dar la cara á la verdad; y lo más que hacen es herirla si pueden, por la espalda y á tracción. Ejemplo.

Para dar más publicidad al diminuto libro, supliqué á los de «La Naturaleza» Revista publicada en Madrid, que tuviesen á bien anunciar el libro, y el objeto de su publicación.

Pero ellos, en vez de hacer lo que les pedía, ó de no hacer nada, y sin contestar á mi carta, publicaron un artículo (18 de Noviembre de 1894), sin firma de nadie, *negando la solución algebráica*, sin razonar ellos de ningún modo, y sólo porque *lo dijo* Abel, y lo dijo la Academia, y lo dijo Echegaray. No contentos con esto, en un simil, inspirado visiblemente por el despecho, me presentaron á sus lectores *como loco rematado*. Y aún más. Echándosela de compasivos, me propusieron como medio de prueba *una ecuación general de sexto grado*, para que la resolviese, diciéndome que si la resolvía, publicarían la solución en la Revista, aunque fuera en un número extraordinario.

Pero todo esto sin haberme remitido siquiera *el número en que me ponían como loco*. Un amigo que se enteró de lo que había, me remitió la Revista desde el pueblo donde estaba.

A los pocos dias de ver el artículo, remitíles á los de la Naturaleza» la mitad de la solución hecha, ó sea *la ecuación preparada*, para que lo publicasen, mientras yo hacía lo demás; y muy pocos dias después les dige que ya estaba todo hecho.

Pasaron así dias y dias, y yo espera que espera, sin recibir contestación, y sin que nada se digese ni se publicase en la Revista. Escribí preguntando, y nada. Certifiquéles una carta, que consta recibieron, y nada.

Meditación por mi parte y consecuencia ineludible, que los lectores de la Revista se dirán con aplastante lógica: *la solución no se publica; luego es que el autor, pobre loco, no supo hacerla.*

La trama, pues, tan bien urdida, *es en sí tan infame como la calumnia de la Academia con motivo de los triángulos.* Y no habrá quien dude que á esto solo se tiraba: anonadar, aplastar al desvalido autor sin reparar en medios.

En 1895, para que no quedase ni el menor pretexto, publiqué otro librito, «La Cuestión en sí,» con la solución puesta en el cuarto grado y en la misma sistemática que había discutido el Sr. Echegaray; *pero seguida entonces de sus famosos argumentos y de mi refutación.*

A este segundo libro se le dió, como al anterior, la callada por respuesta. Y con razón sin duda; pues no habiendo más argumentos que los inventados por el Sr. Echegaray, de no más valor todos juntos que el primero solo, nada queda que decir contra la Solución Algebráica, como no sea que, *es cierta en absoluto.* ¿Hay quien lo dude? Pues allá va otra vez; y á ver donde asoma el genio que pueda ver en ella *el sofisma que no pudo ver el Sr. Echegaray.*

Y lo que ya dige lo voy á repetir. Puesto que no hay más argumentos en contra que los excogitados por Echegaray, y que éstos carecen de todo valor en absoluto, no queda otro medio que el de echar mano de la demostración de Abel, perfeccionada por Wanzel, y ponerla en un librito como este mío, con sencillez y claridad, descartando el lenguaje simbólico, que en los grados tercero y cuarto no se necesita; y á su luz maravillosa hacer ver *que mi procedimiento sistemático es una falsedad.*

Yo ya creía, en verdad, que el Sr. Echegaray habría tomado, como la Academia, el partido de no volver á ocuparse nunca más de la resolución de las ecuaciones.

Pero me equivocaba. En Diciembre de 1896, por un periódico de Buenos Aires ví que Echegaray, para dar una prueba más de la profundidad de su talento, según á los de-allende los mares anunciaba Juan Valera, se había inscrito en el Ateneo para hablar allí *de la resolución de las ecuaciones de grados superiores.*

Bueno, me dige yo al verlo. El es muy dueño de irse á donde quiera, para hablar de lo que le venga en mientes; á solas, como hago yo muchas veces, ó con oyentes que de seguro le oirán allí como quien oye llover.

¿De qué solución irá él á hablar, puesto que no lo dice? De la algebráica no puede ser, puesto que no hay más que la mía. Y de la no algebráica, menos aún, porque, hallada ya la algebráica, como él sabe, sería eso como proclamar las excelencias de viajar á pie donde ya se conoce el ferro-carril.

Y por otra parte, ¿á qué ecuaciones de grado superior se refiere, sabiendo, como él sabe, que mi solución algebráica comprende todos los grados, desde el tercero inclusive hasta el infinito?

Si hay una cuestión de ciencia, en la que para ir entendiéndola poco á poco se necesite calma, soledad, reflexión, meditación, es precisamente esa de las ecuaciones la que en mayor grado lo exige todo.

Por esta razón, conferenciar sobre polinomios en un Ateneo, sea lo que fuere el público que asista, es como leer la Iliada en griego á los que ni siquiera saben el alfabeto de esa lengua.

Lo único en esta ocasión razonable y lógico para el señor Echegaray, al volver á ocuparse de las ecuaciones, ya que tal propósito abrigara al dejar indiscutido su último argumento, y sin declararse noblemente vencido, ó arrogantemente vencedor, no habrá quien no convenga en que lo primero que tenía que hacer, era reanudar la discusión que conmigo dejó pendiente, exponerla ante el público como yo ya lo hice y lo vuelvo á hacer ahora, reproducir sus argumentos, y aún otros nuevos si acaso los encontró, adjuntando, si se necesita, el formidable de Abel, y decir imparcial y categóricamente, puesto que no lo quiso decir ántes, si está ó no está conforme con que mi solución algebráica *es verdadera en absoluto*, que es lo que yo sostuve, sostengo y sostendré mientras no se pruebe lo contrario, que por fortuna no se probará.

Todo lo que no sea esto, hágalo él y todas las Academias del mundo juntas, no será más que engañar al público y abusar de su candidez tradicional.

Ni el público de aquí, ni el de más allá, con sus inconscientes aplausos en todos los Ateneos del mundo, podrán dar valor de ciencia á lo que por sí mismo ninguno tenga.

J. A. Serret, en su colosal tratado de Algebra Superior (dos tomos, 1341 páginas en junto, 4.º francés, 5.ª edicción, París, 1886), hacía el fin del segundo tomo, llevando ya demostrado que la solución de las ecuaciones numéricas en los grados tercero y cuarto, no se podía conseguir por las fórmulas generales; y después de ocuparse, con referencia á la solución algebráica, de las teorías inventadas por los sabios algebristas: Cauchy, Bezont, Euler, Descartes, Sturm, Fourier, Newton, Lagrange, Galois, Abel, Steiner, Wanzel y otros muchos, acaba su obra reproduciendo, y prestándole su conformidad, *la célebre demostración de Abel*, perfeccionada por Wanzel, *de que es imposible resolver algebráicamente, por fórmulas, las ecuaciones generales más allá del cuarto grado.*

Lo cual, por el solo hecho de intentarse, es ya una demostración acabada de que las teorías de tantos sabios que cita, y las muchas que omitirá, fueron del todo inútiles para llegar á la solución algebráica; pues en otro caso es evidente que no hubiera intentado Abel tal demostración.

Y como quiera que la solución algebráica, ó *reducción á fórmula* de la ecuación *general del grado n,* es ya un hecho *por siete modos* evidente, no hay duda que la demostración de Abel, perfeccionada y todo por Wanzel, no es más que la demostración de una falsedad.

En este pequeño libro, por la oportunidad que pueda tener y para que en pocas horas pueda estudiar cualquiera *la solución algebráica general, desde el tercer grado hasta el enésimo*, pónese ante todo *el triángulo numérico mío* á la par *del de Pascal,* con lo que dijo la Academia, para que se vea la barrabasada que ella hizo en este punto, como digno precedente del argumento mónstruo contra la solución algebráica.

Sigue á este curioso detalle, la solución en el segundo grado, *fundada en la relación de las raices con los coeficientes,* lo cual era el primer imposible para los algebristas.

Está después la solución general algebráica de tercer grado, por método sistemático, *con solo radicales de índice* 2; lo cual, teniéndolo á la vista la Academia, dijo *que no era cierto.*

A continuación se encuentra *la solución general sistemática en el cuarto grado*, por el mismo procedimiento que discutió el Sr. Echegaray, seguida de sus cuatro argumentos, y de la refutación de cada uno.

Y por fin se pone la solución algebráica general en los grados *quinto y sexto,* y en el *enésimo*, con la fórmula general correspondiente. Y también la solución *de los sistemas de n incógnitas* y *n* ecuaciones del grado *n*.

De la solución general en los grados tercero y cuarto, *con radical cúbico y cuadrado*, como las antiguas de Cardán y de Ferrari, y de la solución de las ecuaciones numéricas de tales grados, por las fórmulas generales, *que fué otro gran imposible para los algebristas*, trataráse en el siguiente libro, á la vez que de la solución de las numéricas en todos los grados.

Lo cual, estando en *Lucubraciones Algebráicas* demostrado con hechos evidentes, y habiéndolo tenido ellos muchos años á la vista, no titubearon, sin embargo, en salir á última hora diciendo *no lo vemos*.

Por eso hay que insistir en ponérselo delante, á ellos y á todo el mundo matemático, porque no se puede creer que aquí y en todas partes estén hoy todos los algebristas tan ciegos de entendimiento que no lo puedan ver.

Y conste desde luego que la Solución Algebráica, como hecho consumado que ya es, al ir de seguida, ó más tarde, á todas partes, no irá como dañinamente insinuaron los de La Naturaleza, en busca de quien, al aceptar el hecho, pueda darle más valor en ciencia del que por sí misma tiene, puesto que ya le tiene absoluto; sinó que irá solamente á darse á todos como verdad irrefutable y á desalojar de los entendimientos sanos el secular error que los tiene despóticamente secuestrados, y al servicio solo de egoistas y vergonzosas conveniencias.

Y conste también, para lo que cada uno quiera suponer, que en la interminable lista de investigadores notables que cita J. A. Serret, no figura ni siquiera uno solo que sea español.

LOS DOS TRIÁNGULOS

para recreo de la Academia

Y EJEMPLO DE CRÍTICOS CONSUMADOS

Los de la Naturaleza, por supuesto, ya resultaron pintiparados al modelo.

A mi triángulo preceden en el cuaderno donde le puse, estos tres parrafitos numerados:

1.º Cada línea horizontal de términos serán los coeficientes del binomio (x+r) elevado á (n—1).

