ECUACIONES.

FÓRMULA GENERAL SINTÉTICA

PARA RESOLVER ALGEBRÁICAMENTE LA DEL GRADO *N*

ya tenga raices y coeficientes racionales, ó ya los tenga irracionales.

ES EL IMPOSIBLE SECULAR DE LA CIENCIA.

Sea la ecuación $Y^n_m + b_1 Y^{n-1}_m + b_2 Y^{n-2}_m + \ldots b_{(n-2)} Y^2_m + b_{(n-1)} Y_m + b_n = 0$ **A**

Separando como factor común en los dos últimos términos, el coeficiente $b_{(n-1)}$, y en los precedentes Y^2_m; haciendo de seguida $Y_m = Y_{m-1} + P_{m-1}$; sustituyendo; y expresando los coeficientes en el paréntesis del medio por ${}_1b_1$, ${}_1b_2$, ... ${}_1b_{n-2}$; y la suma de los términos sin Y del último paréntesis, ó sea, $\left(P_{m-1} + \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$, por S_1, tendremos:

$$(Y_{m-1} + P_{m-1})^2 (Y^{n-2}_{m-1} + {}_1b_1 Y^{n-3}_{m-1} + \ldots {}_1b_{(n-3)} Y_{m-1} + {}_1b_{n-2}) + b_{n-1}(Y_{m-1} + S_1) = 0$$

Obsérvese ahora que la ecuación está reducida á una suma de dos cantidades, ó sumandos; el segundo formado por un paréntesis con su coeficiente que será constante, y el primero, por un producto de paréntesis, que siendo ahora dos, aumentará en uno por cada transformación sucesiva que se haga, siendo de tres en esta primera, luégo que se encuentre terminada. En las referencias que se hagan á los paréntesis de las transformadas sucesivas, se entenderá por *último*, el del segundo sumando, y por *anterior*, el último del producto del primer sumando.

En la ecuación que precede, el último término del paréntesis anterior al último, ó sea, ${}_{1}b_{n-2}$, igualándole á cero, representa, para la disponible P_{m-1}, la ecuación del grado $(n-2)$.

Igualando, pues, á cero el polinomio ${}_{1}b_{n-2}$, (léase subuno b subene menos dos), sabremos ya resolver esta ecuación, desde el momento en que sepamos resolver la del grado *n* para Y_m. Resuelta la ecuación ${}_{1}b_{n-2}$, y sustituyendo un valor de P_{m-1}, en el paréntesis anterior al último, y separando en el mismo el factor común Y_{m-1}, quedará la ecuación en esta forma:

$$(Y_{m-1}+P_{m-1})^2(Y_{m-1})(Y_{m-1}^{n-3}+{}_{1}b_{1}Y_{m-1}^{n-4}+\dots{}_{1}b_{(n-4)}Y_{m-1}+{}_{1}b_{n-3})$$
$$+b_{(n-1)}(Y_{m-1}+S_1)=0 \qquad A_1$$

En esta se hace $Y_{m-1}=Y_{m-2}+P_{m-2}$; sustituyendo; y expresando los coeficientes del paréntesis anterior al último, por ${}_{2}b_{1}$, ${}_{2}b_{2},\dots {}_{2}b_{n-3}$, y la cantidad sin Y, del último paréntesis, ó sea, $(P_{m-2}+S_1)$, por S_2, la ecuación será:

$$(Y_{m-2}+P_{m-2}+P_{m-1})^2(Y_{m-2}+P_{m-2})(Y_{m-2}^{n-3}+{}_{2}b_{1}Y_{m-2}^{n-4}+\dots{}_{2}b_{(n-4)}Y_{m-2}+{}_{2}b_{n-3})$$
$$+b_{(n-1)}(Y_{m-2}+S_2)=0$$

En ésta, el último término del paréntesis anterior al último, ${}_{2}b_{n-3}$, representa la ecuación del grado $(n-3)$ para la disponible P_{m-2}, é igualando á cero el polinomio, desaparece dicho término. La expresada ecuación, y las sucesivas para P_{m-3}, P_{m-4}, y así continuando, las supondremos resueltas, por la misma razón ya indicada en la primera sustitución.

