



Università di Pisa

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria
Aerospaziale

Analisi FEM della micromeccanica
elastoplastica di materiali compositi
unidirezionali con matrice epossidica

Relatori

Prof. Daniele Fanteria

Prof. Luigi Lazzeri

Dott. Enrico Panettieri

Candidato

Federico Danzi

Anno accademico 2013/2014

*Ai miei nonni,
nonno Dino e nonna Imer*

Indice

Capitolo 1

Introduzione.....	1
1.1 Concetti base.....	1
1.2 Classificazione dei materiali compositi	3
1.3 Impiego dei materiali compositi in campo aeronautico.....	4
1.4 Approccio multiscala	5

Capitolo 2

Micromeccanica dei materiali compositi.....	7
2.1 Introduzione alla micromeccanica.....	7
2.2 Fondamenti teorici della micromeccanica	8
2.2.1 Definizioni fondamentali	8
2.2.2 Costituenti isotropi.....	9
2.2.3 Modello elementare per il calcolo della matrice di rigidezza	9
2.2.3.1 Calcolo delle costanti elastiche.....	10
2.2.3.2 Risultati del modello elementare	17
2.3 Periodic Microstructure Model (PMM).....	18

Capitolo 3

Modello agli elementi finiti per il calcolo della matrice di rigidezza	23
3.1 Introduzione.....	23
3.2 Realizzazione dell'RVE	23
3.2.1 Definizione della geometria.....	24
3.2.2 Scelta dei materiali	26
3.2.3 Creazione della griglia di calcolo.....	26
3.3 Applicazione delle condizioni al contorno e analisi del modello	27

3.3.1 Condizioni al bordo periodiche e omogeneizzazione numerica	27
3.3.2 Calcolo della matrice di rigidezza dell'RVE.....	30
3.4 Calcolo delle costanti elastiche.....	44
3.5 Verifica del modello	45

Capitolo 4

Teoria della plasticità	46
4.1 Introduzione.....	46
4.2 Analisi delle curve sforzo-deformazione.....	46
4.3 La plasticità	50
4.4 Equazioni fondamentali della teoria della plasticità perfetta monodimensionale	52
4.4.1 Concetti fondamentali.....	52
4.4.2 Irreversibilità della risposta plastica	53
4.4.3 Condizioni di carico/scarico.....	56
4.4.4 Flusso plastico	57
4.5 Fenomeno dell'incrudimento	59
4.6 Equazioni fondamentali della teoria della plasticità con incrudimento isotropo monodimensionale	61
4.7 Teoria della plasticità tridimensionale.....	65

Capitolo 5

Superfici di snervamento e leggi di incrudimento per matrici epossidiche ...	68
5.1 Introduzione.....	68
5.2 Superfici di snervamento.....	68
5.2.1 Superficie di Tresca	69
5.2.2 Superficie di Von Mises	70
5.2.3 Superficie di Mohr – Coulomb.....	72
5.2.4 Superficie di Drucker – Prager	73

5.2.5 Superficie di Tschoegl.....	74
5.3 Scelta della superficie di snervamento per il modello numerico	75
5.4 Leggi di incrudimento	76
5.4.1 Legge di Ramberg – Osgood	78
5.4.2 Legge esponenziale di Voce.....	79
5.5 Scelta della legge di incrudimento per il modello numerico	80

Capitolo 6

Implementazione numerica della teoria della plasticità	81
6.1 Introduzione.....	81
6.2 Modello numerico per l'incrudimento isotropo non lineare.....	81
6.2.1 Ciclo principale	83
6.2.2 Algoritmo di ritorno radiale.....	85
6.2.3 Ciclo correttivo elasto-plastico	87
6.3 Realizzazione di un modello tridimensionale di plasticità in ambiente MATLAB	88
6.3.1 Trazione Monoassiale.....	89
6.3.2 Taglio puro	91
6.3.3 Trazione monoassiale e taglio puro combinati	93
6.4 Verifica del modello numerico con i risultati sperimentali	95

Capitolo 7

Implementazione FEM del modello di elastoplasticità	96
7.1 Introduzione.....	96
7.2 Creazione della UMAT elasto-plastica	96
7.3 Verifica della UMAT.....	98
7.3.1 Verifica della UMAT a trazione monoassiale	98
7.3.2 Verifica della UMAT a taglio puro.....	103
7.4 Conclusioni	107

Capitolo 8

Modello elasto-plastico di materiale composito unidirezionale in resina epossidica	108
8.1 Introduzione.....	108
8.2 Scelta del modello di riferimento	108
8.3 Realizzazione del modello elasto-plastico per il materiale composito	111
8.4 Risultati del modello elasto-plastico per il materiale composito	113
8.5 Confronto dei risultati del modello elasto-plastico per il materiale composito	116
8.6 Conclusioni	118
Conclusioni e sviluppi futuri	120
Bibliografia	122

Indice delle figure

Fig. 1.1: Esempio di materiale composito naturale.....	1
Fig. 1.2: Impiego dei materiali compositi nel Boeing-787	2
Fig. 1.3: Microstruttura di un generico materiale composito	4
Fig. 1.4: Idea di approccio multiscala.....	5
Fig. 2.1: Idea di approccio micromeccanico.....	7
Fig. 2.2: RVE soggetto a deformazione uniforme longitudinale	11
Fig. 2.3: RVE soggetto a deformazione trasversale uniforme	13
Fig. 2.4: RVE soggetto a deformazione a taglio nel piano	15
Fig. 2.5: RVE soggetto a deformazione a taglio trasversale	16
Fig. 2.6: Andamenti delle costanti elastiche in funzione della frazione volumetrica di fibra	17
Fig. 3.1: Modello di RVE utilizzato	24
Fig. 3.2: Modello completo di RVE.....	25
Fig. 3.3: Sottomodello di RVE	25
Fig. 3.4: Mesh dell'RVE completo	26
Fig. 3.5: Mesh del sottomodello di RVE	27
Fig. 3.6: Macro RVE a pattern esagonale	28
Fig. 3.7: Sezione del macro RVE a pattern esagonale	28
Fig. 3.8: Modello di riferimento per deformazioni estensionali.....	31
Fig. 3.9: Tensione in direzione 1 per deformazione estensionale unitaria in direzione 1	32
Fig. 3.10: Tensione in direzione 2 per deformazione estensionale unitaria in direzione 1	33
Fig. 3.11: Tensione in direzione 2 per deformazione estensionale unitaria in direzione 2	34
Fig. 3.12: Tensione in direzione 3 per deformazione estensionale unitaria in direzione 2	35
Fig. 3.13: Tensione in direzione 3 per deformazione estensionale unitaria in direzione 3	36
Fig. 3.14: Tensione di taglio in direzione 23 per scorrimento a taglio unitario nel piano 23	40
Fig. 3.15: Scorrimento a taglio nel piano 22	42

Fig. 3.16: Tensione di taglio in direzione 12 per scorrimento a taglio unitario nel piano 12	43
Fig. 4.1: Curve sforzo-deformazione per un materiale composito in resina epossidica:	47
a) Test a trazione longitudinale b) Test a trazione trasversale c) Test a taglio puro	47
Fig. 4.2: Curva sforzo-deformazione del test a trazione longitudinale per fibra di vetro.....	48
Fig. 4.3: Curva sforzo-deformazione per prova di trazione monoassiale di una resina epossidica	48
Fig. 4.4: Esempio generico di risposta visco-elastica.....	49
Fig. 4.5: Esempio generico di risposta elasto-plastica.....	49
Fig. 4.6: Curva sforzo-deformazione per un ciclo di carico e scarico.....	51
Fig. 4.7: Andamento pseudo temporale delle principali grandezze elasto-plastiche.....	51
Fig. 4.8: Generica risposta elasto-plastica	53
Fig. 4.9: Esempio di curva sforzo-deformazione in plasticità perfetta	58
Fig. 4.10: Curva sforzo-deformazione completa per una resina epossidica ..	59
Fig. 4.11: Incrudimento isotropo nello spazio delle tensioni principali	60
Fig. 4.12: Incrudimento cinematico nello spazio delle tensioni principali	60
Fig. 4.13: Esempio di curva sforzo-deformazione in presenza di incrudimento	61
Fig. 5.1: Superficie di snervamento di Tresca nello spazio delle tensioni principali	70
Fig. 5.2: Confronto tra il criterio di Von Mises e quello di Tresca.....	70
Fig. 5.3: Superficie di snervamento di Von Mises nello spazio delle tensioni principali	71
Fig. 5.4: Superficie di snervamento di Mohr-Coulomb nello spazio delle tensioni principali.....	72
Fig. 5.5: Superficie di snervamento di Drucker - Prager nello spazio delle tensioni principali.....	74
Fig. 5.6: Superficie di snervamento di Tschoegl nello spazio delle tensioni principali	75
Fig. 5.7: Curve sforzo-deformazione sperimentali al variare dello spessore per resina epossidica soggetta a diverse condizioni di carico: a) Compressione b) Taglio c) Trazione	77