2.º Las líneas verticales constituyen los factores numéricos de los coeficientes, cuando á la incógnita de una ecuación se sustituye la suma ó la diferencia de otras dos (x+r) ó (x—r).

3.º Como consecuencia de las dos precedentes, para formar los coeficientes de $(x+r)^n$, no hay necesidad de hacer multiplicación alguna, puesto que resultan de la suma consecutiva de las series como se ve en el siguiente cuadro (que es mi triángulo en el cuaderno primero):

Triángulo de Pascal.

1	1	1	1	1	1	. .
1	2	3	4	5	. .	
1	3	6	10	. .		
1	4	10	. .			
1	5	. .				
1	. .					
. .						
.						

Triángulo mío.

.	.	.	.	.	.	.	.
		.	.	.	.	.	.
		1	5	10	10	5	1
			1	4	6	4	1
				1	3	3	1
					1	2	1
						1	1
							1

¿Habrá alguno tan corto de vista y de entendimiento, que con solo mirar á los dos triángulos no vea que son del todo diferentes *en el modo de aparecer y en el modo de estar interiormente construidos*?

A pesar de no ser creible que haya uno solo de caletre tan desmedrado, que no perciba esa diferencia, véase lo que la Academia dijo, á los tres años cuando menos de tener mi triángulo á la vista, y el de Pascal, por supuesto, en cualquier libro de su escogida biblioteca (se refiere á mi en todo este párrafo):

«Falta de estudio que, por lo menos en apariencia, llegá hasta el punto de desconocer el espresado señor la construcción »antigua y propiedades fundamentales del ingenioso *triángulo* »*aritmético*, ó triángulo de Pascal, que él construye por cuenta »propia, y nos da como cosa nueva y nunca vista, sin acertar á »ponernos por completo en el secreto íntimo de la composición »de aquél triángulo.»

Así lo dijo la Academia. Y no habrá duda para nadie *que en menos palabras no se pueden decir más falsedades.*

1.° Que yo no conocía el triángulo de Pascal, no puede decirlo ella, puesto que yo no hice el de Pascal, sino otro diferente; y quien no le conocía era ella, puesto que siendo el mío diferente, creyó y afirmó que era el de Pascal.

2.° Que yo hice el de este por cuenta mía propia; falso de todo punto, porque el que yo hice es del todo diferente.

3.° Que se lo presenté á ella como cosa nueva y nunca vista; falso y cien veces falso, porque ni yo dige tal cosa, ni es el de Pascal el triángulo que yo puse en mi libro.

4.° Y que no expliqué la razón de hacer el mío, es á todas luces falso, porque en los tres párrafos que al triángulo preceden en mi libro, está explicado eso con claridad insuperable, á menos de que no esté ciego quien lo lea.

Téngase en cuenta que reclamada por mi la conveniente rectificación de tantas falsedades y en especial del hecho que tan falsamente me imputaron, *de apropiarme una invención ajena*, obtuve por toda contestación el silencio más absoluto.

Y si en esto del triángulo, tan patente como está, dijo tales cosas la Academia, ¿cómo será lo que haya dicho en lo de la solución algebráica, donde las dificultades para investigar eran tantas y tan grandes que hicieron á los más sabios mirarlo todo como inabordable y hasta demostrarlo como imposible?

CAPÍTULO PRIMERO.

La solución algebráica en el segundo grado.

Siendo tan conocido *el método vulgar* para resolver la ecuación de segundo grado, como general y como numérica, nada se necesita decir acerca del mismo, en atención ante todo á la brevedad que me he propuesto, y también además, porque tal método, en sí mismo, no explica nada referente á la solución del grado n.

Pudiérase, sin embargo, en este grado hacer ver ya, casi con excesiva claridad, los argumentos primero, segundo y cuarto que presentó el Sr. Echegaray. Pero habiéndose de tratarlos en su lugar propio, *que es en la solución al cuarto grado*, y no habiendo en el segundo forma adecuada para ocuparse del argumento tercero, se deja todo para tratar de ello *en la misma solución cuarta sistemática,* contra la cual se dirigieron expresamente los cuatro argumentos.

En este grado, pues, tan sólo se va á exponer la solución fundada en

La relación entre raices y coeficientes, demostrada imposible por los algebristas.

Esta solución, además de ser un imposible demostrado, nos enseña que en el segundo grado se puede llegar directamente á cada uno de los dos valores de la incógnita, ya separados uno de otro, sin necesidad de pasar por ninguna fórmula general intermedia.

Poniendo la ecuación $x^2-bx+n=0$ 1

y expresando sus raices por p y q, no hay quien no sepa que la relación de estas raices con los coeficientes *b* y *n*, es:

$$p+q=b \qquad 2$$

$$pq=n \qquad 3$$

De esta última sale $4pq=4n$.

Y siendo también $4pq=(p+q)^2-(p-q)^2$

poniendo en lugar de $(p+q)$, su igual *b*, y en lugar de 4 pq, su igual 4 n será:

$$4n=b^2-(p-q)^2$$

De donde se tiene $(p-q)^2=b^2-4n$

Y también, tomando las raices $(p-q)=\pm\sqrt{b^2-4n}$ 4

En la primera relación de arriba se tiene el valor de la suma $(p+q)$; y en esta última igualdad, el valor de la diferencia $(p-q)$; luego será evidentemente, por ejemplo:

$$p=\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-4n}}{2} \qquad 5$$

$$q=\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-4n}}{2} \qquad 6$$

Es decir, los dos mismos valores que para x nos da el procedimiento vulgar, de todos tan conocido; pero con separación uno de otro, como ya se dijo, sin necesidad de fórmula general intermedia.

Con esta solución, y las de igual índole que hay en el tercer grado, queda demostrada la falsedad de la doctrina sustentada por los algebristas, con carácter de general, quienes decían que: *por las m relaciones entre las m raices de una ecuación y los coeficientes de la misma, no se puede llegar á la determinación de las raices.*

Y también se pone ya de manifiesto que, si en esto tan elemental se equivocaban tanto los tenidos por maestros, con mucho mayor razón se habrán podido equivocar en lo que está más arriba, donde las dificultades para investigar, crecen de grado á grado en proporciones increibles.

De esta solución que precede, que aún está hecha por otro modo en Lucubraciones, ni de las que hay en el tercer grado, fundadas en la misma relación, con ser tan claras, y estar tan á la vista, ni una palabra quiso la Academia decir, sin duda por no verse obligada á proclamar el manifiesto error en que estuvieron y estaban todos los algebristas.

Véase en dos palabras lo que hacían para dar por demostrada la imposibilidad de la solución que se acaba de hacer.

En el segundo grado por ejemplo: si en la igualdad 2, ó en la 3, se despeja p, ó q, y se sustituye en la otra, resulta por ejemplo para q la ecuación $q^2-bq+n=0$, que es idéntica á la 1, y de iguales dificultades para su resolución.

Y como, procediendo de igual modo en el tercer grado y los siguientes, llegase en todos á una ecuación igual que la propuesta, establecieron como regla general, que la solución fundada *en la relación entre raices y coeficientes era un imposible.*

Lo cual implica que, ó desconocían las reglas más elementales de la lógica, ó si las conocían, no sabían hacer de ellas el debido uso.

De que por un camino dado no se pueda llegar á un fin, no se sigue que no haya más caminos tanteables, ni menos el que por alguno de estos no se pueda llegar al fin que se desea.

Ya se verá luego que el argumento de la Academia y primero de Echegaray, contra la solución del grado n, es idéntico al precedente, y acusa igual deficiencia en el modo de razonar.

CAPÍTULO SEGUNDO.

ECUACIONES, MÁS ALLÁ DEL SEGUNDO GRADO.

Nociones previas indispensables.

Si en la solución de segundo grado, por estar cuanto en ella se hace al alcance del sentido común, no se necesita en rigor que la atención se fige en las nociones elementales que de seguida se van á ver, no sucede así ya en el tercer grado, y con mayor razón en los siguientes, puesto que cuanto se hace en éstos para llegar á establecer las fórmulas, deduciéndolas de la ecuación misma; y luego para saber lo que son las fórmulas deducidas, y lo que es y significa como hecho realizado, *la solución algebráica* que se obtiene por medio de las fórmulas, es de absoluta necesidad que la atención se fige mucho en las leyes fundamentales á que la solución algebráica está subordinada en su valor intrínseco, y en su forma aparente, como el efecto á la causa y el contenido á lo continente.

De estas nociones elementales, las más precisas por ahora son las siguientes.

Adviértase que las llamo elementales, porque ó lo son todas en absoluto, ó están de tal modo ligadas con una que lo sea, que no es posible encontrar un término medio que sirva para fundar una deducción

I.

Dáse por convenido ya que la ecuación del grado n es el producto de n factores primos de la forma $Y_1+A_1=0$; siendo Y la incógnita, y pudiendo A representar, como función de los coeficientes, una cantidad cualquiera, y de cualquier valor y forma.

II.

Resolver algebráicamente la ecuación general del grado n, es reducirla por método y medios algebráicos, al producto de los *n* factores primos que la constituyen, siendo por lo tanto cada factor hallado, un divisor exacto y una raiz de la ecuación.

III.

Hallada que sea una raiz prima, factor y divisor, de la ecuación del grado *n*, y dividiendo por ella la ecuación, en el cociente exacto se tendrá otro factor del grado (n —1), que igualado á *cero*, será la ecuación que contendrá las (n—1) raices, ó factores, que faltan para completar las de la ecuación del grado *n*.

IV.

Si á la ecuación del grado (n—1) se le encuentra otra raiz prima, en el cociente exacto de la división por ésta, se tendrá otra ecuación del grado (n — 2), en la cual estarán las (n—2) raices que faltan para la del grado *n*.

Y continuando de igual modo, se irá determinando una por una, las *n* raices de la ecuación propuesta.

V.

Según lo expuesto, que es de verdad incuestionable, no hay duda que toda la dificultad del problema está *en poder determinar una raiz prima* para la ecuación del grado *n*; puesto que, hallada la primera, ya no se tiene que resolver otra ecuación del mismo grado, sino la del grado (n—1), que resulta en el cociente.

VI.

El distintivo especial *de las raices algebráicas,* es que cada una *sea divisor exacto de la ecuación,* y que multiplicadas todas entre sí, el producto sea exactamente la ecuación propuesta.

