LUCUBRACIONES ALGEBRÁICAS.

CUADERNO SEGUNDO.

CUESTIONES: a^2, TEOREMA.

CONSECUENCIAS:

Ultima consecuencia: „hallar á la vez, ó todas juntas, las cifras de la raiz cúbica de un número dado.“

OVIEDO:
IMPRENTA DE E. URIA.
1886.

ARTÍCULO PRIMERO.

Cubo.

TEOREMA.—*El cubo de un número entero es igual al mismo número, más seis veces la suma de los términos de la tercera serie, hasta tantos como unidades menos una tenga el número.*

Es decir que será:

$$a^3=a+6\left(1+3+6+10+\ \ldots\ldots\ (a-1)\text{ términos}\right)$$

En efecto:
$$1^3=1+6\ (0)$$
$$2^3=2+6\ (1)$$
$$3^3=3+6\ (1+3)$$
$$4^3=4+6\ (1+3+6)$$
....

Supongamos esto cierto hasta el número (a—1) y vamos á demostrar que tambien lo será para el número $(a-1)+1=a$

En efecto:

$$a^3=\left((a-1)+1\right)^3=(a-1)^3+3(a-1)^2+3(a-1)+1$$
$$=(a-1)+6\left(1+3+6+\ \ldots\ (a-2)\text{ térms.}\right)$$
$$+3(a-1)^2+3(a-1)+1$$

Sumando el primero y último términos, ejecutando las operaciones del tercero y cuarto y reduciendo:

Será:

$$a^3=a+6\left(1+3+6+\ldots\ldots(a-2)\text{ términos}\right)+3a^2-3a$$

Pero segun el teorema primero se tiene que:

$3a^2=3a+6\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$, y sustituyendo será:

$$a^3=a+6\left(1+3+6+\ldots\ldots(a-2)\text{ términos}\right)$$

$$+6\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$$

Separando el factor comun 6 en los dos últimos términos dará:

$$a^3=a+6\left(1+3+6+\ldots(a-2)\text{ térms.}+\left(1+2+3+\ldots(a-1)\right)\right)$$

Y como la suma $\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$ de los términos de la segunda série, hasta (a—1) términos, es el término (a—1) de la tercera, tendremos que:

$$a^3=a+6\left(1+3+6+\ldots\ldots(a-1)\text{ términos}\right)$$

que es lo que se quería demostrar.

Artículo II.

Consecuencias.

1.ª Puesto que $a^3=a+6\left(1+3+6+\ldots\ldots(a-1)\text{ térms.}\right)$

Será $\dfrac{a^3-a}{6}=1+3+6+\ldots\ldots(a-1)$ térms.

Luego: *La suma de los términos de la 3.ª série hasta* (a—1) *términos, es igual al cubo de a, menos a, partido todo por* 6.

2.ª Multiplicando por 2 la igualdad anterior nos dará:

$$\frac{a^3-a}{3}=1.2+2.3+2.6+\ \ldots\ 2\left(\text{por el término } (a-1)\right)$$

Y como el término (a—1) de la tercera, es la suma de los (a—1) términos de la segunda, que es $\frac{a(a-1)}{2}$ será:

$$\frac{a^3-a}{3}=1.2+2.3+2.6+2.10+\ \ldots\ (a-1)a, \text{ ó bien:}$$

$$\frac{a^3-a}{3}=1.2+2\ 3+3.4+4.5+5.6+\ \ldots\ldots\ (a-2)(a-1)+(a-1)a$$

De donde resulta que, *la suma de productos binarios de los números* 1, 2, 3, ... *hasta a, multiplicándose cada uno ya por el que le precede, ya por el que le sigue, es igual al cubo de a, menos* a, *partido por* 3.

3.ª Siendo $1.2=1^2+1$

$2.3=2^2+2$

$3.4=3^2+3$ y así sucesivamente, será la igualdad idéntica á esta otra:

$$\frac{a^3-a}{3}=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\ \ldots\ldots\left((a-1)^2+(a-1)\right)$$

$$=1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ldots\ (a-1)^2+\left(1+2+3+\ \ldots\ (a-1)\right)$$

$$=1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ldots\ (a-1)^2+\frac{a^2-a}{2}$$

$$\text{O bien: } \frac{a^3-a}{3}-\frac{a^2-a}{2}=1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ldots\ (a-1)^2$$

$$\text{O bien: } \frac{2a^3-3a^2+a}{6}=1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ldots\ (a-1)^2$$

Luego *la suma de cuadrados de los números* 1, 2, 3..... *hasta* (a—1), *es igual á dos veces el cubo de a, menos tres veces su cuadrado, más a, partido todo por* 6.

