LUCUBRACIONES ALGEBRÁICAS.

CUADERNO TERCERO.

CUESTIONES: a^4, TEOREMA.

CONSECUENCIAS:

Hallar á la vez todas las cifras de la raiz cuarta de un número dado.

REGLA GENERAL.

Hallar á la vez todas las cifras de la raiz *n* de un número dado.

OVIEDO:
IMPRENTA DE E. URIA.
1886.

Artículo primero.

Cuarta potencia.

TEOREMA.

«La suma de los términos de la 4.ª série »1, 4, 10, 20 ..... hasta (a—1) términos, es igual á la »4.ª potencia de a, mas el duplo de su cubo, menos el cua- »drado y duplo de a partido todo por 24.»

En efecto: la 4.ª série se forma, segun se ha dicho, con las sumas sucesivas de los términos de la tercera, los de esta, de la 2.ª, y los de la 2.ª de la 1.ª

Supongamos la 4.ª série 1, 4, 10, 20 ..... continuada hasta los (a—1) términos.

El término (a—1) será la suma de los (a—1) de la 3.ª, y como cada uno de esta es á su vez la suma de los de la 2.ª hasta cada uno de aquellos, el término (a—1) de la 4.ª será:

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\ldots\ldots\frac{(a-1)a}{2}$$

El término (a—2) será:

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\ldots\ldots\frac{(a-2)(a-1)}{2}$$

El término (a—3) será:

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2}+\ldots\ldots\frac{(a-3)(a-2)}{2}$$

Y así sucesivamente hasta el primero que será: $\frac{1.2.}{2}$

El primer término tiene en el numerador el 2 por factor último; el 2.° tendrá el 3; el 3.° el 4, y así hasta el último que tiene a por último factor.

Si a es par, (a—1) será impar, y así alterarán hasta el término $\frac{0.1}{2}$ que puede ponerse antes del primero; y si a es impar, será par (a—1), y seguirán así alternando hasta el primero $\frac{1.2.}{2}$

Los quebrados que componen cada término tienen todos el denominador 2, y sumando los numeradores, el del último término equivale á $\frac{a^3-a}{3}$; el del penúltimo será $\frac{(a-1)^3-(a-1)}{3}$; el anterior á este será $\frac{(a-2)^3-(a-2)}{3}$; y así sucesivamente hasta el primero que será $\frac{1^3-1}{3}$.

Y como todos estos numeradores están partidos por 2, será

$$\text{Série 4.}^{a}=\frac{(1^3-1)+(2^3-2)+(3^3-3)+\ldots\ldots(a^3-a)}{6}$$

$$=\frac{(1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a^3)-(1+2+3+\ldots\ldots a)}{6}$$

Y siendo $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots a^3=\frac{a^4+2a^3+a^2}{4}$

y $1+2+3+\ldots\ldots a=\frac{a^2+a}{2}=\frac{2a^2+2a}{4}$

Sustituyendo estos valores tendremos:

$$\text{Série 4.}^{a}\text{, hasta (a—1) términos}=\frac{a^4+2a^3-(a^2+2a)}{24}$$

Lo cual es conforme al enunciado del teorema.

De la última fórmula y las de las potencias tercera y segunda, sale:

$$a^4=24\times S^{4a}-12\times S^{3a}+2\times S^{2a}+a$$
$$a^3=\ 6\times S^{3a}+\dots\dots\dots\dots a$$
$$a^2=\ 2\times S^{2a}+\dots\dots\dots\dots a$$
$$a^1=\ \dots\dots\dots\dots a$$

Entendiéndose siempre las sumas de las séries hasta (a—1) términos.

Nota.—Dada la posibilidad de convertir todas las potencias en séries, está desde luego demostrado, que toda ecuacion numérica con una incógnita, se puede transformar en una *série* compleja compuesta de tantas séries simples elementales, como unidades tenga el mayor esponente de la ecuacion.

Articulo II.

Relacion entre las séries y las ecuaciones.

Si se continuase el procedimiento que va expuesto, de descomponer las potencias de X en séries, podríamos aplicar éstas á la resolucion de las ecuaciones con una incógnita, por medio del tanteo.