A lo cual puede agregarse, aunque ya casi está á la vista, que el valor que para la incógnita contiene cada raiz, puesto en lugar de ella en el polinomio, ha de reducirle á *cero.*

Cuando las n raices halladas nos den una de estas tres notas distintivas, es evidente que darán también las otras dos.

VII.

El *método algebráico* que nos dé un sistema de n raices, *cuyo producto sea exactamente la ecuación propuesta,* es legítimo, y en absoluto irreprochable dentro de la ciencia matemática; y la solución contenida en un tal sistema de raices, es de igual modo irreprochable y absolutamente legítima.

VIII.

La legitimidad de la solución general, y del método seguido para llegar á ella, no tienen, en absoluto, nada que ver con lo que puedan ser en sí mismos los diferentes valores *que de las fórmulas ó raices primas* resulten para la incógnita; siempre que el producto de todas sea la ecuación propuesta.

IX.

Para poner en duda, y discutir si se quiere, la legitimidad de un método seguido, y que nos dé un sistema de raices como el indicado en el párrafo precedente, hay que remontarse á los dominios de la Ciencia de la cantidad en sí, *como ciencia filosófica*, y discutir á la vez la ley del procedimiento lógico, en su aplicación á la totalidad de la Ciencia, y en particular á la ciencia de la cantidad, como ciencia limitada dentro del saber total.

X.

Las *raices aproximadas,* únicas á que por sus arbitrarias teorías pudieron llegar los algebristas, *no son raices de la ecuación,* puesto que ni son divisores exactos de ella, ni multiplicadas entre sí la reproducen exactamente.

Cualquier número, grande ó pequeño, y de cualquiera forma, es raiz aproximada de una ecuación cualquiera, y en tal modo, que siempre se podrán poner, en número infinito, otras raices menos aproximadas.

Y por lo tanto, donde se presenten *las raices exactas* de un método algebráico, *las aproximadas de los algebristas* no son más que fantasías más ó menos caprichosas, que no tienen valor alguno para la ciencia de las ecuaciones.

XI.

La solución general del grado n, habiendo de ser aplicable á cada grado en igual modo, tiene que ser, si la hay, *necesariamente sistemática;* y nada se podrá exigir de ella que sea privativo y peculiar de cada grado, sino únicamente *la solución algebráica*, ó sea, *reducir la ecuación del grado n á un producto de n factores primos* que, multiplicados entre sí, reproduzcan exactamente la ecuación propuesta.

XII.

Al igual de lo que sucede en el segundo grado, con solo fijar la atención, tiene que verse claramente que en cada fórmula ó raiz del grado *n*, tendrá una raiz propia cada ecuación numérica del mismo grado, con solo poner directamente los coeficientes numéricos en lugar de los literales; y que, si con la ecuación numérica se hacen las mismas operaciones que con la general de su grado, se llegará necesariamente *á formulas*, ó *raices numéricas*, de igual valor y forma que las generales correspondientes á su grado; y que, por consecuencia, *la certeza de la solución general* no depende en modo alguno de que esté contenida en ella ó nó, *la solución numérica*; ni la certeza de esta depende tampoco de que haya ó nó la solución general.

En una y otra solución, la certeza que para nosotros tengan, se funda exclusivamente en la legitimidad del juicio por cuyo medio se consigue llegar á ellas.

XIII.

En la práctica se verá claramente que hasta en el cuarto grado hay soluciones propias de cada uno; y que en el cuarto empieza, *naturalmente*, ya por su forma externa, ya por ley de su composición interna, *la solución sistemática ó trascendente al infinito.*

XIV.

La clasificación de las raíces en *racionales* é *irracionales*, tiene que referirse solamente á las ecuaciones numéricas, puesto que en las literales, por la generalidad absoluta que se les atribuye, no cabe hacer ninguna distinción entre las raices.

XV.

Al multiplicar $(x+p)$ por $(x+q)$, no se podrá decir $x \times x = x^2$ sino suponiendo que $x=x$ y por lo tanto $p=q$. Pero como siempre se pone $x \times x = x^2$, para no quitar á la expresión la generalidad que se le atribuye, hay que tener en cuenta *que* *la ecuación no es el producto de las raices,* si su expresión ha de ser general, mas que por el convenio tácito de que $x \times x$ sea siempre x^2, aunque no sea $x = x$. Otro tanto hay que decirlo cuando se hace $px + qx = (p+q)x$; puesto que x no será factor común sino cuando sea $x = x$.

Y como por otra parte, la ecuación del producto, $x^2 - (p+q)x + pq = 0$, resulta siempre cierta, hay que tener en cuenta que tal certeza proviene de que en x^2 no están á la vez las dos x desiguales, sino el cuadrado de una de las dos, y en $(p+q)x$, la misma x que se puso en x^2.

Esta sencilla observación es aplicable á la ecuación del grado n. Y nos dice concretamente, que en la incógnita de la ecuación de cualquier grado, al despejarla, no se ha de ver en rigor más que *una de las raices;* y que las otras $(n-1)$ hay que buscarlas en la ecuación del cociente exacto, al dividir la ecuación dada, por la primera raiz que se halló. Lo cual se verá que está del todo conforme con lo que se hace *en el procedimiento sistemático para la solución general del grado n.*

XVI.

El grado de una ecuación es el que le resulta después de quitarle los denominadores, cuando se encuentre en estos *la incógnita de la ecuación.*

Para lo cual ya se sabe que basta *multiplicar la ecuación por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.*

XVII.

Si á la incógnita Y de la ecuación propuesta, se le sustituye la suma de otras dos $(x+z)$, ó la diferencia $(x-z)$, ó el producto xz, ó el cociente $\frac{x}{z}$, no hay duda que el valor de Y será respectivamente la suma, ó la diferencia, ó el producto, ó el cociente, de los valores hallados para las incógnitas que se pusieron en su lugar.

XVIII.

Aunque se supone ya sabido, no estará de más el recordar aqui lo que en el Algebra elemental se enseña también como noción indemostrable, á saber: que dada una ecuación como cierta, se puede añadir ó quitar á sus dos miembros una misma cantidad, y se los puede multiplicar ó dividir por una misma cantidad, sin que la certeza de la igualdad se altere.

XIX.

En la ecuación del grado n, suponiendo que se la sabe resolver, se puede eliminar un término cualquiera, sustituyendo á la incógnita la suma ó la diferencia de otras dos, ordenando para una de estas, é igualando luego á *cero* el coeficiente del término que se quiera eliminar.

Con cuya operación, y las expresadas en los dos números precedentes, basta, como luego se verá palmariamente, para resolver, con absoluta certidumbre, la ecuación general del grado n.

Con estas nociones previas, tan sencillas y claras como son, no costará ya ningún trabajo, á quien las haya meditado bien y sepa el Algebra elemental, el comprender de seguida todo lo que se diga y haga referente á la solución algebráica en cualquiera de los grados, *inexplorados aún, desde el segundo en adelante.*

Y ahora vamos de seguida á ver cómo se establece, lo que es en sí y cómo es, *la solución de tercer grado con solo radicales de segundo,* que fué otro nudo de los que á la Academia, teniéndolos á la vista desatados, le parecieron indesatables, diciendo de este que no lo estaba.

CAPÍTULO TERCERO.

LA SOLUCIÓN GENERAL SISTEMÁTICA EN EL TERCER GRADO CON SOLO RADICALES DE SEGUNDO.

Los algebristas tenían desde siglos, en el tercer grado, *el método y fórmula de Cardán,* con radical cuadrado y cúbico, que resolvía la ecuación general; pero despues de tratarla, y discutirla de mil modos, convinieron todos los tratadistas en declarar, *que la tal fórmula, no servía para la solución de las ñuméricas.*

Y como en la solución general de cuarto gradó, que también se conocía, entraba como condición precisa, el tener que resolver previamente *una ecuación de tercer grado*, dijeron ellos: no se pudiendo resolver la del tercer grado, no hay duda, *tampoco la general del cuarto sirve para la solución de las numéricas.*

Y, al menos que yo haya podido ver en ninguna parte, no se les ocurrió buscar otra, ú otras soluciones generales, por si las hubiera, y acaso alguna sirviese para la solución de las numéricas según ellos entendían esta solución.

Yo me puse á buscar, y no solo encontré hasta diez y nueve soluciones generales *como la de Cardán, con radicales cuadrado y cúbico*, sinó que despues encontré; *tratando á fondo* una de las mías, y también la de Cardán *que servían una y otra para la solución de las numéricas.*

Pero, antes de llegar á esto último, parado ante las mismas dificultades que los algebristas, ocurrióseme indagar si sería posible resolver la general de tercer grado, *sin el radical cúbico,* que era como el obstáculo insuperable para la solución de las numéricas por la fórmula de Cardán.

Hecha la investigación, encontráronse *hasta siete modos de resolver la ecuación general*, con solo el radical cuadrado; y despues de esto, se encontró también, que las numéricas *tienen solución por las fórmulas* de uno de estos métodos que se estudió.

Y como la Academia negó: que la general de tercer grado estuviese resuelta *con solo el radical cuadrado*, y que las numéricas tuviesen solución *por tales fórmulas*, hay que hacer ver que son verdades de Pero Grullo, esos dos hechos negados por la Academia. El primero en este libro, y el segundo en el otro que luego se publicará.

ARTÍCULO PRIMERO.

LA SOLUCIÓN GENERAL CON SOLO EL RADICAL CUADRADO.

Exposición del método.

Téngase en cuenta que el método que se va á desarrollar, *es una de las siete soluciones sistemáticas*, que resuelven hasta la ecuación del grado n.

Sea la ecuación general $Y^3+bY^2+cY+n=o.$ (1)

Sumando y restando en ella sY, separando Y en los tres primeros términos, y s en los dos últimos, se tiene

$$Y\left(S^2+bY+\frac{c}{s}\right)+S\left(Y+\frac{n}{s}\right)=o. \qquad (2)$$

Sobre esta versa todo el procedimiento algebráico para llegar á la solución de la propuesta (1). La suma y resta de sY no tiene más objeto que el de dar á la ecuación la forma que toma en (2). La disponible s no influye para nada en la solución general, y puede por lo tanto tomar todos los valores, menos el *ce-*

ro, y el de c, porque estos destruirían la forma (2), base del procedimiento, el cual consiste en lo que sigue.