Fig. 5.8: Tipica curva sforzo – deformazione con legge di incrudimento di Ramberg - Osgood.....	79
Fig. 5.9: Tipica curva sforzo – deformazione con legge di incrudimento di Voce	80
Fig. 6.1: Diagramma di flusso del modello numerico elastoplastico	82
Fig. 6.2: Algoritmo di ritorno radiale	86
Fig. 6.3: Deformazione a trazione monoassiale	89
Fig. 6.4: Componenti del tensore degli sforzi nel caso di trazione monoassiale	90
Fig. 6.5: Confronto tra la tensione di snervamento e la tensione di Von Mises nel caso della trazione monoassiale	91
Fig. 6.6: Deformazione di taglio puro	91
Fig. 6.7: Componenti del tensore degli sforzi nel caso di taglio puro.....	92
Fig. 6.8: Confronto tra la tensione di snervamento e la tensione di Von Mises nel caso di taglio puro	92
Fig. 6.9: Componenti del tensore degli sforzi nel caso di trazione monoassiale combinata con il taglio puro.....	94
Fig. 6.10: Confronto tra la tensione di snervamento e la tensione di Von Mises nel caso di trazione monoassiale e taglio puro combinati	95
Fig. 6.11: Confronto delle curve sforzo-deformazione numeriche con i valori sperimentali	95
Fig. 7.1: Geometria e definizione dei materiali del modello FEM di trazione monoassiale	99
Fig. 7.2: Condizione di vincoli del modello FEM di trazione monoassiale	99
Fig. 7.3: Deformata del modello FEM di trazione monoassiale.....	100
Fig. 7.4: Particolare amplificato della strizione del modello FEM di trazione monoassiale	100
Fig. 7.5: Andamento della tensione di Von-Mises nel modello FEM di trazione monoassiale	101
Fig. 7.6: Andamento della tensione assiale nel modello FEM di trazione monoassiale	101
Fig. 7.7: Evoluzione della superficie di snervamento del modello FEM di trazione monoassiale	102
Fig. 7.8: Confronto delle componenti del tensore degli sforzi nel modello FEM di trazione monoassiale con output MATLAB	103
Fig. 7.9: Condizione di vincolo del modello FEM di taglio puro.....	104

Fig 7.10: Deformata del modello FEM di taglio puro	104
Fig. 7.11: Andamento della tensione di Von-Mises nel modello FEM di taglio puro	105
Fig. 7.12: Andamento della tensione di taglio nel modello FEM di taglio puro	105
Fig 7.13: Evoluzione della superficie di snervamento del modello FEM di taglio puro.....	106
Fig. 7.14: Confronto delle componenti del tensore degli sforzi nel modello FEM di taglio puro con output MATLAB	106
Fig. 8.1: Modelli di letteratura.....	109
Fig. 8.2: Deformazione a taglio trasverso imposta.....	110
Fig. 8.3: Curve sforzo-deformazione per i modelli a taglio trasverso	110
Fig. 8.4: Confronto tra il modello di letteratura di riferimento (a sinistra) e il modello realizzato (a destra).....	111
Fig. 8.5: Zoom della griglia di calcolo in un meato tra due fibre	112
Fig. 8.6: Deformata del composito a taglio trasverso	113
Fig. 8.7: Confronto tra l'andamento delle tensioni di Von Mises in campo elastico (a sinistra) e plastico (a destra).....	114
Fig. 8.8: Confronto tra l'andamento delle tensioni di taglio trasversali τ_{23} in campo elastico (a sinistra) e plastico (a destra).....	114
Fig. 8.9: Evoluzione temporale della superficie di snervamento durante la plasticizzazione	115
Fig. 8.10: Confronto tra le curve sforzo-deformazione medie del modello creato e di letteratura	115
Fig. 8.11: Confronto tra le curve sforzo-deformazione della matrice nel modello creato e in quello di letteratura.....	118

Indice delle tabelle

Tab. 3.1: Proprietà elastiche dei costituenti	26
Tab. 3.2: Confronto PMM-Abaqus sulle costanti elastiche	45
Tab. 6.1: Proprietà della resina epossidica utilizzata nel programma	89
Tab. 8.1: Confronto del numero di elementi tra i due modelli.....	112
Tab. 8.2: Proprietà dei materiali impiegati	112

Sommario

Lo scopo del presente lavoro è quello di studiare il comportamento micromeccanico dei materiali compositi unidirezionali in resina epossidica mediante un'analisi agli elementi finiti con il software commerciale ABAQUS. L'obiettivo principale è quello di indagare sull'interazione tra fibra e matrice in un materiale composito, e sull'influenza della loro risposta a sollecitazioni esterne sulle proprietà meccaniche dello stesso. Nello specifico, è stato analizzato quanto accade a livello microscopico in un materiale composito, focalizzando l'attenzione sulla ripartizione del carico, sul calcolo della matrice di rigidezza omogeneizzata e sul comportamento elasto-plastico della cella elementare del materiale stesso.

In primis è stato realizzato un modello agli elementi finiti per l'estrapolazione della matrice di rigidezza del composito, con l'ipotesi che fibra e matrice fossero materiali omogenei, isotropi ed elastici.

Una volta validato tale modello con le più avanzate teorie di calcolo [6], si è passati all'analisi della risposta del composito in esame in termini di curve sforzo-deformazione. Il comportamento non lineare dell'intero composito, specialmente nel caso di stati di sollecitazione in cui la matrice sopporta la maggior parte del carico, ha richiesto l'ottimizzazione della risposta della matrice stessa mediante l'attribuzione di un comportamento elasto-plastico, poi implementato nel modello agli elementi finiti creato.

Il nuovo modello elastoplastico della matrice è stato dunque calibrato al fine di riprodurre le curve sperimentali sforzo deformazione della matrice e, una volta verificato, è stato introdotto in un modello completo di materiale composito. Da quest'ultimo sono state estrapolate le curve sforzo-deformazione del composito, da confrontare con dati di letteratura [9].

CAPITOLO 1

Introduzione

1.1 Concetti base

Si definisce *materiale composito* un materiale ottenuto dalla combinazione di due o più materiali distinti che si mantengono tali nel nuovo composto. Il materiale siffatto presenta solitamente proprietà meccaniche, chimico-fisiche e/o di fabbricazione migliori di quelle dei suoi costituenti considerati separatamente. Come tipico esempio di composito si può considerare il calcestruzzo, derivato dall'unione di rocce e cemento, che risulta essere più resistente delle rocce nonché più facilmente lavorabile del cemento. Tra i vari tipi di materiale composito si annoverano anche quelli ottenuti dall'unione di fibre o particelle altoresistenziali tenute insieme da un allegante. In quest'ultima grande categoria rientrano alcuni materiali compositi reperibili in natura (Fig. 1.1) quali il legno, composto da fibre di cellulosa immerse in una matrice di lignina, e le ossa, derivate dall'unione di osteoni immersi in un matrice ossea.



Fig. 1.1: Esempio di materiale composito naturale

Tra i primi materiali compositi di tale tipologia fabbricati dall'uomo si ricorda invece la vetroresina, ottenuta dall'unione di una resina di poliestere rinforzata con fibre di vetro e largamente utilizzata per la produzione nautica da diporto.

Le elevate prestazioni dei materiali compositi hanno fatto sì che questi trovassero impiego nelle strutture più avanzate e, in modo particolare, in campo aeronautico (Fig. 1.2), soprattutto per le loro elevate proprietà meccaniche e il loro basso peso. In tale ambito, con il termine *composito* si fa riferimento ad un materiale ottenuto dall'unione di fibre altoresistenziali di origine organica (es.: fibre di carbonio) o inorganica (es.: Kevlar) immerse in una resina termoplastica o termoindurente. Tali compositi vengono realizzati sottoforma di lamine impilate l'una sull'altra in modo da formare laminati, cioè piastre o gusci, dalle ottime proprietà meccaniche.