Sea como ejemplo la ecuacion de tercer grado

$$5x^3-11x^2+20x=224$$

En la que será.....$x^3=6S^{3a}+x$

$$x^2=2S^{2a}+x$$
$$x=x$$

Sustituyendo tendremos

$$30S^{3a}-22S^{2a}+14x=224$$

Pero como la suma de los términos de la tercera série hasta (x—1), es el término (x—1) de la cuarta; y la suma de los de la segunda, hasta (x—1), es el término (x—1) de la tercera; y siendo x el término x de la segunda, la ecuacion puede tener esta forma:

$$
\begin{array}{l}
14(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.....) \\
-22(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21.....) \\
30(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56.....)=224
\end{array}
$$

De modo que, multiplicando los coeficientes 14,—22 y 30, cada uno por el número que le corresponda en una misma columna vertical de las tres séries horizontales, y sumando y restando lo que corresponda segun el signo de los coeficientes, habrá de obtenerse el número 224; en cuyo caso el número superior de la columna que dé tal resultado, será un valor de x.

Así: $30\times10=300+14\times4=356-22\times6=224$.

De donde sale que $x=4$; que es el número superior de la cuarta columna vertical.

Artículo III.

Modo práctico de formar las diferencias potenciales.

En el desarrollo de la potencia 4.ª se deja ver desde luego, que en la misma se interrumpe la relacion directa entre las potencias y las séries del mismo grado, y que por lo tanto cada potencia solo podrá desarrollarse en funcion de todas las séries, desde la primera hasta la de que se trata.

Esto no obstante, como cada potencia está formada de la suma de las diferencias que llamaremos *potenciales*, las que sabemos como se forman en cada caso, podemos por medio de las mismas, como vamos á ver en un ejemplo, hallar tambien la raiz cuarta de un número, hallando á la vez todas las cifras, segun se hizo en la segunda y la tercera; y demostrándose luego que el procedimiento es general y aplicable á la raiz del grado n.

Las diferencias *potenciales* de 2.º grado son como se ha visto, los números impares 1, 3, 5 .....

Las de tercer grado son los números así mismo conocidos 1, 6.1+1, 6.3+1, 6.6+1 ..... es decir, el 6 multiplicado sucesivamente por los términos de la tercera série, añadiendo uno á cada producto.

Las de cuarto grado las formaremos por el procedimiento ya conocido, á saber: para formar la diferencia entre n^4 y $(n+1)^4$, formaremos las potencias de n, desde la primera á la tercera, y luego sumamos 1 con dichas potencias, multiplicadas la 1.ª por 4, la 2.ª por 6 y la 3.ª por 4, es decir, por los coeficientes numéricos del binomio elevado á la cuarta potencia, segun se expone á continuacion.

Artículo IV.

Hallar la raiz 4.ª de un número, hallando á la vez todas las cifras.

Sea como ejemplo el número 1042685.

Tomemos una cuarta potencia exacta, superior y tan aproximada como sea posible sin hacer operaciones:

Sea por ejemplo la 4.ª potencia de 50=6250000
De este número restamos el dado—1042685
=5207315

Y la diferencia resultante la dividiremos por la diferencia entre la 4.ª potencia de 50 y 49, la cual se forma de este modo: $1+49.4+49^2.6+49^3.4=485199$.

	520731,5	485199	
1.er resíduo	355325	10	1er cociente.

Esta division nos dice que la diferencia que sirvió de divisor está contenida diez veces en el dividendo, que es la diferencia entre el número superior tomado y el número de que se trata; pero el resíduo resultante no es el verdadero, puesto que las nueve diferencias *potenciales*, menores y siguientes al divisor, son todas menores que este, y por lo tanto las nueve diferencias entre el divisor y cada una de aquellas, *deben* juntarse al resíduo que se obtuvo, para obtener así el verdadero.