Haciendo en (2) $Y=r+\frac{z}{q}$, sustituyendo y multiplicando por q^3 resulta:

$$(z+rq)\left(z^2+\begin{array}{l|l|} 2rq & z+r^2 \\ +bq & +br \\ & +c \\ & -s \end{array}\, q^2\right)+sq^2\left(z+\frac{rs+n}{s}q\right)=0 \qquad (3)$$

En esta se iguala á la unidad el segundo término del último paréntesis, ó sea

$$\frac{rs+n}{s}q=1 \qquad (4)$$

De esta igualdad supuesta, se puede tomar para q el valor

$$q=\frac{s}{rs+n} \qquad (5)$$

Ahora, dividiendo el segundo paréntesis de (3) por $(z+1)$, se obtiene de cociente

$$z+2rq+bq-1 \qquad (6)$$

y como resíduo que debe ser *cero* para que la división sea exacta, y que ya igualamos á cero,

$$(r^2+br+c-s)\,q^2-(2r+b)\,q+1=0 \qquad (7)$$

Cuya igualdad realizamos á medio de la disponible q, y nos da

$$q=\frac{2r+b\pm\sqrt{b^2-4c+4s}}{2(r^2+br+c-s)} \qquad (8)$$

Con este valor de q *se verifica en absoluto* la igualdad (7), haciéndose *cero* el resíduo, y la división exacta. Sustitúyase, si se quiere, y se verá que es cierto.

Poniendo el valor 8 de q, en la igualdad supuesta (4), y despejando en ella, r, se obtiene:

$$r=\frac{bn+2s^2-2cs\pm n\sqrt{b^2-4c+4s}}{bs-2n\pm\sqrt{b^2-4c+4s}} \qquad (9)$$

La igualdad (4), despues de poner en ella el valor (8) de q, *se verifica en absoluto* con este valor de r.

Y téngase muy en cuenta que este valor de r, á la vez que realiza la igualdad (4) realiza también *la de los dos valores de* q, (5) y (8), como puede comprobar cualquiera fácilmente.

Con lo cual, en la ecuación (3) se tiene que: el último paréntesis es $(z+1)$, y el segundo paréntesis es igual, *al cociente exacto* (6), *multiplicado por el divisor* $(z+1)$; quedando en consecuencia la ecuación transformada en esta otra

$$(z+rq)(z+2rq+bq-1)(z+1)+sq^2(z+1)=0 \qquad (9)$$

Y separando $(z+1)$ es

$$\big((z+rq)(z+2rq+bq-1)+sq^2\big)(z+1)=0 \qquad (10)$$

En la cual tenemos la ecuación propuesta (1) transformada *en un producto de dos factores, y uno de ellos*, $(z+1)$, *primo.*

De esta (10) salen las dos ecuaciones que la verifican.

$$z+1=0 \qquad (11)$$

$$\begin{array}{r|l} z^2+3rq & z+sq^2 \quad =0 \\ +\ bq & +2r^2q^2 \\ -\ 1 & +brq^2 \\ & -rq \end{array} \qquad (12)$$

De la (11) sale un valor para z, y de la (12) salen los otros dos

Formados estos valores, y teniendo en cuenta que es $Y=r+\frac{z}{q}$, resultan los tres valores de Y en esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} Y=\dfrac{-1+rq}{q}=\dfrac{-2+2\,r\,q}{2\,q} \\[2ex] Y=\dfrac{1-b\,q-r\,q+\sqrt{(1-b\,q-r\,q)^2-4\,s\,q^2}}{2\,q} \\[2ex] Y=\dfrac{1-b\,q-r\,q-\sqrt{(1-bq-rq)^2-4\,s\,q^2}}{2\,q} \end{array}\right\} K$$

Y pasando los segundos á los primeros miembros, se tendrán las tres raices de la ecuación propuesta.

$$\left.\begin{array}{l} Y+\dfrac{2-2\,r\,q}{2\,q}=0 \\[2ex] Y+\dfrac{-1+bq+rq+\sqrt{(1-bq-rq)^2-4\,s\,q^2}}{2q}=0 \\[2ex] Y+\dfrac{-1+bq+rq-\sqrt{(1-bq-rq)^2-4\,s\,q^2}}{2q}=c \end{array}\right\} K_1$$

La verdad de esta última consecuencia K_1, queda en absoluto demostrada á priori, puesto que en ninguna de las operaciones que se han hecho, para llegar á ella desde la ecuación (2), se ha faltado á ley alguna de las que constituyen la lógica cuantitativa.

Pero, para que ni aún sea lícito suponer la posibilidad de error, vamos á demostrarlo también á posteriori.

ARTÍCULO II.

COMPROBACIÓN DE LAS FÓRMULAS.

Sabemos que las tres raices de la ecuación de tercer grado, multiplicadas entre sí, para ser ciertas, han de dar exactamente en el producto la ecuación propuesta.

Y también sabemos que al hacer la multiplicación, la suma de los segundos términos de las raices ha de ser b; la suma de los productos binarios ha de ser c; y el producto de los tres, ha de ser n. En efecto.

1.° Basta mirar en las fórmulas K_1 para ver desde luego que la suma de los tres quebrados es b.

2.° Multiplicando el segundo quebrado por el tercero, el producto es

$$\frac{4\,s\,q^2}{4\,q^2} \qquad K_2$$

Multiplicando el primer quebrado por cada uno de los otros dos, y sumando el resultado con k_2 tendráse la suma de los tres productos binarios, que, simplificando por el factor 4, es

$$\frac{-r^2\,q^2-b\,r\,q^2+b\,q+2\,r\,q-1+s\,q^3}{q^2} \qquad K_3$$

cuya cantidad debe ser igual á c.

Igualando á c, multiplicando por q^2, pasando cq^2 al primer miembro, cambiando signos, y ordenando para q, se tiene

$$(r^2+b\,r+c-s)\,q^2-(2\,r+b)\,q+1=0 \qquad K_4$$

Cuya igualdad es cierta por ser la misma (9) que se hizo *cero* con el valor (8) de q.

3.° Multiplicando el segundo quebrado K_1, por el tercero, ya se ha visto que el producto es

$$\frac{4\,s\,q^2}{4\,q^2}=S \qquad K_5$$

Y multiplicando este producto s, por el primer quebrado K_1, el producto es

$$\frac{s-r\,s\,q}{q} \qquad K_6$$

el cual tiene que ser igual á n.

En efecto; igualando, multiplicando por q; pasando nq al primer miembro, y s al segundo, cambiando signos, y dividiendo por s, resulta

$$\frac{(r\ s+n)\ q}{s}=1 \qquad K_7$$

Cuya igualdad es cierta por ser la misma (4), realizada á medio del valor (9) de r, después de poner en ella el valor (8) de q.

Con lo cual queda demostrada en absoluto *la certeza de esta solución algebráica*, puesto que lo está evidentemente á priori y á posteriori. El álgebra, como ciencia de la cantidad en general, está satisfecha con este resultado, y nadie tiene derecho para exigirle más. Lo que puedan ser en sí los valores de q y de r, en nada afecta á la verdad absoluta representada en las fórmulas K, y en las raices K_1.

Ya se ha dicho que la disponible s, que entra en las fórmulas, por el modo de venir á ellas, es exclusiva de este grado, y los valores *no-cero*, diferentes del c que se le puedan dar, no afectan de ningún modo á la solución general que nos da el procedimiento. Pero, cuando por éstas fórmulas se quiera resolver las numéricas de tercer grado, *los valores de s están analíticamente subordinados* á las condiciones de esa solución, como á su tiempo se verá.

Por de pronto, en la esfera *de lo general algebráico* en que ahora estamos, se tiene que: el valor (8) de q realiza en absoluto la igualdad (7); y el valor (9) de r, realiza de igual modo la igualdad (4), después de poner en ella el valor (8) de q.

De las dos igualdades (4) y (7), realizadas en absoluto, sale la solución expresada en las igualdades K y K_1.

Aunque con lo expuesto se pudiera dar aquí fin á esta solución, en cuanto tiene carácter de sistemática, conviene sin embargo adelantar en lo posible la explicación de ciertas dudas que pueden ocurrirse.

El valor (8) de q es esencial en el procedimiento, porque lo es el radical que lleva: sin éste no hay procedimiento posible.

El valor de r, general como es, si se le pone en el (8) de q, comunica al numerador, y al denominador, valores *cero*, y valores que no son *cero;* cuyos valores *cero* y *no-cero*, producen siempre en las fórmulas *K* el mismo resultado: *los valores propios de Y.*

El tomar q tales valores, proviene de que, siendo r y q, con el valor que se dé á la disponible s, integrantes para cada valor de Y, en las fórmulas de esta, no hay duda que, cuando con un valor de r quede integrado un valor de Y, á q le corresponde ser *cero:* y viceversa también; si con un valor de q, se llegase á la integración de un valor de Y, á r le tocará entonces, á su vez, tomar un valor *cero*.

Lo cual así se verá que sucede exactamente cuando se llegue á la solución de las numéricas. Y si asi no sucediese, sería entonces una prueba irrebatible *de que el procedimiento no era cierto.*

De este detalle habrá que hablar con la extensión precisa *en el cuarto grado*, por presentarse allí del mismo modo, y relacionarse directamente con el tercer argumento que presentó el Sr. Echegaray, consistente, *en si q puede tener en su fórmula un valor infinito.*

En r queda el procedimiento acabado, y los valores de r y q, no es en relación de uno á otro solamente como han de considerarse, sinó por lo que ambos representan en las fórmulas K, y en las raices K_1.

El producto de las tres raices K_1, es exactamente la ecuación propuesta. Y por lo mismo, este resultado evidente, anula de antemano toda objección que se dirija contra el procedimiento; porque, si en el procedimiento entrase una sola condición falsa, no podría ser cierto el resultado.

El resultado es cierto en absoluto, luego el procedimiento lo es también del mismo modo.

La solución algebráica es eso, y eso es lo que se puede pedir al Algebra, en cuanto sea ciencia puramente subjetiva, ó ciencia de las fórmulas generales.

Cuanto se pueda decir en contra de este método general, dígalo quien lo diga, no podrá tener en absoluto, ningún valor en ciencia, mientras no se pruebe, y esto no se probará, que en el procedimiento se ha infringido alguna ley esencial ó formal, del juicio por cuyo medio se hace la deducción de las raices K_1.

Habiendo de exponerse en otro libro la solución de las numéricas por fórmulas, en los grados tercero y cuarto, este se limita en su contenido, *á exponer la solución de las ecuaciones generales, hasta el grado enésimo*, que es lo que dicen *que demostró ser imposible*, el noruego Abel.