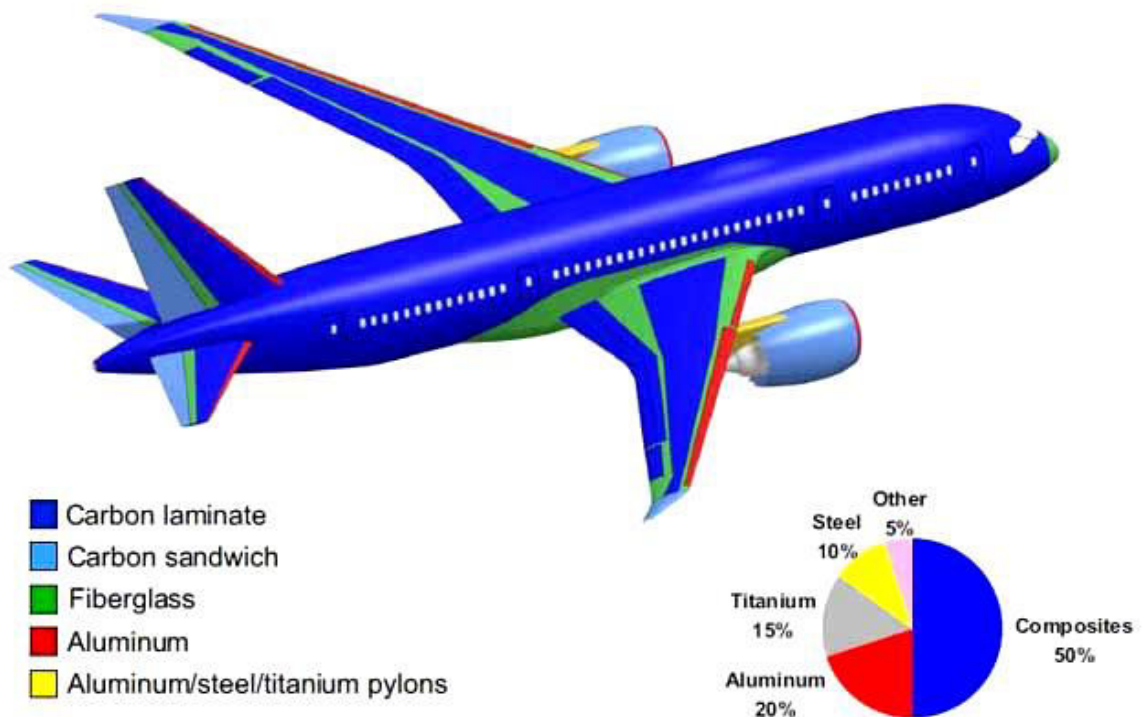


Fig. 1.2: Impiego dei materiali compositi nel Boeing-787

1.2 Classificazione dei materiali compositi

I materiali compositi possono essere classificati in vari modi, ma i principali fattori su cui si effettua la distinzione sono:

- Tipo di rinforzo:
 - Fibre continue lunghe:
 - unidirezionali
 - bidirezionali (woven,...)
 - con orientazione casuale
 - Fibre corte:
 - con orientazione casuale
 - con orientazione preferenziale
 - Particelle e whiskers:
 - con orientazione casuale
 - con orientazione preferenziale
- Configurazione del laminato
 - Lamina unidirezionale: singola lamina (chiamata anche *ply* o *layer*) o sovrapposizione di più lamine in cui l'orientazione del materiale è la stessa.
 - Laminato: unione di più lamine impilate e unite insieme in cui non tutte le lamine hanno la stessa orientazione del materiale.

Solitamente si preferisce utilizzare rinforzi sotto forma di fibre in modo da conferire al composito maggiore resistenza rispetto alla forma grezza. La struttura a fibra porta infatti ad una riduzione del numero di difetti presenti nel materiale e, al contempo, ad un allineamento con l'asse della fibra dei cristalli o dei polimeri costituenti (il che assicura un incremento della resistenza) [1].

Le fibre, sebbene abbiano ottime proprietà meccaniche in direzione assiale, non possono essere utilizzate da sole in quanto non sono in grado di sopportare né carichi di compressione né carichi trasversali. A tale carenza si provvede utilizzando un allegante o una matrice che tenga unite le fibre, assicuri la resistenza a carichi trasversali e garantisca un supporto elastico per le stesse incrementandone la resistenza a compressione. A queste funzioni principali si sommano la protezione della fibra da agenti atmosferici e la prevenzione di fenomeni corrosivi del composito.

1.3 Impiego dei materiali compositi in campo aeronautico

I materiali compositi, date le loro eccellenti proprietà, stanno via via conquistando il mercato mondiale dell'industria aeronautica e non solo. Tale impiego crescente è legato al fatto che questi non hanno niente da invidiare alle migliori leghe attualmente impiegate in termini di caratteristiche di rigidità e resistenza; essi godono fra l'altro di basso peso, ottima resistenza alla corrosione e possibilità di ridurre il numero di componenti da assemblare per realizzare uno stesso prodotto rispetto ad una classica soluzione in lega metallica.

Il basso peso dei materiali compositi deriva dal fatto che sia le fibre che le matrici impiegate hanno bassa densità, e ciò li rende ideali per l'impiego nell'industria aeronautica e aerospaziale (in cui si mira alla riduzione dei pesi al fine di massimizzare i profitti).

La possibilità di ridurre il numero di parti grazie a tali materiali è inoltre garantita dal fatto che possono essere facilmente modellati in forme complesse, evitando spese superflue inerenti i costi di assemblaggio.

In Fig. 1.3 si riporta la struttura di un generico materiale composito e, analizzando nello specifico questi materiali, si evince subito come essi siano realizzati con fibre ad altissima resistenza e rigidità specifica immerse in

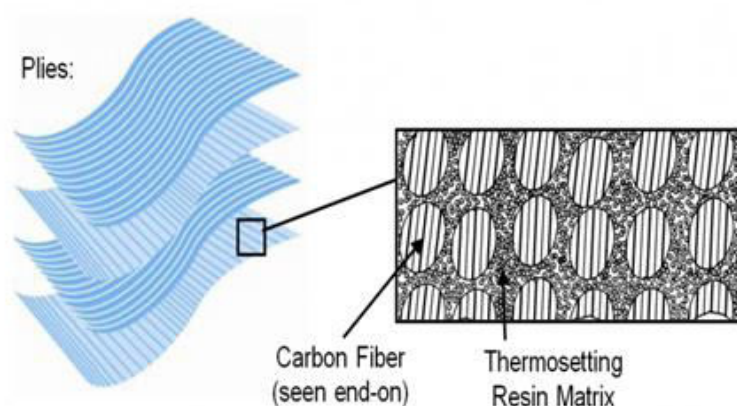


Fig. 1.3: Microstruttura di un generico materiale composito

una matrice con proprietà di resistenza e rigidità molto più modeste. La presenza della matrice fa sì che si ottenga un materiale con proprietà meccaniche inferiori a quelle della sola fibra e fortemente influenzate dal quantitativo di matrice impiegata. Tuttavia la presenza della matrice, come già accennato, è necessaria in quanto la fibra da sola non contribuisce in alcun modo alla resistenza in direzione trasversale all'asse; la matrice però non è comunque sufficiente a garantire

al composito una resistenza accettabile in tutte le direzioni il che rende obbligatoria, in caso di componenti soggetti a forti sollecitazioni multiassiali, la sovrapposizione di lamine con diversa orientazione delle fibre. Tale soluzione, se ben congeniata, permette di far fronte a tutte le possibili condizioni di carico [1].

1.4 Approccio multiscala

La produzione di un componente realizzato in materiale composito obbliga il progettista ad affrontare problematiche di varia natura. Tra queste è possibile annoverare:

- la scelta del materiale sulla base dell'impiego richiesto e, quindi, l'individuazione del tipo e della quantità di fibra e matrice da utilizzare per la produzione delle lamine;
- lo schema di impilamento delle varie lamine, poiché si vuole ottenere una struttura capace di resistere a tutte le possibili sollecitazioni di esercizio;
- la definizione della forma del componente che più si avvicini al connubio perfetto tra risposta strutturale globale e comodità produttiva.

E' dunque evidente come l'impiego di tali materiali non sia affatto banale, anche perché le problematiche ad essi correlate devono essere risolte attraverso scale di analisi diverse come si evince dalla Fig. 1.4.