NOTA.—La anterior relacion es nueva, al menos en la manera de deducirse y en la forma de su espresion.

4.ª Si en la igualdad $\frac{a^3-a}{3}=1.2+2.3+3.4+....(a-1)a$, suponemos que a es impar, tendremos que:

$$1.2+2.3=2.2^2,$$

$$3.4+4.5=2.4^2.....$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(a-2)(a-1)+(a-1)a=2(a-1)^2$$

Luego $\frac{a^3-a}{3}=2\left(2^2+4^2+6^2+.......(a-1)^2\right)$

Partiendo por 2 y teniendo presente que (a—1) es par:

Será: $\frac{a^3-a}{6}=2^2+4^2+6^2+.\ ...(a-1)^2$

Lo cual nos dice que: *La suma de cuadrados de los números pares* 2, 4, 6..... *hasta el par (a—1) es igual al cubo de a menos a partido por* 6.

5.ª Si en la misma igualdad

$\frac{a^3-a}{3}=1.2+2.3+3.4+......(a-1)a$ suponemos que a es par, tendremos:

$$1.2=2.1^2$$

$$2.3+3.4=2.3^2$$

$$4.5+5.6=2.5^2$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Y $(a-2)(a-1)+(a-1)a=2(a-1)^2$

Y como (a—1) es impar, resulta:

$$\frac{a^3-a}{6}=1^2+3^2+5^2+..\ ...(a-1)^2$$

Luego: *La suma de cuadrados de los números impares* 1, 3, 5, ... *hasta* (a—1) *impar, es igual al cubo de* a, *menos* a, *partido por* 6.

6.ª De la igualdad $\frac{a^3-a}{6}=1+3+6+\ .\ ...\ (a-1)$ térms.

se deduce que: *El cubo de un número entero menos el mismo número, es un múltiplo de 6: y que hecha la division, el cociente será la suma de los términos de la 3.ª série hasta* (a—1) *términos.*

7.ª Segun lo expuesto: *El cubo de un número a se puede formar sumando* (a—1) *términos de la tercera série, ó tomando el término* (a—1) *de la cuarta, multiplicado por 6, y añadiendo el mismo número*

8.ª De la igualdad general

$$a^3=a+6\left(1+3+6+\ ..... (a-1)\text{ térms.}\right):$$

Sale: $1^3=1+6.0$

$2^3=2+6.1$

$3^3=3+6.1+6.3$

$4^3=4+6.1+6.3+6.6$

Y así sucesivamente.

De donde se deduce que: *La diferencia entre dos cubos consecutivos es un múltiplo de 6, mas 1; y que la diferencia entre dos cubos enteros cualesquiera es tambien un múltiplo de 6 mas la diferencia entre sus raíces.*

9.ª La igualdad general asi escrita:

$$a^3=a+6\left(0+1+3+6+\ .....(a-1)\text{ térms.}\right)$$

con el cero como primer término de la série, nos dice que, *el cubo de un número entero es igual al mismo número, mas seis veces la suma de tantos términos de la tercera série, como unidades tiene el número.*

10.ª Quitando el paréntesis en la igualdad anterior será:

$$a^3=a+0+6+18+36+60+\ .....\ 6(\text{por el término a})$$

Pero como el a que sigue al signo igual, vale tantas unidades como términos le siguen, se tendrá:

$$a^3=1+7+19+37+61+\ .....\ \left(6(\text{por el término a})+1\right)$$

De donde resulta, que los números 1, 7, 19,... etcétera, *son las diferencias sucesivas entre los cubos enteros consecutivos empezando desde el* 0; *y que si dichos números se van sumando sucesivamente, las sumas resultantes serán los cubos perfectos desde* 1 *al infinito.*

Obsérvese empero que los números 1, 7, 19, ... etcétera, son los términos de la 3.ª série, empezando con el 0, multiplicado cada uno por 6 y añadiendo una unidad.

Y si ahora se tiene presente que cada término de la 3.ª série, es la suma de términos de la 2.ª hasta tantos como indique el de que se trata, el término a de la 3.ª será: $\frac{a(a+1)}{2}$; pero este valor multiplicado por 6, y sumando 1 con el producto, nos dá la diferencia de los cubos de a y de (a+1)

Es decir que $\left(1+\frac{a(a+1)}{2}\times 6\right)=3a(a+1)+1$, *nos dá la espresion general para formar las diferencias entre dos cubos enteros consecutivos, cualesquiera que sean.*

Así: $4\times5\times3+1=61$, es la diferencia entre los dos cubos de 4 y 5.