La suma de las nueve diferencias *potenciales* es la diferencia entre 49 elevado á la cuarta potencia y 40 elevado á la misma potencia.

$$49^4 = 5764801$$

$$40^4 = 2560000$$

diferencia $= 3204801 =$ suma de las nueve diferencias, la cual restada de nueve veces el primer divisor, nos dará lo que debe añadirse al primer resíduo.

1.er divisor $485199.9 = 4366791$

-3204801

$= 1161990$

Lo cual sumado con el 1er resíduo 355325

nos da el 2.º dividendo. . . . . $= 1517315$

El 2.º divisor será la diferencia potencial inferior y siguiente á las diez ya calculadas, la cual es la correspondiente á 39, y se forma como la del primer divisor, y es: $= 246559$

Segunda division.

	1517315	246559	
2.º resíduo	37961	6	2.º cociente.

Para completar este resíduo, se calculan las cinco diferencias siguientes á la del último divisor, que es; 39^4 ó sea, 40^4 menos el último divisor, igual á

2313441,

menos 34^4 $= 1336336$

diferencia $= 977105$ la cual se resta de cinco veces el último divisor ó sea 246559.5 igual á

1232795
— 977105
= 255690 lo que sumado con el último resíduo 37965 nos dá el
3.er dividendo 293651

El tercer divisor es la diferencia *potencial* correspondiente al número 33, puesto que la última calculada fué la de 34; la diferencia del 33 es : 150415.

Tercera division.

293655 | 150415
3.er resíduo. 143236 | 1 3.er cociente.

Y como este resíduo es completo por ser el cociente 1, hay que ver si se puede dividir por la diferencia siguiente que es la de 32=137345.

Cuarta division.

143236 | 137345
4.° resíduo 5891 | 1 4.° cociente.

Y como este resíduo está completo por la misma razon, hay que ver si se divide por la diferencia siguiente que es la de 31=125055.

Quinta division.

5891 | 125055
0

Siendo cero el cociente tendremos que: la raiz cuarta del número dado es el número con que se formó el último divisor, ó sea el 31; el cual es igual á la suma de los cocientes obtenidos juntando 1 por el cero del último, *restada* de la *raiz* de la potencia superior que se tomó para empezar la operacion: esto es, 50—(10+6+1+1+1)=31.

Y el resíduo de la raiz será la diferencia entre el último dividendo y el último divisor 125055—5891=119164=

Con los ejemplos que preceden, ya se puede ver que el procedimiento es igual en todos los casos y grados, y por lo tanto, en vez de la regla práctica para la de 4.° grado, daremos la regla general para determinar la raiz *n* de un número cualquiera.

Artículo V.

Raiz del grado n.

Sea el número N del cual queremos determinar la raiz del grado n.

Tómese una potencia P del grado n, lo menos mayor posible que N, sin necesidad de cálculos escritos; y sea r su raiz del mismo grado.

Hállese la diferencia P—N=D y esta será el primer dividendo.

Para formar el primer divisor, sumaremos 1 con las potencias sucesivas de (r—1) desde la primera hasta la (n—1), multiplicadas, la primera por n, la segunda por $\frac{n(n-1)}{2}$, la tercera por $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}$ y así sucesivamente hasta la potencia (n—1): la suma resultante, que es la diferencia entre r^n y $(r-1)^n$, será el primer divisor, d.

Primera division.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & c \end{array}$$

1.er resíduo R c 1.er cociente.

Para preparar la segunda division se procede del siguiente modo;

Tómese la diferencia $(r-c)$ elevada á $n=(r-c)^n$.

Tómese tambien la diferencia $(P-d)=(r-1)^n$ y de esta cantidad réstese la anterior$=(r-1)^n-(r-c)^n$. Esta cantidad representa las $(c-1)$ diferencias consecutivas y menores que d.

Ahora, la espresada cantidad, $\left((r-1)^n-(r-c)^n\right)$ se restará de la cantidad $d(c-1)$;

y la diferencia $d(c-1)-\left((r-1)^n-(r-c)^n\right)=S$, se sumará con el resíduo R, siendo la suma $(R+S)$ el segundo dividendo$=D_1$

Para formar el segundo divisor se tomará la cantidad $\left(r-(c+1)\right)$ y ejecutando con esta la misma operacion que con el $(r-1)$ al formar el primer divisor, y añadiendo 1, se tendrá el segundo divisor$=d_1$

Segunda division

C ∽ c

$$\begin{array}{l|l} D_1 & d_1 \\ \hline R_1 & C_1 \end{array}$$

2.° resíduo R_1 C_1 2.° cociente.