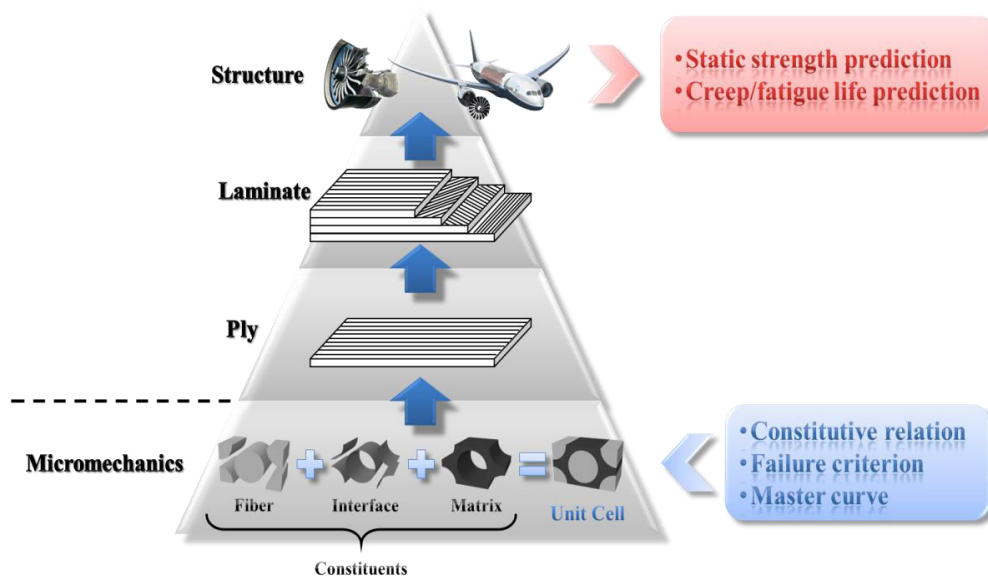


Fig. 1.4: Idea di approccio multiscala

Se, per esempio, si focalizza l'attenzione sulla scelta del tipo di fibra e di matrice, o su quale debba essere il loro rapporto ottimale, bisogna affidarsi alla micromeccanica.

Quest'ultima ci consente di descrivere l'interazione tra fibra e matrice, e la loro risposta alle varie sollecitazioni, anche in presenza di fenomeni di danneggiamento. Attraverso la micromeccanica si effettua quindi un'analisi dei singoli costituenti, studiandone il comportamento microscopico e attuando così un'*analisi di microscala*.

Se si vuole invece valutare la risposta di un laminato in composito ai possibili schemi di impilamento delle singole lamine o ai vari tipi di sollecitazione, anche in presenza di danneggiamenti o irrigidimenti, è necessario analizzare il più piccolo componente strutturale; si parla in tal caso di *analisi di mesoscala*, in cui il problema viene affrontato da un punto focale intermedio tra la struttura globale e i singoli costituenti.

Infine, se si vuole studiare la risposta globale di una struttura complessa realizzata in composito, quale il cassone alare di un velivolo o lo scafo di una barca da diporto, bisogna allontanare ulteriormente il punto focale e analizzare il problema globalmente; si parla dunque di *analisi di macroscala*.

Un'analisi che comprenda tutti e tre i tipi di approccio al problema si definisce *analisi di multiscala* [2].

CAPITOLO 2

Micromeccanica dei materiali compositi

2.1 Introduzione alla micromeccanica

Con il termine *micromeccanica* si intende la scienza che studia i materiali non omogenei con l'obiettivo di ricavarne le principali grandezze ingegneristiche omogeneizzate note che siano le proprietà dei singoli costituenti (Fig. 2.1).

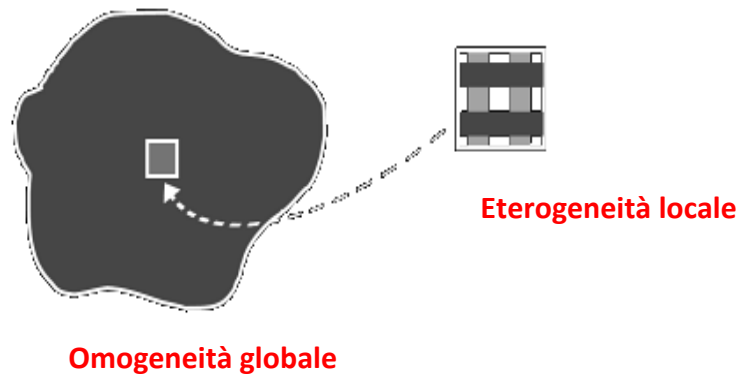


Fig. 2.1: Idea di approccio micromeccanico

Nell'ambito dei materiali compositi tale approccio permette di valutare nel dettaglio l'interazione tra i vari costituenti (fibra e matrice) e l'interfaccia tra gli stessi, al fine di ricavare delle proprietà omogeneizzate. Tale processo è quindi molto importante per il progettista, in quanto permette di studiare il materiale composito nella sua natura anisotropa con una modellizzazione in un materiale omogeneo trasversalmente isotropo equivalente.

L'analisi micromeccanica da un punto di vista teorico fornisce le proprietà di rigidità (con buoni risultati) e resistenza (con risultati qualitativamente peggiori) di un materiale composito, note che siano le proprietà dei suoi costituenti.

2.2 Fondamenti teorici della micromeccanica

Per una corretta comprensione dell'approccio micromeccanico è necessario focalizzare l'attenzione sulle basi teoriche che lo governano.

Nel paragrafo si riassumano alcune delle più affermate teorie in campo ingegneristico, la trattazione è preceduta dalla analisi delle definizioni chiave della micromeccanica.

2.2.1 Definizioni fondamentali

Le proprietà di un composito sono controllate dai volumi di fibra e matrice impiegati; le frazioni volumetriche di ciascun costituente sono definite come [1]:

- *Frazione volumetrica della fibra:*

$$V_f = \frac{\text{volume della fibra}}{\text{volume totale}}$$

i cui valori possono oscillare tra lo 0% (matrice pura) e il 70% (limite tecnologico);

- *Frazione volumetrica della matrice:*

$$V_m = \frac{\text{volume della matrice}}{\text{volume totale}}$$

La relazione esistente tra le frazioni volumetriche suddette è esprimibile nella forma:

$$V_f + V_m = 1$$

A tali definizioni si aggiunge il concetto fondamentale di *Representative Volume Element* (RVE). L'RVE corrisponde al più piccolo volume di materiale che conserva tutte le caratteristiche base dei costituenti e, al contempo, ne descrive il comportamento globale. Nell'RVE compaiono tensioni e deformazioni non uniformi associate all'assenza di omogeneità e isotropia, dovuta a sua volta alla struttura intrinseca del materiale composito; tuttavia

L'RVE ha il vantaggio di poter essere sostituito da un volume equivalente di materiale omogeneo senza alterare lo stato di stress attorno all' RVE stesso. Questo particolare comportamento è legato al fatto che lo stato di tensione nella restante parte della struttura non varierà quando si conducono analisi ad una scala superiore a quella dell'RVE.

2.2.2 Costituenti isotropi

Si ipotizzi che sia la fibra che la matrice, prese singolarmente, siano dei materiali isotropi. Un materiale isotropo è un materiale avente infiniti piani di simmetria, cioè le cui proprietà si mantengono inalterate in tutte le direzioni spaziali.

Per tali materiali è possibile definire il comportamento elastico note due sole costanti: il Modulo di Young (E) e il numero di Poisson (ν). Quest'ultime sono ottenibili mediante un'unica analisi sperimentale, e vengono utilizzate per il calcolo di altre proprietà meccaniche quali, ad esempio, il modulo elastico a taglio (G) ottenibile dalla seguente relazione:

$$G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)}$$

Il legame tra sforzi e deformazioni per un materiale isotropo è dato dalla seguente relazione:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 - \nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$

2.2.3 Modello elementare per il calcolo della matrice di rigidezza

Molte sono le teorie sviluppate al fine di effettuare un'analisi micromeccanica; uno degli approcci più largamente usati permette di dimostrare, in modo semplificato, come la combinazione di due materiali

assunti isotropi dia luogo ad un materiale ortotropo equivalente per cui vale la relazione seguente [3]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$

e in cui i coefficienti C_{ij} sono esprimibili in funzione delle seguenti costanti elastiche:

- $E_1 = \text{Modulo di elasticità longitudinale}$
- $E_2 = \text{Modulo di elasticità trasversale}$
- $G_{12} = \text{Modulo elastico a taglio nel piano}$
- $G_{23} = \text{Modulo elastico a taglio fuori dal piano}$
- $\nu_{12} = \text{Numero di Poisson nel piano}$

Queste saranno a loro volta funzioni di:

- $E_f = \text{Modulo di Young della fibra}$
- $\nu_f = \text{Modulo di Poisson della fibra}$
- $E_m = \text{Modulo di Young della matrice}$
- $\nu_m = \text{Numero di Poisson della matrice}$
- $V_f = \text{Frazione volumetrica della fibra}$
- $V_m = \text{Frazione volumetrica della matrice}$

2.2.3.1 Calcolo delle costanti elastiche

Di seguito si illustra il metodo di calcolo delle varie costanti elastiche per un materiale composito [1].