$7\times8\times3+1=169$, es la diferencia entre los cubos de 7 y 8; y así sucesivamente.

Artículo III.

Como consecuencia de lo expuesto: *hallar á la vez todas las cifras de la raiz cúbica de un número dado.*

Pongamos como ejemplo un número de fácil ejecucion, pero advirtiendo que el procedimiento es en todo igual para otro número, cualquiera que sea el de cifras de su raiz.

Sea $\sqrt[3]{1221}$

Tomaremos el cubo mas inmediato superior, conocido sin necesidad de cálculos, y es $8000=20^3$

$$\begin{array}{r} 8000 \\ -1221 \\ \hline =6779 \end{array}$$

En este *resto*, es evidente que están contenidas todas las diferencias entre los cubos consecutivos desde el mayor contenido en 1221 hasta el 8000, con deduccion del *resíduo* de la raiz que se busca.

La diferencia mayor contenida es $20\times19\times3+1=1141$.

Dividiendo pues el *resto* 6779 por esta diferencia nos dá:

$$\begin{array}{r|l} 6779 & 1141 \\ \cline{2-2} 1^{er}\ \text{resíduo.}\quad 1074 & 5 \quad 1^{er}\ \text{cociente.} \end{array}$$

Es decir que el resto contiene la diferencia mayor 5 veces, y quedan 1074 unidades de resíduo.

Mas ahora debemos fijar la atencion en que, las cuatro diferencias menores que 1141 y consecutivas á esta, cada una nos dará como sobrante lo que le falte para igualar al 1141, y si sumamos con el 1074, los cuatro sobrantes indicados, tendremos el verdadero resíduo de la primera division.

Las cuatro diferencias espresadas son las comprendidas entre los cubos de (19 y 18), (18 y 17), (17 y 16) y (16 y 15) ó sea, entre 19^3 y 15^3.

Pero $19^3=20^3-1141=8000-1141=6859$

$$\begin{array}{r} -15^3=3375 \\ \hline =3484 \end{array}$$ que es la suma de las cuatro diferencias.

Y como cada una se ha de restar de 1141,

será: $1141\times4-3484=4564-3484=1080$

lo que sumando con el primer resíduo 1074

nos da el verdadero resíduo . . . . 2154 que será el segundo dividendo.

Para continuar la operacion habrá que averiguar las diferencias que contiene el 2154, inferiores á la última calculada que fué la de (16 á 15): de donde se ve que habrá de tomarse como divisor la mayor de ellas ó sea la de (15 á 14) que es: $15 \times 14 \times 3 + 1 = 631$

Dividamos pues el 2154 por 631 y será:

$$\begin{array}{r|l} 2154 & 631 \\ \hline 261 & 3 \end{array}$$

2.º resíduo 261 3 2.º cociente.

Este segundo resíduo hay que completarlo como antes, añadiéndole los sobrantes entre las dos diferencias siguientes al 631 y esta, puesto que son tres las deducidas.

Dichas dos diferencias serán pues:

$$14^3 = 15^3 - 631 = 2755 - 12^3 = 2744 - 1728 = 1016.$$

Y restando de: $631 \times 2 = 1262$
—1016
= 246 que sumando con el segundo resíduo............. 261 da
507, tercer dividendo, el cual se dividirá por la diferencia siguiente á la calculada que es: $12 \times 11 \times 3 + 1 = 397$.

$$\begin{array}{r|l} 507 & 397 \\ \hline 110 & 1 \end{array}$$

3.º resíduo 110 1 3.º cociente.

Y como en esta operacion solo se dedujo una diferencia, hay que ver si el resíduo 110 puede dividirse por la diferencia siguiente al 397 que es: $11 \times 10 \times 3 + 1 = 331$.

$$\begin{array}{r|l} 110 & 331 \\ \hline & 0 \end{array}$$

No se puede dividir, y por lo tanto la operacion llegó á su fin.

Y tenemos por consiguiente: que la diferencia 6779, entre el número dado y el cubo superior que se tomó, contiene (5+3+1) diferencias completas, de las superiores que forman el cubo de 20, y además 110 unidades de la siguiente que es el 331; y por lo tanto, como á cada diferencia corresponde una unidad de menos en la raiz 20, la raiz cúbica del número dado, será: $20-(5\times3\times1)-1$, que corresponde á la diferencia 331 de la que contiene una parte.

Así, pues: $\sqrt[3]{1221}=20-(5+3+1+1)=10$
y el resíduo será la diferencia entre 110 y 331=221.