Por de pronto hay que no perder de vista, *que en cada fórmula general, tienen una solución determinada las numéricas de cada grado*, sin que esto se oponga en modo alguno á que cada ecuación pueda tener otra, ú otras soluciones diferentes.

CAPÍTULO CUARTO.

La solución general sistemática en el cuarto grado con solo radicales de segundo.

La Academia primero, y después el Sr. Echegaray, para dirigir, aquélla un argumento, y éste el mismo de la Academia y otros tres, contra mi solución algebráica del grado n, eligieron una y otro *la solución cuarta sistemática*, de las siete que les presenté, por ser esta, según ellos, la menos complicada y de exposición más breve.

Por esta razón será *esa misma solución cuarta* la que aquí se va á exponer; seguida de los argumentos con que se quiso destruirla, y de la refutación con que se hace ver la inanidad y ningún valor de todos ellos.

Pero téngase por sabido que *en el cuarto grado*, además de las siete soluciones trascendentes, *ó sistemáticas*, encontré también *otras siete no trascendentes;* todas estas *con radical cúbico* en la *resolvente de tercer grado*, como la que de antiguo se conocía. Y que por las fórmulas generales de las mismas, como en el otro libro se verá, tienen solución también las ecuaciones numéricas de este grado.

Es por lo demás tan fácil y corriente, según las reglas más elementales de la lógica cuantitativa, cuanto se hace para llegar desde la ecuación á las fórmulas, lo mismo en este grado que en el enésimo, que á quien encuentre dificultades para comprender todo el desarrollo del método que sigue, le será mejor dejar el libro y volverse atrás á estudiar como se debe el álgebra elemental, y aún también los elementos siquiera de la Psicología y de la Lógica.

Aquí no sirve de nada la palabrería insustancial con que los algebristas se despachaban á su gusto, tratando las ecuaciones no más que superficialmente, como si el fondo, en su relación íntima con lo más elemental del conocimiento, no mereciese la pena de ser tenido en cuenta para nada.

ARTÍCULO I.

Exposición del método.

Sea la ecuación:

$$Y^4+bY^3+cY^2+dY+n_1=0 \qquad (1)$$

Separando Y^2 en los tres primeros términos, d en los dos últimos, y expresando $\frac{n_1}{d}$ por n, será

$$Y^2(Y^2+bY+c)+d(Y+n)=0 \qquad (2)$$

Cuando la ecuación del grado **n**, á medio de transformaciones, termine por la derecha, en dos paréntesis análogos á los que tiene ésta, se dice que está preparada, y entonces empiezan las operaciones para resolverla.

Haciendo ahora

$$Y=r+\frac{z+1}{q} \qquad (3)$$

sustituyendo y ordenando la resultante para z, se tiene

$$(z+rq+1)^2 \left(\begin{array}{l|l} z^2+ \quad\quad\quad 2 & z \; + \quad\quad\quad 1 \\ +(2r+b)\, q & \; + \quad\quad (2r+b)\, q \\ & \; +(r^2+br+c)\, q^2 \end{array}\right) + (z+(r+n)\, q+1)=0 \qquad (4)$$

Obsérvese que, para resolver esta ecuación de z, tenemos las dos disponibles q y r, á las que daremos valor del modo siguiente:

Igualaremos primero á *cero* toda la cantidad, libre de z, que hay en el segundo paréntisis general, ó sea

$$(r^2+br+c)\, q^2+(2r+b)\, q+1=0 \qquad (5)$$

De donde sale

$$q=\frac{-2r-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2\,(r^2+br+c)} \qquad (6)$$

Obsérvese que, siendo debajo del radical $(2r+b)^2-4\,(r^2+br+c)$ desaparecen los términos de r, y solo queda b^2-4c.

Ahora, volviendo á la ecuación (4), tomaremos el coeficiente del término z en el segundo paréntesis, y le igualaremos á toda la cantidad libre de z del último paréntesis, ó sea

$$2rq+bq+2=rq+nq+1 \qquad (7)$$

O bien

$$(n-b-r)\, q=1 \qquad (8)$$

Sustituyendo en esta el valor (6) de q, y multiplicando por el denominador, será

$$(n-b-r)\,(-2r-b\pm\sqrt{b^2-4c})=2r^2+2br+2c \qquad (9)$$

Ejecutando en esta operaciones hasta despejar r, resulta

$$r=\frac{b^2-bn-2c\pm(n-b)\sqrt{b^2-4c}}{-b+2n\pm\sqrt{b^2-4c}} \qquad (10)$$

Con este valor de r, y el (6) de q, está hecha la solución.

En efecto. Con el valor (6) de q, no hay duda que se realiza la igualdad ó condición (5); y con el valor (10) de r, no hay duda que se realiza también la igualdad ó condición (7), después de poner en ella el valor de q, como está en (9).

Con esas dos condiciones realizadas, volveremos á la ecuacion (4), y suprimiremos en ella desde luego la cantidad del segundo paréntesis que se redujo á *cero* por la condición realizada (5); de seguida separaremos el factor común z que queda en los dos términos interiores á dicho paréntesis; y por fin, poniendo en vez de la cantidad $(r+n)\,q+1$, del último paréntesis, la que según la condición (7) es igual á ella, ó sea, $(2r+b)\,q+2$, y separando luego el factor común que resulta $(z+2rq+bq+2)$, queda la (4) en esta forma.

$$[z\,(z+rq+1)^2+dq^3]\,(z+2rq+bq+2)=0 \qquad (11)$$

En la cual está evidentemente la propuesta (1), reducida á un producto de dos factores, *uno de ellos primo*, de la forma general $(Y+A)$, y el otro de tercer grado; y cada uno de ellos, igualado á *cero*, verifica la ecuación, y es por lo tanto una raiz del grado respectivo.

Estas raices, ó factores, son, la de tercer grado

$$z\,(z+rq+1)^2+dq^3=0 \qquad (12)$$

y la de primero

$$z+2rq+bq+2=0 \qquad (13)$$

La (12) es una ecuación de tercer grado, que hay que resolver como tal, y nos dará tres valores para z; y la (13), nos da desde luego para z el valor

$$z=-(2rq+bq+2) \qquad (14)$$

El producto de la raiz (13), multiplicada por el producto de las tres que contiene la (12), reponiendo en ellas Y, será evidentemente *un sistema de cuatro raices primas*, que reproducen, y resuelven por lo tanto algebráicamente, la ecuación general propuesta en (1).

El valor (10) de r está determinado en función de los coeficientes de la (1); y poniendo el valor de r en el (6) de q, queda este determinado también en función de los coeficientes.

Y poniendo los valores de r y q, en el (13) de z, y teniendo en cuenta que se hizo en (3)

$$Y = r + \frac{z+1}{q} \qquad (15)$$

se obtiene precisamente uno de los valores de Y en su ecuación.

Esta fórmula de Y, simplificada por la sustitución directa del valor (14) de z, queda en esta forma definitiva

$$Y = -r - b - \frac{1}{q} \qquad (16)$$

la cual es la primera fórmula de Y en la ecuación propuesta (1).

Así es en resultado y modo la *cuarta solución sistemática*.

Lo que en ella se hace para llegar desde la ecuación (1) hasta la (11), en que está la solución, es indudablemente, como procedimiento lógico, inatacable en absoluto.

Y se habrá de tener presente, como ley general, que en la fórmula (16) de Y, lo mismo que en sus correlativas, al sustituir en ella para la solución de las numéricas, debe de hacerse la sustitución, de cada valor particular que tenga r, con cada uno particular que tome antes q, sustituyendo en su fórmula los de r, también uno á uno.

Siendo r y q, integrantes con b para un valor de Y, cuando este valor se integre con b y r, el quebrado en que está q se anulará; y cuando el valor de Y se integre á medio de b y el quebrado de q, r á su vez se anulará también.

En la práctica de las numéricas veráse esto resultar con evidencia incontrastable.

ARTÍCULO II.

Objecciones, y su refutación.

Si el procedimiento en sí es inabordable para la crítica, hay que ver ahora las objecciones que se le hicieron.

PRIMERA OBJECCIÓN.

La Academia tan solo presentó una, que fué luego la primera que presentó también Echegaray, y consiste en lo siguiente:

Dijeron ellos: «verdad es que despejando primero q en (5), »y poniendo su valor (6) en la igualdad (8), permanece r, y con »ella se realiza la condición (7), quedando con esto la solución »hecha y perfectamente acabada; *pero si se procede al revés*, »es decir, si se despeja q antes en la (8), y se lleva su valor á la »(5), desaparece de seguida r, y no queda *disponible* con que »realizar la condición (5); y por lo tan'o la solución no re»sulta.»

Que digan ellos, si no es esto lo que en sustancia dijeron una y otro.

Pues bien. Si la solución resulta, procediendo como hace el autor, no dejará de ser esto cierto, *porque no resulte*, procediendo como ellos quieren hacer. Para sostener lo contrario, se necesita renegar hasta del sentido común. Sería como decir: sumando 4 con 7, se produce 11; pero restando 4 de 7 no se produce 11; luego tampoco se produce 11, sumando 4 con 7.

Y también sería como decir: por tal camino subió usted á ese monte que se tenía por inaccesible; pero por otros mil caminos que nosotros hemos tanteado, no se pudo subir; luego no es cierto que se pueda subir por el que usted ha tanteado, por más que le veamos á usted en lo más alto del monte.

Tal es la hermosa lógica que aprendieron y practican por turno la Academia y Echegaray.

Que la primera lo hiciese nada tendría de sorprendente, después de lo que dijo *con motivo de los triángulos*, y porque en rigor, según los físicos, del vacío no puede salir sinó el vacío, es decir, la nada. Pero que hasta un Echegaray, tan precavido como se le tiene que suponer, haya venido á incidir en tan notable vulgaridad, eso ya no tendrá para nadie fácil explicación.

La segunda objección, ó argumento, que presentó el señor Echegaray, es obra exclusivamente suya.

SEGUNDA.

Y dijo el Sr. Echegaray: para despejar r en (8), después de poner en ésta el valor (6) de q, hay que quitar el denominador que lleva q, cuya operación no puede hacerse en este caso, *porque los denominadores de una ecuación no pueden quitarse*, cuando en ellos está, como ahora sucede, *la incógnita de la ecuación*. Y no pudiéndose quitar el denominador de q, no se puede despejar r, ni realizar por lo tanto la condición (7).