➤ **Modulo elastico longitudinale E_1**

Il modulo elastico longitudinale, detto anche modulo elastico in direzione della fibra, può essere facilmente calcolato sfruttando la nota *regola della miscela (Rule Of Mixtures (ROM))*. L'assunzione principale su cui si basa questa formula è che la deformazione in direzione della fibra sia la stessa tanto nella matrice quanto nella fibra. Ciò equivale ad assumere un incollaggio perfetto tra fibra e matrice, in modo che all'allungamento del materiale in direzione della fibra corrisponda un uguale allungamento della fibra e della matrice come mostrato in Fig. 2.2.

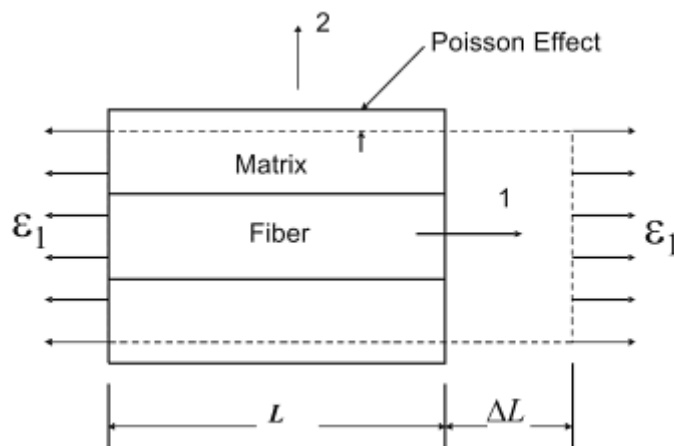


Fig. 2.2: RVE soggetto a deformazione uniforme longitudinale

Tale assunzione è fondamentale affinché si possa considerare un corpo eterogeneo, come l'RVE, in uno omogeneo che soddisfi le equazioni di compatibilità con la restante parte del corpo; grazie ad essa è anche possibile dimostrare la validità delle relazioni riportate di seguito.

Dalla definizione di deformazione si ha:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}$$

dove:

$$\varepsilon_1 = \text{deformazione in direzione longitudinale}$$

Poiché sia la fibra che la matrice sono materiali isotropi elastici, la legge che lega tra loro tensione e deformazione assume la forma:

$$\sigma_f = E_f * \varepsilon_1$$

$$\sigma_m = E_m * \varepsilon_1$$

in cui i pedici f ed m fanno rispettivamente riferimento alla fibra e alla matrice.

La tensione media σ_1 agisce sulla sezione trasversale dell'RVE pari a:

$$A = A_f + A_m$$

Il carico totale applicato è esprimibile tramite la relazione:

$$P = \sigma_1 * A = \sigma_f * A_f + \sigma_m * A_m$$

Sfruttando poi le relazioni:

$$V_f = \frac{A_f}{A} \quad \text{e} \quad V_m = \frac{A_m}{A}$$

si ricava:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 * (E_f * V_f + E_m * V_m)$$

A tal punto è sufficiente osservare che per il materiale omogeneizzato equivalente si ha:

$$\sigma_1 = E_1 * \varepsilon_1$$

Per cui dal confronto con le due relazioni precedenti si ottiene:

$$E_1 = E_f * V_f + E_m * V_m$$

che può essere riscritto nella forma:

$$E_1 = E_f * V_f + E_m * (1 - V_f)$$

nota come *regola della miscela* e riscrivibile come:

$$E_1 = E_m + V_f * (E_f - E_m)$$

E' dunque evidente come il modulo di elasticità longitudinale (E_1) dipenda linearmente dalla frazione volumetrica della fibra (V_f) e dalle proprietà dei costituenti.

Nella stragrande maggioranza dei casi il modulo elastico della fibra è circa due ordini di grandezza più grande di quello della matrice e, pertanto, il modulo elastico longitudinale del materiale composito è fortemente dominato da quello della fibra (*fibre-dominated property*).

➤ **Modulo elastico trasversale E_2**

Per la determinazione del modulo di elasticità in direzione trasversale rispetto all'asse delle fibre, si assume che la tensione sia la stessa nella fibra e nella matrice. Tale ipotesi è necessaria per assicurare l'equilibrio in direzione trasversale e, ancora una volta, implica che si abbia un incollaggio perfetto tra fibra e matrice. In tal caso l'RVE sarà soggetto ad una tensione trasversale uniforme, come mostrato in Fig. 2.3.

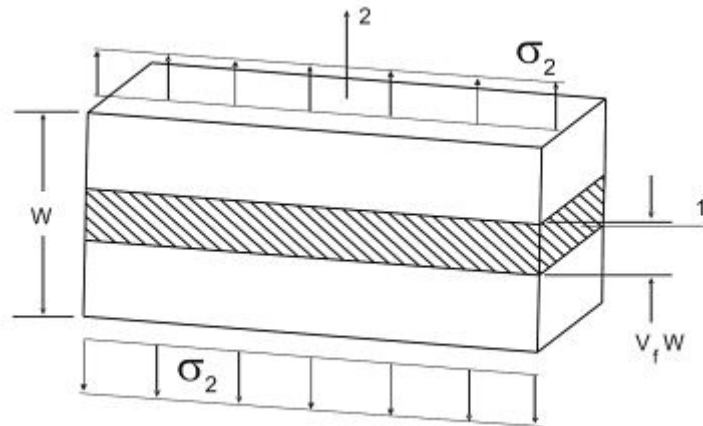


Fig. 2.3: RVE soggetto a deformazione trasversale uniforme

Le deformazioni di fibra e matrice, essendo quest'ultimi materiali elastici lineari, sono esprimibili come:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \text{e} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}$$

Tali deformazioni, calcolate nello spessore (W) dell'RVE, possono essere scritte come $V_f * W$ e $V_m * W$ rispettivamente per fibra e matrice. L'elongazione totale (o deformazione media) è invece espressa come segue:

$$\varepsilon_2 * W = \varepsilon_f * V_f * W + \varepsilon_m * V_m * W$$

Dividendo entrambi i membri per W e utilizzando la legge di Hooke per i due costituenti si ottiene:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_f}{E_f} * V_f + \frac{\sigma_m}{E_m} * V_m$$

ma, avendo assunto la tensione identica sia nella fibra che nella matrice, si ha:

$$\sigma_f = \sigma_m = \sigma_2$$

Quindi l'equazione si riduce a:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_f} * V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} * V_m$$

e, poiché per il materiale omogeneizzato equivalente vale ancora la legge di Hooke, si ottiene:

$$\sigma_2 = E_2 * \varepsilon_2$$

Il modulo elastico trasverso E_2 è quindi esprimibile mediante la seguente relazione:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

Tale equazione, nota come *regola della miscela inversa* (Inverse rule of mixtures (IROM)), dimostra che le fibre non contribuiscono in modo apprezzabile alla rigidità trasversale del composito a meno che la frazione volumetrica di fibra non sia molto elevata. La rigidità delle fibre è infatti nettamente superiore a quella della matrice e il primo rapporto tende ad essere generalmente inferiore del secondo; il modulo di elasticità trasverso E_2 sarà dunque una proprietà dominata dalla matrice (*matrix-dominated property*).

➤ **Modulo di Poisson nel-piano ν_{12}**

Il modulo di Poisson è definito come l'opposto del rapporto tra la deformazione risultante e la deformazione nella direzione del carico applicato:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

Si tratta di un numero ottenuto sperimentalmente mediante test in cui il carico è applicato in direzione i e la deformazione risultante è indotta, per effetto Poisson, nella direzione j perpendicolare a quella del carico.