Adviértase que la raiz buscada habrá de ser el número menor que se tome para formar el último divisor, (10) en el presente caso; y que si el último divisor resultase igual al último dividendo, la raiz hallada sería exacta, y cubo perfecto el número dado.

Adviértase así mismo que los cubos intermedios que se necesitan en el cálculo, se deducen de los precedentes ya conocidos, con solo restar las diferencias que tambien se conocen, lo cual facilita sobremanera el procedimiento, y hace que sea preferible al antiguo, por su sencillez y por no necesitarse la comprobacion de cada cifra de la raiz.

Con vista, pues, de este ejemplo y de las propiedades numéricas en que se funda, se puede establecer la regla práctica de este modo:

Para hallar la raiz cúbica de un número dado n, se toma el cubo superior más inmediato posible q, siendo su raiz conocida r, y la diferencia *cúbica* superior que le formó, $3r(r-1)+1.=d$

Se resta n de q, y el *resto* se divide por d.

C es c

$$\begin{array}{l|l} q-n & d \\ \hline R & C \end{array}$$

1er resíduo R C 1er cociente.

Para efectuar la segunda division se resta d de q, y luego, de (q—d) se resta el cubo de (r—c); y el resultado se resta de d(c—1).

Es decir que se hallará: $d(c-1)-\left((q-d)-(r-c)^3\right)$; y el resultado de esta operacion, sumado con el primer resíduo R será el segundo dividendo D_1

El segundo divisor será $3(r-c)(r-c-1)+1$ que es la diferencia *cúbica* inferior é inmediata, á las C diferencias ya deducidas.

Y haciendo el segundo divisor igual á d_1 será:

Ces c

$$\begin{array}{lcl} & D_1 \,|\, d_1 & \\ 2.^{\text{o}} \text{ resíduo} & R_1 \;\; C_1 & 2.^{\text{o}} \text{ cociente.}\end{array}$$

Con los términos de esta segunda division se preparan de igual modo el dividendo y divisor de la tercera, y así hasta que el último dividendo buscado, sea igual ó menor que el último divisor.

Llegado este caso, la raiz buscada será la suma de los cocientes, añadiendo una unidad si el último fuese *cero*, y restando la suma, de la raiz r: ó bien será el número menor de los dos con que se forme el último divisor.

El resíduo de la raiz será siempre la diferencia entre el último dividendo y el último divisor.

OTRO EJEMPLO.

Para que no quede la menor duda sobre el modo de aplicar la regla práctica, y acerca de la mayor sencillez del nuevo procedimiento hallaremos la raiz de tres cifras del número 21764325.

La cifra superior de su raiz es 2, y juntándole 1=3.

3, con dos ceros, *por las cifras que faltan en la raiz*, hace 300: y 300 elevado al cubo=27000000.

De este cubo se resta el número dado 21764325.

=5235675.

Cuya diferencia es el primer dividendo.

El primer divisor será: $300\times 299\times 3+1=269101$.

Primera division.

$$\begin{array}{r|l} 523567{,}5 & 269101 \\ \cline{2-2} 2544665 & 19 \quad 1^{er} \text{ cociente.} \end{array}$$

Resíduo directo. 122756

Para preparar la segunda division diré:

primer divisor, $269101\times 18=4843818$ (k)

primera raiz: $300-19=281$

y	$281^3=22188041$,	que sumado con
el primer divisor	269101	
nos da	22457142	lo cual se resta
del cubo superior	27000000	
y nos da	4542858	
que se resta del	4843818	(k)
=	300960	cuya diferencia
sumada con el resíduo	122756	
nos da el segundo dividendo	423716	

El segundo divisor será:

$(300-19)=281\times 280\times 3+1=236041$.

Segunda division

$$\begin{array}{r|l} 423716 & 236041 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

resíduo completo... 187675 1 2.° cociente.

La division siguiente será de este resíduo, que es completo, por la diferencia potencial siguiente é inferior que será: $280\times 279\times 3+1=234361$.

Tercera division.

$$\begin{array}{r|l} 187675 & 234361 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Luego la raiz cúbica buscada será el número menor con que se formó el último divisor ó sea

el 279, ó bien $300-(19+1+1)=279$.

Y el resíduo de la raiz será

$$\begin{array}{lr} \text{el último divisor} & 234361 \\ \text{menos el último dividendo} & 187675 \\ \hline & =46686 \end{array}$$

Como puede comprobarse ejecutando la operacion directamente.

FIN DE LA RAIZ CÚBICA.