Reducido, pues, á cero el último término del paréntesis anterior; sustituyendo el valor de P_{m-2}, en el mismo paréntesis; y separando luégo el factor común Y_{m-2}, resultará la ecuación en esta forma:

$$(Y_{m-2}+P_{m-2}+P_{m-1})^2(Y_{m-2}+P_{m-2})(Y_{m-2})(Y_{m-2}^{n-4}+{}_{2}b_{1}Y_{m-2}^{n-5}+\dots{}_{2}b_{(n-5)}Y_{m-2}+{}_{2}b_{n-4})$$
$$+b_{(n-1)}(Y_{m-2}+S_2)=0 \qquad A_2$$

Continuando así las sustituciones y operaciones por el mismo orden, y haciendo $m=n-4$, es evidente que cuando se hayan hecho *m* sustituciones, el polinomio del paréntesis anterior al último, tomará esta forma:

El paréntesis último será $(Y^2+{}_m b_1 Y+{}_m b_2)$ $\quad$ k
$b_{(n-1)}(Y+S_m)$

El primero del producto será $(Y+P+P_1+.....P_{m-1})$

El segundo será $(Y+P+P_1+.....P_{m-2})$

Y así continuando, hasta que el factor contiguo al indicado en k, será (Y).

Y por lo tanto, la ecuación después de las *m* operaciones será:

$$(Y+P+P_1+....P_{m-1})^2(Y+P+P_1+.....P_{m-2}).....(Y)(Y^2+{}_m b_1 Y+{}_m b_2)$$
$$+b_{(n-1)}(Y+S_m)=0 \qquad A_m$$

La cual es la que llamaremos *preparada*, por tener los paréntesis, *último* y *anterior*, en la forma conveniente para hacer que el *último* se convierta en divisor del anterior, y por lo tanto, *en divisor de primer grado* de la ecuación, ó bien hacer que ambos paréntesis se identifiquen, después de multiplicar la ecuación por otra raíz de primer grado, $(Y+p)$, dándose entonces á la ecuación del grado $(n+1)$, un divisor de segundo grado, que será de primero para la propuesta.

Dado, pues, el divisor á la ecuación, por cualquiera de los dos modos, y hecha la división, se tendrá ya conocida una raíz, de las *n* que aquella tiene, y quedará para resolver la ecuación del grado $(n-1)$, que contendrá las otras $(n-1)$ raices.

La manera de dar á la ecuación el divisor de primer grado, común al último paréntesis y al anterior, es lo que está expuesto y demostrado *por siete modos diferentes*, en los cuadernos tercero y cuarto de Lucubraciones Algebráicas.

En dichos cuadernos está demostrada la solución, que lleva allí el nombre de *sistemática*, desde el grado tercero al séptimo; pero no se hizo la generalización, por no creerla entonces necesaria. Y este trabajo de ahora, por lo tanto, no será más que un complemento de lo que allí está demostrado.

Si suponemos, por ejemplo, que para preparar el divisor común en A_m, se ha seguido *la sexta solución sistemática*, demostrada en el cuaderno cuarto, tendremos como valor de Y, en la primera fórmula para A_m,

$$Y = r + \frac{1}{s} + x$$

siendo r, s y x, valores conocidos, puesto que son las disponibles, por cuyo medio se llega á preparar el divisor, quedando aún sin utilizar, por dicho procedimiento, la disponible p.

Y según esto, la primera fórmula general, para la ecuación del grado *n*, propuesta en A, será:

$$Y_m = (P + P_1 + P_2 + \ldots\ldots P_{m-1}) + (r + \frac{1}{s} + x) \qquad k_1$$

Propiedades y explicaciones generales.

1.ª Pero ahora debe observarse ante todo, que en la ecuación dada A, en vez de empezar separando dos términos á la derecha y los demás á la izquierda, se puede separar tres ó más á la derecha y los demás respectivamente á la izquierda, hasta quedar dos á la izquierda y los demás á la derecha. Pero entonces la reducción á cero de los últimos términos, no se hará sólo en el paréntesis de la izquierda, sino también en el de la derecha, hasta que uno quede con tres términos y el otro con dos, en la forma que tienen, y pudiendo cambiar de lugar en A_m.

2.ª Esta diferente manera en que se puede disponer la ecuación, para empezar á operar en ella, debe tenerse en cuenta, puesto que, como ya se ha visto y comprobado en la práctica, nos da el modo de evitar la presencia de los radicales imaginarios, en las fórmulas de los valores de P, P_1, ... etc.; pues, si disponiendo de un modo aparecen tales radicales, disponiendo de otro no aparecerán, siempre que sean sólo *radicales del procedimiento*, y no de las raices. Si lo fuesen de éstas, no podrá evitarse su presentación. Y entendiéndose, que la tal manera de disponer la ecuación, no sólo es aplicable á la ecuación A, sino también á las de P, P_1,.... hasta la P_{m-1}.

3.ª En la fórmula k_1 están representados, por ser del todo general, los *n* valores que corresponden á Y_m, ya sean racionales, ó ya irracionales, de cualquiera de las formas posibles en la ecuación de coeficientes racionales. Mas en tal ecuación, ya está demostrado que sólo pueden entrar los irracionales cuadrados y los cúbicos; y en todo caso, conjugados convenientemente.