Analogamente a quanto fatto per il modulo elastico longitudinale, è possibile dimostrare come il modulo di Poisson nel piano risponda alla regola della miscela e rispetti la seguente relazione:

$$\nu_{12} = \nu_f * V_f + \nu_m * V_m$$

Quest'ultima, seppur approssimata, è più che sufficiente in sede di progetto dal momento che i moduli di Poisson della fibra e della matrice sono solitamente molto simili.

➤ **Modulo di elasticità a taglio nel piano G_{12}**

E' noto che una tensione pura di taglio nel piano $\sigma_6 = \tau_{12} = \tau_{21}$ deforma un RVE di materiale composito nel modo rappresentato in Fig. 2.4.

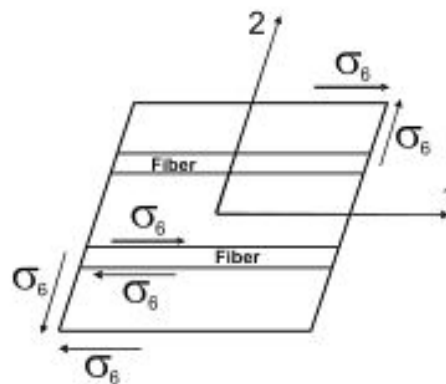


Fig. 2.4: RVE soggetto a deformazione a taglio nel piano

E' possibile dimostrare, analogamente a quanto fatto per il modulo di elasticità trasversale, come il modulo di elasticità a taglio nel piano rispetti la regola inversa della miscela [4]; si ottiene infatti:

$$G_{12} = \frac{G_m}{V_m + V_f * \frac{G_m}{G_f}}$$

Qualora si abbiano fibre molto rigide il modulo elastico è dominato dalle proprietà della matrice; in tal caso infatti $G_f \gg G_m$ e la relazione precedente può essere riscritta approssimativamente nella forma:

$$G_{12} \cong \frac{G_m}{1 - V_f}$$

➤ **Modulo di elasticità a taglio trasversale G_{23}**

Per il calcolo del modulo di elasticità a taglio trasversale o intralaminare G_{23} bisogna considerare che le tensioni intralaminari $\sigma_4 = \tau_{23} = \tau_{32}$ agiscono sullo spessore del composito come mostrato in Fig. 2.5.

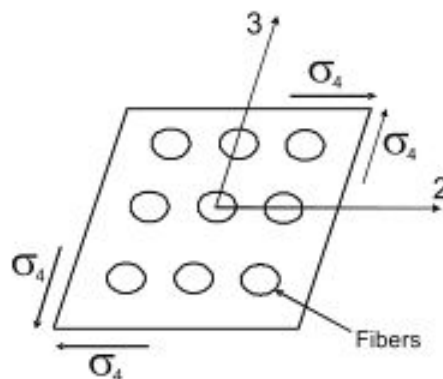


Fig. 2.5: RVE soggetto a deformazione a taglio trasversale

In tal caso però non è possibile ricavare il valore del modulo sfruttando la regola della miscela ma, in prima approssimazione, si dovrà sfruttare la seguente relazione semiempirica basata sullo *stress partitioning parameter* (SPP) [5]:

$$G_{23} = G_m * \frac{V_f + \eta_4 * (1 - V_f)}{\eta_4 * (1 - V_f) + V_f * \frac{G_m}{G_f}}$$

dove:

$$\eta_4 = \frac{3 - 4 * \nu_m + \frac{G_m}{G_f}}{4 * (1 - \nu_m)}$$

Nel caso invece delle tensioni intralaminari $\sigma_5 = \tau_{13} = \tau_{31}$ si ha una deformazione a taglio nello spessore del composito analoga a quella vista nella Fig. 2.4.

Risulterà quindi ragionevole asserire che:

$$G_{13} = G_{12}$$

2.2.3.2 Risultati del modello elementare

Le relazioni suddette descrivono l'andamento dei vari moduli elastici in funzione delle frazioni volumetriche di fibra e matrice, come riportato in Fig. 2.6 [1].

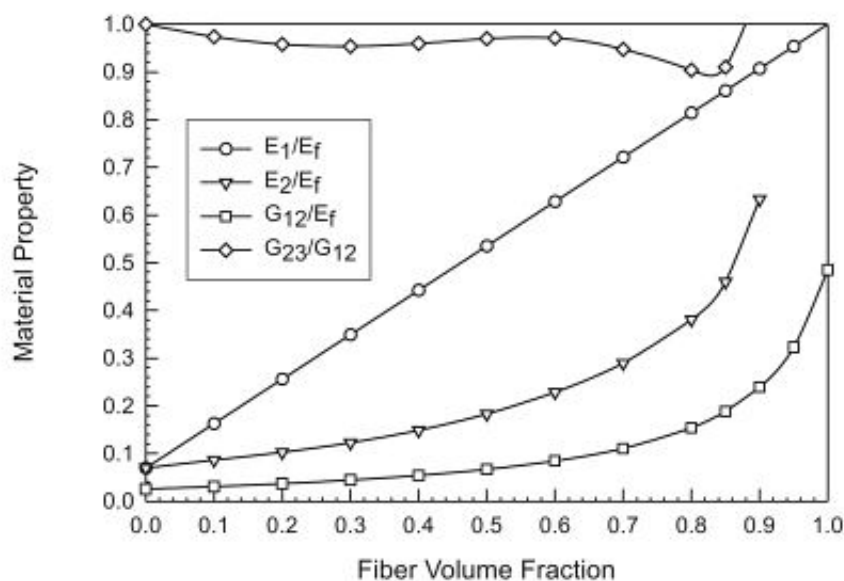


Fig. 2.6: Andamenti delle costanti elastiche in funzione della frazione volumetrica di fibra

L'analisi effettuata sinora fornisce buoni risultati solo nei casi in cui è possibile applicare la regola della miscela diretta; nei restanti casi la stima delle rigidità, condotta sulla base di tali relazioni, risulta troppo approssimata ed è necessario introdurre teorie più complesse per ottenere valori più affidabili.

Tra le varie teorie proposte è opportuno prendere in considerazione la teoria del *Periodic Microstructure Model* (PMM) sulla quale si basano gli studi analitici del presente lavoro.

2.3 Periodic Microstructure Model (PMM)

La teoria del *Periodic Microstructure Model* (PMM) [6,7] è una teoria particolarmente affidabile per il calcolo della matrice di rigidità del materiale equivalente derivato dall'omogeneizzazione di un materiale composito a fibra lunga. Tale teoria è stata presa a riferimento in quanto presenta un'elevata accuratezza di calcolo delle proprietà elastiche di materiali a struttura periodica. Secondo tale teoria infatti, se il composito ha una microstruttura periodica, o se la sua microstruttura è approssimabile ad una periodica, è possibile utilizzare degli sviluppi in serie di Fourier per calcolare tutte le componenti della matrice di rigidità. Il calcolo delle proprietà di un composito unidirezionale a fibra lunga permette una notevole semplificazione del problema generale. In particolare, i calcoli vengono condotti facendo riferimento ad un materiale composito costituito da fibre cilindriche e per un'assegnata frazione volumetrica V_f ; si ipotizza inoltre un comportamento elastico lineare per la matrice ed un comportamento elastico trasversalmente isotropo per la fibra. È necessario ricordare che un materiale trasversalmente isotropo è definito come un materiale avente un solo asse di simmetria (per esempio l'asse della fibra); in tali materiali per una descrizione completa del comportamento elastico sono necessarie cinque costanti:

- E_A (Modulo di elasticità assiale)
- E_T (Modulo di elasticità trasversale)
- G_A (Modulo di elasticità a taglio assiale)
- G_T (Modulo di elasticità a taglio trasversa)
- ν_A (Modulo di Poisson assiale)