Que esto haya dicho el Sr. Echegaray, y discutiendo en serio, habrán de tenerlo por increible cuantos de ello lleguen á enterarse.

Quitar un denominador no es más que multiplicar por el mismo toda la ecuación.

A los principiantes ya se les dice, que para preparar una ecuación, lo primero que se ha de hacer, es, *quitarle los denominadores;* y esto sin que nunca se haya ocurrido á nadie distinguir el caso en que la incógnita se encuentre en los denominadores.

En todas las obras de Algebra, se practica esa operación, sin que por nadie se haya puesto el menor reparo.

Y, por fin, si no se quitan los denominadores de la ecuación cuando en ellos esté la incógnita, no queda otra solución aplicable que la del *tanteo,* el tanteo de número por número, que no es *de ciencia,* sinó de sentido común, y solo dará resultado cuando la ecuación tenga raices racionales.

Pero dícese que al quitar el denominador en que esté la incógnita, *se aumenta el grado de la ecuación,* y se llevan á ella *nuevos valores para la incógnita,* no se pudiendo saber luego cuales eran los primitivos de la misma.

Lo cual no es cierto en ninguno de los extremos que abraza. El grado de una ecuación no se sabe cual es, hasta que no se quiten los denominadores en que esté la incógnita; y, por lo tanto, al quitarlos, ni se altera el grado, ni se introducen valores nuevos.

TERCERA OBJECCIÓN.

Y en substancia dijo: «verdad es que, despejando q en (5), y »sustituyendo en (8), permanece r, y las dos igualdades se rea»lizan; y con esto la solución queda hecha: pero esto es tan solo »aparente, pues despejándose q en función de r, y r en función »de los coeficientes, al sustituir r en el valor (6) de q, que es un »quebrado, el denominador de este, $2\ (r^2+br+c)$, se convierte »en *cero.* Y por lo tanto el valor de q es infinito, y este valor »infinito de q, anula, esteriliza todo el procedimiento.»

Así lo dijo él, y con tal motivo se prolongó la discusión más de lo conveniente.

Y no hay duda que, siendo como es en sí cierto, que el denominador de q, al sustituir en el mismo el valor de r, *puede tomar un valor cero,* si no tomara también otros *que no son cero,* y tan solo se considerase á q en sí propio, y no en relación con todo lo demás que constituye el método, la nulidad de este pareceria en tal caso ser completa.

Pero es el caso que el Sr. Echegaray, afanado por encontrar á todo trance el arma mortífera que buscaba contra el autor de la *Ciencia nueva,* no advirtió que la novedad absoluta de ésta le ofuscaba y le hacía ver fantasmas donde no hay más que pura y resplandeciente claridad.

Vamos á ver esto con toda la brevedad que sea posible. Pero al hacerlo hay que tener presente, como ya queda indicado, que lo que se discute ahora no es precisamente el argumento de que se trata, sinó más bien lo que es en sí misma *la solución algebráica general de la ecuación del grado* **n**. Y como en la cuestión haya diferentes puntos de vista, hay que considerarla en todos, y con el orden necesario para la más completa claridad.

§ 1.º

El procedimiento en sí mismo es, en todos sus momentos, conforme en absoluto á las leyes de la lógica cuantitativa. Según esas leyes, q realiza la condición (6) en absoluto, y r la (4; y con esas dos condiciones realizadas, *la solución queda hecha*, y es absolutamente cierta.

Y, por lo tanto, en la esfera de la generalidad absoluta en que el Algebra se mueve, la solución alcanzada por tal camino, se nos impone como verdad irreprochable, *sean lo que fueren en sí mismos* los valores de q y de r, con que á esa solución se llega. Siendo como lo es, cierto el resultado, tienen que serlo también, y esencialmente legítimos, los medios con que el resultado se produce. Sea q *cero*, finito, infinito, racional ó irracional, como que al disponer de q solo atendemos á su generalidad absoluta, nada nos importa lo demás. Lo que pueda ser q en sí mismo, solo atañe á la ciencia pura de la realidad cuantitativa. La nada, lo infinito, lo absurdo, cuando la realidad los admite en sus procedimientos, tienen idéntico valor que lo que á nosotros nos parece determinado, finito, racional.

En nada puede afectar pues, á la verdad del procedimiento, que es genérico en absoluto, el que sea ó no infinito el valor de q. Lo finito es en todas las esferas. el resultado de la acción de los infinitos.

Con solo haber mirado de este modo la cuestión, y haberse hecho estas sencillas reflexiones, el Sr. Echegaray, á no hacer pública profesión de mala fé, no habría hecho un argumento, *de que sea ó no sea cero* el denominador de q. Pero, sigamos adelante.

§ 2.°

Que el denominador de q, con el valor de r, se reduce á *cero*.

Distingo, Sr. Echegaray. Si solo se admiten para r dos valores, como V. arbitrariamente pretendía, no hay duda, el denominador sería siempre *cero*. Pero como r, según se presenta su fórmula, nos ofrece cuatro valores diferentes, y no habrá algebrista que pueda citar una ley lógica, ni objetiva, que se infrinja al aceptar como legítimos los cuatro valores de r, se tiene como resultado, que si con dos de esos valores de r, se hace *cero* el denominador de q, no se hace *cero* con los otros dos. Esto lo puede comprobar cualquiera, con solo hacer la sustitución de los volores de r uno á uno, en el denominador de q.

El Sr. Echegaray, al pretender que de los cuatro valores que ofrece la fórmula de r, solo se pueden utilizar dos, no lo fundó en razón alguna, más que en la de su capricho, olvidándose con esto de que en ciencia no basta decir sí, porque sí, nó, porque nó; puesto que, para no hacer el ridículo. como los de «La Naturaleza» le hicieron, todo lo que se afirma ó se niega, hay que demostrarlo científicamente. Y en matemáticas sobre todo.

§ 3.°

Pero aún falta lo mejor en este punto.

El Sr. Echegaray parece que no ha visto, ó al menos no dió á entender que lo viera, que sustituyendo r en el numerador de q, y tomando los dos mismos valores que él quiere solos para el denominador, *el numerador* se reduce también á *cero;* pero *no se reduce á cero* con los otros dos valores que él quiere despreciar.

De lo cual resulta que q, antes de hacerse infinito, *se hace cero.* Y como al Sr. Echegaray, lo único que le repugna en *q es el valor infinito*, y no el *cero*, no hay duda que, si se hubiera fijado bien, no habría hecho siquiera mención de este argumento. ¿Afirma V. que q no sirve porque es infinito? Pues ya ve usted claramente que sirve, puesto que no puede ser infinito sin ser antes *cero*.

Y aunque arriba decimos, *si el Sr. Echegaray se hubiera fijado bien*, casi no se puede menos de creer que se fijó bien, y lo vió; pero como no le convenía para sus fines, lo calló, y solo hizo uso de lo que le convenía. ¿Cómo á su afamado talento se había de ocultar tan importante detalle?

§ 4.º

El valor (6) de q realiza en absoluto la condición contenida en la igualdad (5), puesto que realiza de igual modo esta igualdad.

En efecto. Poniendo en (5) el valor (6) de q, y dividiendo el numerador y el denominador del primer término, por (r^2+br+c), queda

$$\frac{(2r+b\pm\sqrt{b^2-4c})^2}{4\,(r^2+br+c)}-\frac{(2r+b)\,(2r+b\pm\sqrt{b^2-4c})^2}{2\,(r^2+br+c)}+1=0$$

Multiplicando por $4\,(r^2+br+c)$, resulta

$$(2r+b\pm\sqrt{b^2-4c})^2-2\,(2r+b)\,(2r+b\pm\sqrt{b^2-4c})+$$
$$4\,(rs+br+c)=0 \qquad (17)$$

Y ejecutando las operaciones indicadas se obtiene

$$4r^2+4br\pm4r\sqrt{\ }+b^2\pm2b\sqrt{\ }+b^2-4c-8r^2-4br\pm4r\sqrt{\ }-$$
$$-4br-2b^2\pm2b\sqrt{\ }+4r^2+4br+4c=0 \qquad (18)$$

Donde se ve con toda evidencia que el valor de q, tomado en absoluto, en función de r, realiza del mismo modo la igualdad (5), puesto que el polinomio (18) tiene un valor *cero*, por destrucción mutua entre sus términos, y sin necesidad de sustituir el balor de r.

Con este efecto que produce q, tan solo en función de r, si se procediera de buena fe, y con conocimiento de causa, debería bastar para que la verdad y legitimidad del procedimiento quedasen desde luego como incuestionables.

§ 5.º

Fijemos ahora la atención en la igualdad (5), y, ante todo, en que esta igualdad se halla en absoluto realizada en la (18), con el valor neto de q, tan solo en función de r.

La igualdad (5) se realiza por necesidad con el valor de q, según se demuestra en el § anterior.

Pero en el § 3.º queda visto que el numerador de q es *cero* siempre con los dos valores de r, *únicos* que le concede Echegaray. Pues bien. Si tal se admite, los dos primeros térmiuos del polinomio (5), que tienen q por factor, son *cero* por necesidad absoluta; y como consecuencia irresistible, habrá que admitir que $1=0$.

Y como esto es un absurdo inadmisible, es evidente que no se puede admitir tampoco que el numerador de q sea *cero*, es decir: los dos valores de r que hacen *cero* al numerador y al denominador de q, son precisamente los inadmisibles, *puesto que conducen á un absurdo evidente*.

q realiza en absoluto la igualdad (5); con el valor *cero* para su numerador, no la realiza: luego los dos valores de r—los de Echegaray—que hacen *cero* al numerador y al denominador á la vez, son absurdos. Como es en efecto absurdo cuanto la Academia y el Sr. Echegaray sostuvieron en esta cuestión tan clara.

§ 6.º

Y no se diga que el primer término de la (5) podrá ser *cero*, porque lo sea su coeficiente que es (r^2+br+c), porque entonces la suma de los otros dos términos no puede ser *cero*, á menos de dar á q, y por lo tanto á r, valores diferentes de los que ya tienen en (6) y en (10), lo cual sería contra todo lo supuesto, y supondría otro método diferente del que se ha seguido y estamos discutiendo.

q realiza la igualdad (5) tan solo con el valor (6), y no con ningún otro. Pero ese valor (6) *no puede ser cero*, como se acaba de ver; y por la misma razón *no puede ser infinito*, cuando se considera á q en su propia fórmula.