Para preparar la tercera division se procede del mismo modo que para la segunda, operando con los términos de esta como con los de la primera, y teniendo en cuenta que las diferencias potenciales rebajadas á D, son ya las expresadas por $(C+C_1)$

Así: $(r-c-c_1)^n$ se restará de $(r-c-1)^n$, y la diferencia, restándola de $d_1(c_1-1)$, será la cantidad S_1 que se sumará con R_1 para tener el tercer dividendo D_2

Y la cantidad $(r-c-c_1-1)$, ejecutando con ella la misma operacion que con el (r—1) al formar el 1.er divisor, y añadiendo 1, nos dará el tercer divisor igual á d_2

Tercera division.

$$\begin{array}{l|l} D_2 & d_2 \\ \hline R_2 & c_2 \end{array}$$

3.er resíduo. R_2 c_2 3.er cociente.

Las divisiones se continúan hasta llegar á un dividendo que sea igual ó menor que el divisor. Si fuese igual, indica que la raiz buscada es exacta: y si fuese menor, será entera la raiz, y el resíduo será la diferencia entre el divisor y el dividendo.

Y la raiz será el número con que se formó el último divisor, ó bien la raiz superior r, disminuida en la suma de los cocientes obtenidos, contándose como una unidad el *cero* de la última division cuando resulte.

Con lo expuesto aquí, y los ejemplos de 2.°, 3.° y 4.° grado, bastará sin duda para que se comprenda con toda claridad la *regla y sistema general* de las raices.

Obsérvese que cuanto menor sea la diferencia entre el número dado y la potencia superior que se tome, menor será el número de divisiones que habrán de ejecutarse, pudiendo darse el caso de que á las dos ó tres divisiones se obtenga una raiz aunque sea de muchas cifras.

Y obsérvese tambien que por este procedimiento se evitan en las divisiones los tanteos de comprobacion para cada cifra de la raiz.

Por último, debe notarse asi mismo, que si en vez de tomar una potencia superior al número dado, se tomase una inferior, aproximada en lo posible, el procedimiento se aplicará del mismo modo, pero tomando los números de abajo arriba, y convirtiendo en sustracciones las adiciones que se hacen á los resíduos para formar los dividendos. Este segundo método, sin embargo, ofrece en la práctica dificultades de que está exento el primero, y hacen que este sea preferible.

OTRO EJEMPLO NUMÉRICO.

Para dar fin á este trabajo determinemos la raiz *quinta* del número 72532643, que teniendo más de cinco y menos de once cifras, solo tendrá dos en la raiz.

La cifra de órden superior será 3, puesto que 3^5 es menor que dicho número, y $4^5=1024$, es mayor que 725.

Tomamos, pues, $40^5=102400000$, como potencia superperior para empezar el cálculo.

Se resta de ella el número dado y el resto será el primer dividendo.

$$\begin{array}{r} 102400000 \\ -72532643 \\ \hline =29867357 \end{array}$$

El primer divisor será

$$\begin{array}{rrr} & 39^5\times 5= & 11567205 \\ + & 39^3\times 10= & 593190 \\ + & 39^2\times 10= & 15210 \\ + & 39\times 5= & 195 \\ + & 1 \quad = & 1 \\ \hline & = & 12175801 \end{array}$$

1.ª division.....	29867357	12175801	1.er divisor
residuo directo. ...	5515755	2	1.er cociente

No hay, pues, más que una diferencia, inferior á la tomada como primer divisor, contenida en el primer dividendo, la cual es la que corresponde á 38, y se formará como la de 39, dándonos el número 10989031.