Nel caso specifico si ricavano le varie componenti della matrice di cedevolezza come segue:

$$C_{11}^* = \lambda_m + 2\mu_m - V_f(-a_4^2 + a_3^2) \left(-\frac{(2\lambda_m + 2\mu_m - C'_{33} - C'_{23})(a_4^2 - a_3^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}$$

$$C_{12}^* = \lambda_m + V_f \left(\frac{(\lambda_m - C'_{12})(a_4 - a_3)}{a_1} \right) \left(\frac{(2\lambda_m + 2\mu_m - C'_{33} - C'_{23})(a_3^2 - a_4^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}$$

$$C_{22}^* = \lambda_m + 2\mu_m - V_f \left(\frac{(2\lambda_m + 2\mu_m - C'_{33} - C'_{23})a_3}{a_1} - \frac{(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right) \left(\frac{(2\lambda_m + 2\mu_m - C'_{33} - C'_{23})(a_3^2 - a_4^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}$$

$$C_{23}^* = \lambda_m + V_f \left(\frac{(2\lambda_m + 2\mu_m - C'_{33} - C'_{23})a_4}{a_1} - \frac{(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right) \left(\frac{(2\lambda_m + 2\mu_m - C'_{33} - C'_{23})(a_3^2 - a_4^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}$$

$$C_{44}^* = \mu_m - V_f \left(\frac{2}{2\mu_m - C'_{22} + C'_{23}} - \left(2s_3 - \frac{4s_7}{2 - 2\nu_m} \right) \mu_m^{-1} \right)^{-1}$$

$$C_{66}^* = \mu_m - V_f \left((\mu_m - C'_{66})^{-1} - \frac{s_3}{\mu_m} \right)^{-1}$$

Dove:

$$a_1 = 4\mu_m^2 - 2\mu_m C'_{33} + 6\lambda_m \mu_m - 2C'_{11} \mu_m - 2\mu_m C'_{23} + C'_{23} C'_{11} + 4\lambda_m C'_{12} - 2C'_{12}{}^2 - \lambda_m C'_{33} - 2C'_{11} \lambda_m + C'_{11} C'_{33} - \lambda_m C'_{23}$$

$$a_2 = 8\mu_m^3 - 8\mu_m^2 C'_{33} + 12\mu_m^2 \lambda_m - 4\mu_m^2 C'_{11} - 2\mu_m C'_{23} + 4\lambda_m \mu_m C'_{23} + 4\mu_m C'_{11} C'_{33} - 8\mu_m \lambda_m C'_{33} - 4\mu_m C'_{12} + 2\mu_m C'_{33}{}^2 - 4\lambda_m \mu_m C'_{11} + 8\lambda_m \mu_m C'_{12} + 2\lambda_m C'_{11} C'_{33} + 4\lambda_m C'_{23} C'_{12} - 4\lambda_m C'_{12} C'_{33} - 2\lambda_m C'_{11} C'_{23} - 2C'_{23} C'_{12}{}^2 + C'_{23}{}^2 C'_{11} + 2C'_{33} C'_{12}{}^2 - C'_{11} C'_{33}{}^2 + \lambda_m C'_{33}{}^2 - \lambda_m C'_{23}{}^2$$

$$a_3 = \frac{4\mu_m^2 + 4\lambda_m \mu_m - 2C'_{11} \mu_m - 2C'_{33} \mu_m - C'_{11} \lambda_m - \lambda_m C'_{33} - C'_{11} \lambda_m}{a_2} + \frac{C'_{11} C'_{33} + 2\lambda_m C'_{12} - C'_{12}{}^2 - \lambda_m C'_{33}}{a_2} - \frac{s_3 - \frac{s_3}{2-2\nu_m}}{\mu_m}$$

$$a_4 = \frac{2\mu_m C'_{23} + 2\lambda_m \mu_m - \lambda_m C'_{23} - C'_{11} \lambda_m - C'_{12}{}^2 + 2\lambda_m C'_{12} + C'_{11} C'_{23}}{a_2} + \frac{s_7}{\mu_m(2-2\nu_m)}$$

I coefficienti C' per la fibra, che compaiono in tali espressioni, sono i coefficienti della matrice di rigidità per un materiale trasversalmente isotropo; essi si esprimono in funzione delle proprietà elastiche della fibra stessa come segue:

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu_A^2 E_T/E_A - \nu_T^2 - 2\nu_A^2 \nu_T E_T/E_A}{E_A E_T^2}$$

$$C'_{11} = \frac{1 - \nu_T^2}{E_T^2 \Delta}$$

$$C'_{22} = C'_{33} = \frac{1 - \nu_A^2 E_T/E_A}{E_A E_T \Delta}$$

$$C'_{12} = C'_{13} = \frac{\nu_A E_T / E_A + \nu_A \nu_T E_T / E_A}{E_T^2 \Delta}$$

$$C'_{23} = \frac{\nu_T + \nu_A^2 E_T / E_A}{E_A E_T \Delta}$$

$$C'_{44} = G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)} = \frac{C'_{22} - C'_{23}}{2}$$

$$C'_{55} = C'_{66} = G_A$$

Le costanti di Lamè della matrice, che compaiono nelle precedenti equazioni, possono essere calcolate attraverso le seguenti espressioni:

$$\lambda_m = \frac{E_m \nu_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)}$$

$$\mu_m = G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}$$

I coefficienti s_3, s_6 e s_7 tengono conto della geometria della microstruttura, includendo la geometria delle inclusioni e la loro disposizione geometrica. Per fibre cilindriche disposte a pattern esagonale si ha:

$$s_3 = 0.49247 - 0.47603V_f - 0.02748V_f^2$$

$$s_6 = 0.36844 - 0.14944V_f - 0.27152V_f^2$$

$$s_7 = 0.12346 - 0.32035V_f - 0.23517V_f^2$$

Alla luce di quanto riportato, le proprietà elastiche del materiale composito risultano determinate essendo $[S] = [C]^{-1}$:

$$\mathbf{E}_1 = 1/S_{11}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 = 1/S_{22}$$

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{13} = -S_{21}/S_{11}$$

$$\mathbf{v}_{23} = -S_{32}/S_{22}$$

$$\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{13} = 1/S_{55}$$

$$\mathbf{G}_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} = 1/S_{44}$$

Capitolo 3

Modello agli elementi finiti per il calcolo della matrice di rigidità

3.1 Introduzione

Nel presente capitolo si riportano in modo dettagliato le scelte e le procedure sviluppate per la realizzazione di un modello di calcolo FEM delle componenti della matrice di rigidità di un materiale composito unidirezionale.

La creazione di un simile modello ha innanzitutto richiesto la definizione del volume elementare rappresentativo (RVE); per farlo, è stato necessario individuarne la geometria e i materiali costitutivi. L'RVE realizzato è stato quindi preso come riferimento nel calcolo della matrice di rigidità e, pertanto, ad esso sono state applicate le condizioni al contorno necessarie per la risoluzione del problema.

Ottenuti i risultati dal modello FEM così creato si è passati, attraverso un processo di omogeneizzazione volumetrica, al calcolo dei termini della matrice di rigidità omogeneizzata, dai quali sono state poi ricavate le costanti elastiche del composito.

Al fine di accertare la validità del modello FEM creato, tali proprietà sono state infine confrontate con quelle ottenute attraverso la teoria del *Periodic Microstructure Model* (PMM) [6,7] (non è tuttavia stato possibile effettuare un raffronto con dati sperimentali a causa dell'indisponibilità di questi).

3.2 Realizzazione dell'RVE

Gli step principali seguiti per la generazione del modello sono:

- Definizione della geometria
- Scelta dei materiali
- Creazione della griglia di calcolo

3.2.1 Definizione della geometria

La scelta della geometria dell'RVE è stata fortemente influenzata dal fatto che l'obiettivo finale è quello di verificare la validità del modello FEM creato, confrontandolo con risultati derivanti da calcoli teorici [6,7].

Con riferimento a dati di letteratura [9] è stato scelto un modello in materiale composito costituito da:

- Fibre circolari con diametro medio di $5 \mu m$;
- Frazione volumetrica di fibra nel composito pari al 60%.

Tali grandezze non sono però sufficienti a definire univocamente la geometria del modello, pertanto è stato scelto un pattern interno coerente con la Teoria del *Periodic Microstructure Model*, e quindi esagonale, e una struttura dell'RVE che riproducesse fedelmente il volume di riferimento utilizzato nel calcolo teorico. La struttura a pattern esagonale è stata preferita solo per riprodurre il modello teorico [6,7]; una qualsiasi altra scelta (con ripetitività interna o casuale) darebbe risultati analoghi, anche se, l'eventuale scelta di una geometria random darebbe risultati confrontabili solo se inserita in un modello di dimensioni maggiori.