¡Y pensar que el Sr. Echegaray estuvo durante meses, después de haberlo meditado años, sosteniendo todo lo contrario!

Que r no tiene más que dos valores: uno tomando el radical con el primer signo arriba y abajo, y otro con el segundo respectivamente.

¿Porqué no puede tomar los otros dos? Porque no puede tomarlos. ¿Porqué no puede? Porqué nó, porque no puede tomarlos, porque es un disparate que los tome, una barbaridad, una aberración, una monstruosidad, un absurdo, un desatino. Solo así ha razonado en este punto el Sr. Echegaray.

Ahora ya verá, si es que antes no lo ha visto, que lo desatinado, lo absurdo, lo monstruoso, la aberración, lo bárbaro, lo disparatado, es precisamente lo que él sostuvo durante meses, después de haberlo meditado con calma durante años.

Y, no hay duda, que si el Sr. Echegaray no encontró más argumentos que oponer á la verdad de la Solución Algebráica, considerada en sí misma, es porque no los hay. Y, como los opuestos, ni siquiera el nombre merecen de tales, la Solución Algebráica quedará desde ahora, para todo el que no renuncie á llamarse racional, reconocida como verdad incontrastable.

§ 7.º

Para que otros no incurran en estas ú otras nimiedades semejantes, conviene añadir aún la siguiente comprobación.

El valor de *q* no es en sí mismo donde se le ha de considerar tan solo, ni aún en la manera como realiza en absoluto la igualdad (6), y contribuye luego á producir el valor de *r*.

Hay que verle además en la fórmula de *Y*, primera deducida, para la ecuación dada (1).

La fórmula, según está en (15), y luego en (16), poniendo en ésta el valor de *q*, será

$$Y = -r - b + \frac{2r^2 + 2br + 2c}{2r + b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}$$

En la cual se ve claramente que, no pudiendo ser el quebrado, ni un valor *cero*, ni un valor infinito, sopena de tener que admitir el absurdo de que, *1=0*, el valor de *Y*, que representa esta fórmula; está constituido por la integración mútua entre los valores de *r*, *b*, y *q* invertido.

Este valor de *Y*, en la esfera de lo general algebráico, *es cierto en absoluto,* puesto que multiplicado por los otros tres, contenidos en la ecuación (12) de tercer grado, se reproduce exactamente la ecuación propuesta (1).

Lo cual es precisamente, lo que en fondo y forma constituye la solución algebráica de las ecuaciones generales.

Pero aún hay que tener presente, como en el tercer grado se ha visto ya, que siendo *r* y *q*, integrantes con *b* en este grado, de un valor de *Y*; como variables que son, para que la fórmula sea cierta, es preciso que cada una en su caso, pueda tomar el valor *cero*, cuando la otra baste para integrar el valor de *Y*.

Precisamente por esto, es por lo que el denominador de *q*, que puede ser *cero* en su fórmula propia, al entrar invertido en la fórmula de *Y*, puede convertir en *cero* la fracción. Y lo mismo se ha de entender en cuanto al valor de *r*.

Y también se ha de advertir que, siendo simplificables los valores de r y q, el simplificado de q puede anular, ó no anular el simplificado de r, según se tome el signo del radical; pero quedando en el primer caso, del valor de q, lo necesario para integrar el valor de Y.

Todo esto se verá prácticamente al resolver numéricas por las fórmulas que preceden.

CUARTA OBJECCIÓN.

Convencido el Sr. Echegaray de la inutilidad absoluta de las tres objecciones que preceden, tuvo aún el valor, ¡que valor se necesita! de presentar otra, la última, consistente en pedir, *que se le demostrase, que las ecuaciones numéricas tienen solución por las fórmulas generales y sistemáticas*, que se acaban de ver en el cuarto grado.

Sin hacerse cargo entonces. al parecer, como de seguro se lo habrá hecho después, de que:

1.º La certeza de la solución general, no depende en manera alguna, de lo que pueda ser en sí la solución de las numéricas contenida en las fórmulas generales.

2.º Que sea lo que fuere, es evidente que cada ecuación numérica tiene una solución determinada y propia en las fórmulas generales de su grado, con solo poner los coeficientes numéricos en lugar de las letras respectivas; pero sin que esto implique, el que la numérica no pueda tener otra ú otras soluciones diferentes.

3.º Que los algebristas todos, inclusos Abel, Newton, Cauchy, Galois, y todos los más célebres, admitieron como ciertas, como verdaderamente legítimas, las fórmulas generales de Cardan y de Ferrari, en los grados tercero y cuarto, á pesar de que ninguno llegó á resolver por ellas, las numéricas de los mismos grados.

Además de esto que se le dijo, precipitadamente al ver su decidido empeño en abandonar la polémica, se le puso á la vista una ecuación numérica, resuelta *por el cuarto modo sistemá-*

tico; y sin embargo de todo, se evaporó, y no dijo una palabra más.

Pero es bien claro. ¿Qué más había de decir después de lo que dijo?

Ahora ya no puede quedar duda. Quien haya leido atentamente lo que precede, no habrá podido menos de formarse clara y precisa idea de lo que es en principio la solución algebráica, y de la clase de oposición que se le ha hecho.

Echegaray dijo: si no hubiera sofisma, la cuestión estaría resuelta.

Y que no hay tal sofisma debe tenerse ya por evidente, puesto que el mismo Echegaray, con el tesón de que es capaz, su vista de lince, y años de meditación, no pudo señalarle. La nulidad completa de los argumentos que opuso no puede ser más patente. Y cuando él no opuso más, es que no los hay. En vano será que nadie intente buscar otro.

Y por lo tanto, *mi solución algebráica* tendrá que quedar ahí como un hecho realizado para siempre, como verdad ineluctable. Las consecuencias necesarias de tal hecho, ya se irán poniendo por sí mismas. La ignorancia y el error lucharán, como siempre, sin reparar en medios; pero cederán, y soltarán la breva, que es precisamente lo que duele.

CAPÍTULO QUINTO.

La solución general sistemática más allá del cuarto grado

A cualquiera que llegue á ver la solución que con el carácter de sistemática, y como trascendente al infinito, se acaba de explicar en los grados *tercero y cuarto*, no podrá menos de ocurrírsele preguntar: ¿cómo se puede, con tales métodos, resolver la ecuación del grado n? Pues, de esta duda se sàle muy fácilmente, con solo ver cómo se resuelven *la de quinto y la de sexto grado*.

Pero se habrá de tener en cuenta, al estudiar la solución más allá del cuarto grado, que las fórmulas generales, de forma siempre irracional, por la ley misma del procedimiento, al aplicarlas á la solución de las numéricas, no se deberá buscar en ellas, *más que las raices irracionales de cada ecuación*, que de tal clase las tenga solamente, después de haber determinado las raices racionales que contenga, por el método, y *fórmulas sintético-analíticas*, que se expondrán en el siguiente libro ya indicado.

Lo referente á la relación que pueda haber entre las raices numéricas *que resulten de las fórmulas generales de un procedimiento*, y las que resulten *de otro procedimiento cualquiera*, es cuestión que en nada afecta á la verdad de las fórmulas generales en sí mismas. Y acerca de lo cual, para que nada falte, se dirá lo necesario en el siguiente libro.

ARTÍCULO PRIMERO.

Solución sistemática de quinto grado.

Sea la ecuación: $Y_2^5 + b_2\, Y_2^4 + c_2\, Y_2^3 + d_2\, Y_2^2 + e_2\, Y_2 + n_2 = 0$ (A)

Haciendo $Y_2 = (Y_1 + r_1)$, se sustituye, y en la resultante para Y_1, daremos á r_1 el valor necesario para que se reduzca á *cero* el coeficiente de Y_1^2 ó sea el antepenúltimo término; lo cual nos dará á resolver la de tercer grado:

$$10\, r_1^3 + 6\, b_2\, r_1^2 + 3\, c_2\, r_1 + d_2 = 0 \qquad \text{(h)}$$

Resuelta esta ecuación y eliminado así el término de Y_1^2, expresaremos respectivamente los demás coeficientes y último término, por las letras b_1, c_1, c_1, n_1; y dividiendo á la vez por e_1, la ecuación será:

$$\frac{Y_1^3}{e_1}\left(Y_1^2+b_1Y_1+c_1\right)+\left(Y_1+\frac{n_1}{e_1}\right)=0. \qquad (A_1)$$

Esta ecuación, como se vé, tiene las cantidades de los paréntesis, idénticas en la forma á los de la 2 en la de cuarto grado, y tratada como aquélla, se le dará el divisor de primer grado, y se obtendrá la deducida final de cuarto.

También se la puede tratar como la 2 de la de tercero, y dará los mismos resultados.

ARTÍCULO II.

Solución sistemática de sexto grado.

Sea la ecuación:

$$Y_3^6+b_3Y_3^5+c_3Y_3^4+d_3Y_3^3+e_3Y_3^2+f_3Y_3+n_3=0. \qquad (A)$$

Haciendo $Y_3=(Y_2+r_2)$, se sustituye, y se da á r_2 el valor necesario para reducir á *cero* el coeficiente de Y_2^2, ó sea el antepenúltimo término; lo cual nos dará á resolver la siguiente de cuarto grado:

$$15\,r_2^4+10\,b_3\,r_2^3+6\,c_3\,r_2^2+3\,d_3\,r_2+e_3=0. \qquad (h)$$

Resuelta ésta, y eliminado así el expresado término, separaremos Y_2^3 en los cuatro primeros términos de la resultante para Y_2; expresaremos los demás coeficientes y último término, respectivamente por b_2, c_2, d_2, f_2, n_2; y partiendo por f_2, será:

$$\frac{Y_2^3}{f_2}\left(Y_2^3+b_2\,Y_2^2+c_2\,Y_2+d_2\right)+\left(Y_2+\frac{n_2}{f_2}\right)=0. \qquad (A_1)$$

Haciendo en ésta $Y_2=(Y_1+r_1)$, se sustituye, y en la resultante de Y_1, se dará á r_1 el valor necesario para reducir á *cero* toda la última cantidad que aparece libre de Y_1 en el segundo paréntesis, lo cual nos dará á resolver la de tercer grado:

$$r_1^3+b_2 r_1^2+c_2 r_1+d_2=0. \qquad (h_1)$$

Eliminado así dicho término en la resultante, se separa el factor comun Y_1 que queda en el segundo paréntesis; y expresando los demás coeficientes por b_1, c_1, n_1, se tendrá:

$$\frac{Y_1(Y_1+r_1)^3}{f_2}(Y_1^2+b_1Y_1+c_1)+(Y_1+n_1)=0. \qquad (A_2)$$

Esta ecuación tiene, como se ve, los dos últimos paréntesis idénticos en la forma á los de la 2 en la de cuarto grado, y tratada como aquélla, se le dará el divisor de primer grado, obteniéndose la deducida final de quinto.