4.ª En relación con estas dos formas de los irracionales, las ecuaciones de tercer grado, á que se llegue al resolver las de P, P_1,... etc., etc , pueden también resolverse con radicales cúbicos y cuadrados, ó sólo con los cuadrados.

5.ª La fórmula k_1 no es en rigor mas que una raíz de la ecuación dada, y las otras (n-1), deberían buscarse siempre en la ecuación que queda á resolver, después de separada la primera raíz. El sistema propio de las *n* raices, es el que tiene una de cada fórmula. En el cuaderno tercero puede verse esto, como está hecho, en los grados desde el tercero al séptimo

6.ª La ecuación de coeficientes irracionales, no es más que la ecuación de raices irracionales no conjugadas. Tal ecuación está directamente resuelta en k_1, con solo sustituir los coeficientes en las fórmulas de la ecuación.

7.ª Para que de la fórmula k_1 y sus correlativas, puedan resultar las raices racionales que tenga la ecuación, bien claro es que tendrán que desaparecer todos los radicales, ya por sí mismos, ya á medio de las disponibles de la sexta solución sistemática. Y si por ningún modo desapareciesen, las raices numéricas que den tales fórmulas, serán como son éstas, *puramente sintéticas*, y como tales, aproximadas siempre á las analíticas *en menos de una unidad*. Esto resulta evidente de la naturaleza misma de las fórmulas. En tal caso, las raices racionales que tenga la ecuación, estarán indicadas en uno de los dos números enteros consecutivos, entre los que se encuentre comprendida la raíz sintética, después de eliminar los radicales, por la extracción directa de sus raices; pero entendiéndose, que todo número racional, que sea raíz de la ecuación, ha de ser divisor del último término. Con sólo aproximar las raices indicadas por los radicales, quedan aproximadas las raices de la ecuación.

8.ª Las raices de forma irracional, en la práctica, nada representan, y para nada sirven, si no se les da forma racional, de valor aproximado, por la extracción de las raices indicadas.

9.ª Las raices analíticas, como sean en sí mismas, y en su forma propia de racionales ó irracionales, debieran buscarse siempre, con preferencia, cuando en tal forma se las quiera conocer, por el método fundado en la *fórmula de las Series*, explicado en el cuaderno décimo, y cuya generalización está ya hecha como la presente.

10. Si se construyen las n fórmulas de cada ecuación, en el caso de no tener ésta más que raices irracionales, las numéricas que nos den *las fórmulas sintéticas* podrán tomarse en la práctica como equivalentes á las de las *fórmulas analíticas*, puesto que unas y otras, además de reproducir exactamente la ecuación, bajo la forma de irracionales, si se las reduce á racionales aproximadas, cuando sea posible, estarán siempre, cada dos, una de cada clase, comprendidas entre dos números enteros consecutivos.

11. Según esto, el procedimiento sintético podrá ser preferido el analítico, por más breve y fácil de ejecutar, siempre que sólo se trate de conocer aproximadamente, en menos de una unidad, las raices irracionales que tenga una ecuación; y porque además, las racionales que pueda contener, nos las indican las irracionales en uno de los dos números enteros consecutivos, entre los cuales se encuentran comprendidas. Al utilizar *esta indicación*, se tendrá en cuenta, como ya se ha dicho, que para que un número entero sea raíz de una ecuación, ha de ser necesariamente divisor del último término.

12. Al hacer las sustituciones, empezando desde la ecuación A, para formar los factores numéricos de los coeficientes, en los términos respectivos, puede seguirse como es sabido, la regla sacada del *binomio;* pero también pueden formarse utilizando las *series numéricas*, como están presentadas en el cuaderno primero de lucubraciones algebráicas, y procediendo como allí también se indica. La ventaja de las series para tal fin, es incuestionable, puesto que los factores numéricos para cada polinomio, resultan de la suma sucesiva de los términos de la serie que le precede en orden, empezando por la derecha: de modo que, por las series, cada factor se forma *sumando dos números;* y por el binomio, hay que *multiplicar dos números*, y luego *dividir el producto* por un tercero. Esta inmensa mayor facilidad y brevedad, fué la razón única de presentar las series bajo la forma que en dicho cuaderno se les dió.

13. Estando ya demostrado en el cuaderno décimo, que en las raices de la ecuación de coeficientes racionales, no pueden entrar otros radicales que los de segundo y tercer grado, y que como consecuencia de esto, en las fórmulas de solución, tampoco pueden aparecer otros radicales de mayor grado, resulta por todo ello evidente, que el procedimiento que precede, es, en cuanto á su forma, y en cuanto á su fondo, como procedimiento *sintético*, el único posible, el único racional, y el único científico, para *la solución algebráica* ó *por fórmulas*, de todas las ecuaciones.