Restando del 1.er divisor nos da 1186770, cuya diferencia sumada con el resíduo directo 5515755 nos da el segundo dividendo............ 6702525

El segundo divisor será la diferencia potencial que corresponde á 37, la que formaremos del mismo modo que las anteriores y será el número 9891211.

$$2.^{a} \text{ division: } 6702525 \,\underline{|\, 9891211}$$
$$0$$

Este cociente *cero* nos dice que la operacion se terminó, y que por lo tanto la raiz buscada será 40—(2+1)=37, que es á la vez el número con que se formó el último divisor.

El resíduo de la raiz será la diferencia entre el último divisor y el último dividendo=3188686.

OTRO EJEMPLO.

Una raiz 5.ª de tres cifras, de un número de quince.

Para que ninguma duda quede acerca de las ventajas del nuevo procedimiento, en su aplicacion práctica, vamos á determinar la raiz 5.ª de un número de quince cifras, la cual tendrá por lo tanto tres.

Sea el número 153392467832594

Separando las cinco cifras de la izquierda, fácilmente se verá por el método ordinario, que la raiz quinta del número que estas forman es 6.

Añadiendo á 6 una unidad se tiene 7, y juntando á este por la derecha dos ceros, se tiene 700, cuya quinta potencia es 168070000000000.

De esta potencia, que es la inmediata superior más aproximada posible, se resta el número dado, y la diferencia será el primer dividendo que buscamos.

Así: 16807000000000
—153392467832594

= 14677532167406 1.^{er} dividendo.

El primer divisor será la diferencia potencial formada con el número (700—1)=699, la cual, como es sabido, será:

$$
\begin{array}{rl}
699^4\times 5 & =1193654686005 \\
+699^3\times 10 & =.....3415320990 \\
+699^2\times 10 & =.........4886010 \\
+699\times 5 & =............3495 \\
+\ \ 1 & =.................1 \\
\hline
 & = 1197074896501 \text{ 1.}^{er}\text{ divisor.}
\end{array}
$$

1.^{a} division: 14677532167406 | 1197074896501
2706783202396 12 1.^{er} cociente.
residuo directo....312633409394

Este resíduo hay que completarle con la suma de las once diferencias, entre el primer divisor y las once diferencias potenciales consecutivas é inferiores al mismo.

La suma de las once diferencias potenciales es la diferencia entre 699^5 y $(699-11)^5=688^5=12723399976331$.

Téngase presente que 699^5 es la diferencia entre la potencia superior tomada para empezar el cálculo, y el primer divisor, la cual es, $166872925130499=699^5$
y restando de este número, $154149525127168=688^5$

se obtiene el espresado...... 12723399976331, el cual restado de 11 veces el 1.^{er} divisor,
ó sea............................ 13167823861511

nos da la diferencia.............444423885180, que es la suma de las once diferencias con que completaremos el resíduo de la 1.^{a} division, juntándola con el resíduo directo, así:

$$
\begin{array}{r}
312633409394 \\
+\ 444423885180 \\
\hline
=757057294574
\end{array}
$$
que es el 2.^{o} dividendo.

El segundo divisor será la diferencia potencial formada con el número 687, ó sea el 700—(12+1); cuya diferencia se obtendrá del mismo modo que la del 699 para el primer divisor.

Así:

$$
\begin{array}{rl}
 & 687^4 \times 5 = 1113773684805 \\
+ & 687^3 \times 10 = \ldots 3242427030 \\
+ & 687^2 \times 10 = \ldots\ldots\ldots 4719690 \\
+ & 687 \times 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3435 \\
+ & 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\
 & 1117020834961 \text{ 2.° divisor.}
\end{array}
$$

2.ª division: 757057294574 | 1117020834961
0 2.° cociente.

Y como el cociente es *cero* por ser el divisor mayor que el dividendo, hemos terminado la operacion *con una sola division efectiva*.

La raiz quinta del número dado será, pues, la raiz superior tomada, r=700, menos la suma de los cocientes obtenidos, agregando una unidad por el último que es cero, ó sea: $r-(c+c_1+\ldots 1)=700-(12+1)=687$ que es el número con que se formó el último divisor.

FIN DE LA PRIMERA PARTE.