Al mismo resultado se llegará si se la trata como la 2 de la solución de tercer grado.

ARTÍCULO III.

FÓRMULA GENERAL SINTÉTICA
para resolver algebráicamente la ecuación del grado *n* ya tenga raices y coeficientes racionales, ó ya los tenga irracionales.

ES EL IMPOSIBLE SECULAR DE LA CIENCIA.

Sea la ecuación

$$Y_m^n+b_1Y_m^{n-1}+b_2Y_m^{n-2}+\ldots b_{(n-2)}Y_m^2+b_{(n-1)}Y_m+b_n=0 \quad A$$

Separando como factor común en los dos últimos términos el coeficiente $b_{(n-1)}$, y en los precedentes Y_m^2; haciendo de seguida $Y_m = Y_{m-1} + P_{m-1}$; sustituyendo; y expresando los coeficientes en el paréntesis del medio por ${}_1b_1$, ${}_1b_2$,... ${}_1b_{n-2}$; y la suma de los términos sin Y del último parentesis, ó sea, $\left(P_{m-1} + \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$ por S_1, tendremos:

$$(Y_{m-1}+P_{m-1})^2(Y_{m-1}^{n-2}+{}_1b_1Y_{m-1}^{n-3}+\ldots{}_1b_{(n-3)}Y_{m-1}+{}_1b_{n-2})+b_{n-1}(Y_{m-1}+S_1)=0$$

Obsérvese ahora que la ecuación está reducida á una suma de dos cantidades, ó sumandos; el segundo formado por un paréntesis con su coeficiente que será constante, y el primero, por un producto de paréntesis, que siendo ahora dos, aumentará en uno por cada transformación sucesiva que se haga, siendo de tres en esta primera, luego que se encuentre terminada. En las referencias que se hagan á los paréntesis de las transformadas sucesivas, se entenderá por *último*, el del segundo sumando, y por *anterior*, el último del producto del primer sumando.

En la ecuación que precede, el último término del paréntesis anterior al último, ó sea, ${}_1b_{n-2}$, igualándose á cero, representa para la disponible P_{m-1}, la ecuación del grado (n —2).

Igualando, pues, á cero el polinomio ${}_1b_{n-2}$, (léase subuno b subene menos dos), sabremos ya resolver esta ecuación, desde el momento en que sepamos resolver la del grado n, para Y_m. Resuelta la ecuación ${}_1b_{n-2}$, y sustituyendo un valor de P_{m-1}, en el paréntesis anterior al último, y separando en el mismo el factor común Y_{m-1}, quedará la ecuación en esta forma:

$$(Y_{m-1}+P_{m-1})^2(Y_{m-1})\,(Y_{m-1}^{n-3}+{}_1b_1Y_{m-1}^{n-4}+\ldots{}_1b_{(n-3)}Y_{m-1}+{}_1b_{n-2})$$
$$+b_{(n-1)}\,(Y_{m-1}+S_1)=0 \qquad A_1$$

En esta se hace $Y_{m-1} = Y_{m-2} + P_{m-2}$; sustituyendo; y expresando los coeficientes del paréntesis anterior al último, por ${}_2b_1$, ${}_2b_2$,... ${}_2b_{n-3}$, y la cantidad sin Y, del último paréntesis, ó sea, $(P_{m-2}+S_1)$, por S_2, la ecuación será:

$$(Y_{m-2}+P_{m-2}+P_{m-1})^2(Y_{m-2}+P_{m-2})(Y_{m-2}^{n-3}+{}_2b_1Y_{m-2}^{n-4}+\ldots{}_2b_{(n-3)}Y_{m-2}+{}_2b_{n-2})$$
$$+b_{(n-1)}\,(Y_{m-2}+S_2)=0$$

En ésta, el último término del paréntesis anterior al último, ${}_{2}b_{n-3}$, représenta la ecuación del grado $(n-3)$ para la disponible P_{m-2}, é igualando á cero el polinomio, desaparece dicho término. La expresada ecuación, y las sucesivas para P_{m-3}, P_{m-4}, y así continuando, las supondremos resueltas, por la misma razón ya indicada en la primera sustitución.

Reducido, pues, á cero, el último término del paréntesis anterior, sustituyendo el valor de P_{m-2}, en el mismo paréntesis; y separando luego el factor común Y_{m-2}, resultará la ecuación en esta forma:

$$(Y_{m\cdot 2}+P_{m\,2}+P_{m\cdot 1})^2(Y_{m\cdot 2}+P_{m\cdot 2})(Y_{m\cdot 2})(Y^{n-4}_{m\cdot 2}+{}_2b_1Y^{n-5}_{m\,2}+\ldots{}_2b_{(n\,3)}Y_{m\cdot 2}+{}_2b_{n\,2})$$
$$+b_{(n\cdot 1)}\,(Y_{m-2}+S_2)=0 \qquad A_2$$

Continuando así las sustituciones y operaciones por el mismo orden, y haciendo $m=n-4$, es evidente que cuando se hayan hecho *m* sustituciones, el polinomio del paréntesis anterior al último, tomará esta forma:

	$(Y_2+{}_mb_1Y+{}_mb_2)$	k
El parentesis último será	$b_{(n\cdot 1)}(Y+S_m)$	
El primero del producto será	$(Y+P+P_1+\ldots..P_{m-1})$	
El segundo será	$(Y+P+P_1+\ldots..P_{m-2})$	

Y así continuando hasta que el factor contiguo al indicado en k será (Y).

Y por lo tanto, la ecuación después de las *m* operaciones, será:

$$(Y+P+P_1+\ldots.\,P_{m\,1})^2(Y+P+P_1+\ldots..\,P_{m\,2})\ldots..(Y)\,(Y^2+{}_mb_1Y+{}_mb_2)$$
$$+b_{(n\cdot 1)}\,(Y+S_m)=0 \qquad A_m$$

La cual es la que llamaremos *preparada*, por tener los paréntesis, *último y anterior*, en la forma conveniente, como la 2 en los grados tercero y cuarto, para hacer que el *último* se convierta en divisor del anterior, y por lo tanto, *en divisor de primer grado* de la ecuación propuesta.

Dado, pues, el divisor á la ecuación, por cualquiera de los dos modos, y hecha la división, se tendra ya conocida una raiz, de las n que aquella tiene, y quedará para resolver la ecuación del grado (n—1) que contendrá las otras (n—1) raices.

La manera de dar á la ecuación el divisor de primer grado, común al último paréntesis y al anterior, es lo que está expuesto y demostrado *por siete modos diferentes,* en los cuadernos tercero y cuarto de Lucubraciones Algebráicas, dos de los cuales son los expuestos en este libro.

ARTÍCULO IV.

SISTEMA DE n ECUACIONES CON n INCÓGNITAS DEL *enésimo* GRADO

Su resolución sistemática.

Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas del *enésimo* grado, se resolverá primero una de sus ecuaciones, con relación á una de las incógnitas que contenga, y sustituido el valor de ésta en las demás, nos quedará para resolver un sistema de $(n-1)$ ecuaciones con $(n-1)$ incógnitas y de cualquier grado.

Procediendo con éste como con el anterior, se obtendrá otro de $(n-2)$ ecuaciones con $(n-2)$ incógnitas y de cualquier grado.

Continuando así con éste y los siguientes se llegará *á una sola* ecuación, con una incógnita y de cualquier grado.

Resuelta ésta, y hallado el valor de la incógnita en función de los coeficientes *numéricos* ó literales, se retrocede sustituyendo hasta quedar resueltas todas las ecuaciones en función de los coeficientes dados en el sistema propuesto.

Pero ahora debe observarse que al resolver una ecuación del sistema $(n-1)$, y después la del siguiente, y así hasta la última, puede suceder, y sucede de seguro, que la incógnita que vamos á despejar se halla sometida á los radicales con que se resolvió la ecuación ó ecuaciones anteriores, y, en tal caso, lo primero que hay que hacer, es *eliminar* los radicales hasta que la incógnita quede libre de ellos ó fuera de todos ellos.

Esta operación, si no hay más que radicales de segundo grado, es de muy fácil ejecución; y, por esto, cuando se trate de resolver un tal sistema de ecuaciones, será preciso resolver desde el principio las de tercer grado, y las de cuarto, por el método que sólo admite los radicales de segundo.

La dificultad, que á mí me pareció insuperable, de eliminar de un polinomio los radicales de tercero y superiores grados, no reducibles al segundo, siendo más de dos ó tres, fué lo que principalmente me obligó á buscar las soluciones de tercer grado sin radical de grado impar.

Ahora que ya se sabe la solución del grado n, y la de los sistemas de ecuaciones, ninguna dificultad habrá ya para comprender también:

1.º Que las raices halladas por el procedimiento sistemático *son exactas*, puesto que son factores y divisores exactos de la ecuación. Y, que por lo tanto, *las raices aproximadas* de las teorías de todos los algebristas, no siendo factores, ni divisores exactos de la ecuación, no son tampoco raices de la misma, ni tienen por ende valor alguno ante la Ciencia.

2.º Que hallada la primera fórmula para la ecuación del grado n, se tendrá en ella *la primera raiz*; y las (n—1) que faltan, en la ecuación del cociente exacto, que se obtiene al dividir la ecuación por la primera raiz hallada.

3.º Que halladas las n raices primas de la ecuación del grado n, las raices, de segundo grado, de tercero, hasta del grado (n—1), no serán más que las combinaciones binarias, ternarias, y, así siguiendo, que se puedan formar con las n raices primas de la ecuación.

4.° Que la cuestión de *eliminar incógnitas*, de un sistema dado de ecuaciones, queda desde ahora reducida, á la ya evidente *de resolver algebráicamente todas las ecuaciones del sistema.*

5.° Que si n es infinito, el sistema que representa, no es imposible para nosotros *en cuanto á saberle resolver, sinó en cuanto á poderlo ejecutar.*

ÍNDICE.