Tenendo conto della struttura scelta e di alcune grandezze principali, è stato possibile ricavare molto semplicemente le dimensioni dell'RVE:

$$a_1 = 0.76 \mu m$$

$$a_2 = 3.07 \mu m$$

$$a_3 = 5.32 \mu m$$

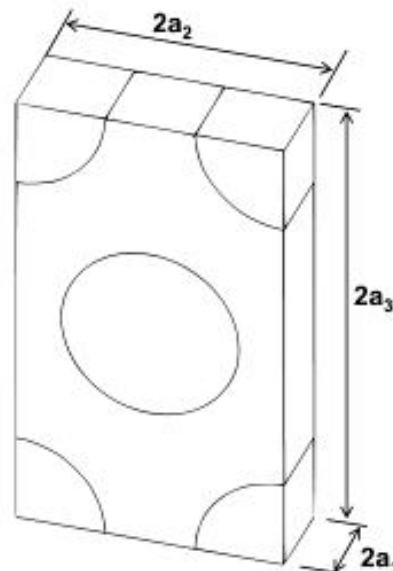


Fig. 3.1: Modello di RVE utilizzato

Il modello ottenuto è mostrato in Fig. 3.2.

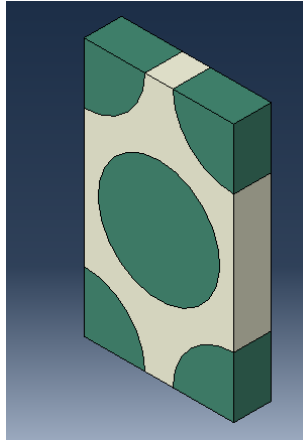


Fig. 3.2: Modello completo di RVE

in cui è possibile notare la distinzione tra le zone occupate dalle fibre e quelle destinate ad accogliere la matrice.

A tale campione è stato poi associato un sottomodello (Fig. 3.3) pari ad un ottavo dell'originale; si tratta di un volumetto ottenuto sfruttando la simmetria del modello di partenza rispetto ai piani paralleli a quelli del sistema di coordinate rettangolari.

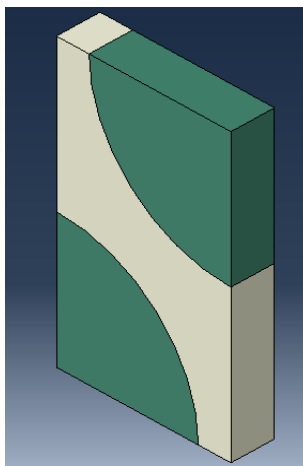


Fig. 3.3: Sottomodello di RVE

La sua introduzione permette di semplificare ulteriormente il problema in presenza di simmetrie del sistema e di snellire il calcolo dei termini delle prime tre colonne della matrice di rigidità omogeneizzata.

3.2.2 Scelta dei materiali

Per attribuire alle varie aree del modello il materiale opportuno, sono stati usati i dati pertinenti al caso di letteratura preso a riferimento [9].

Si riportano in tabella 3.1 le proprietà elastiche dei costituenti, ricordando le ipotesi di omogeneità, isotropia ed elasticità da cui sono caratterizzate.

Materiale	Modulo di young [Mpa]	Modulo di Poisson
Fibra di Vetro	74000	0.2
Resina Epossidica	3760	0.39

Tab. 3.1: Proprietà elastiche dei costituenti

3.2.3 Creazione della griglia di calcolo

Volendo esaminare la sola risposta elastica del composito, è stato sufficiente richiedere al programma una semplice analisi lineare; ciò ha permesso di realizzare una griglia non particolarmente fitta, rendendo in tal modo più rapido il calcolo.

La griglia utilizzata per il modello globale è rappresentata in Fig. 3.4.

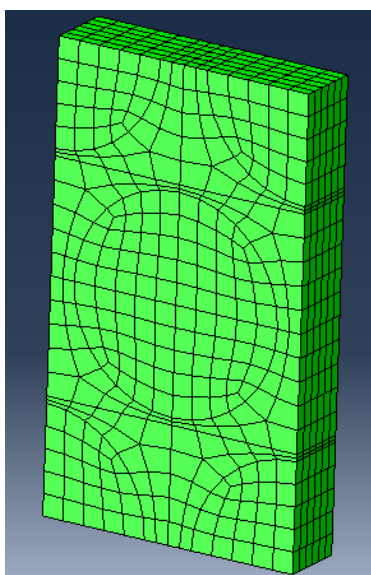


Fig. 3.4: Mesh dell'RVE completo

caratterizzata da:

- numero di nodi = 2569
- numero di elementi = 1968
- tipo di elementi = C3D8R

Per il sottomodulo ridotto si è ottenuta invece la seguente griglia (Fig. 3.5).

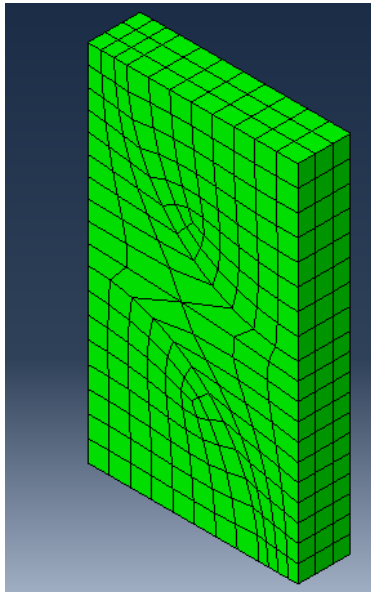


Fig. 3.5: Mesh del sottomodulo di RVE

caratterizzata da:

- numero di nodi = 892
- numero di elementi = 576
- tipo di elementi = C3D8R

3.3 Applicazione delle condizioni al contorno e analisi del modello

Realizzato il modello di riferimento, sono state definite le condizioni al bordo periodiche, con le quali è stato possibile ricavare i coefficienti della matrice di rigidità del composito omogeneizzato.

3.3.1 Condizioni al bordo periodiche e omogeneizzazione numerica

Si consideri un materiale composito contenente fibre cilindriche di lunghezza infinita all'interno di una matrice elastica, come mostrato in Fig. 3.6 [3].

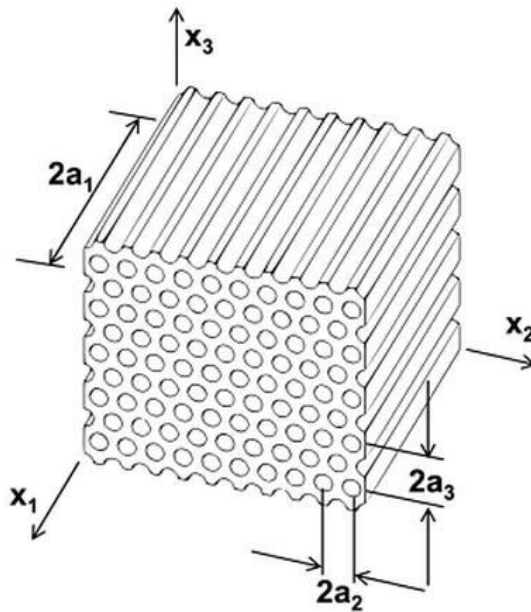


Fig. 3.6: Macro RVE a pattern esagonale

La sezione del composito, ottenuta dall'intersezione con un piano ortogonale all'asse della fibra, mostra la microstruttura periodica riportata in Fig. 3.7.

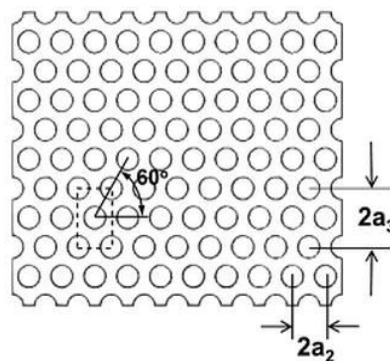


Fig. 3.7: Sezione del macro RVE a pattern esagonale

La scelta di un pattern esagonale è una semplificazione del modello dettata dal fatto che qualsiasi microstruttura si prenda in esame, anche quella con una distribuzione random di fibre, può essere considerata come una microstruttura fittizia periodica equivalente senza alterare i valori dei risultati cercati. In ogni caso l'unione di una matrice con delle fibre unidirezionali darà luogo ad un materiale il cui legame tra sforzi e deformazioni conduce direttamente ad una matrice di rigidezza \mathbf{C} trasversalmente isotropa:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\gamma}_4 \\ \bar{\gamma}_5 \\ \bar{\gamma}_6 \end{Bmatrix}$$

in cui l'asse 1 è quello avente la stessa direzione dell'asse della fibra, e la barretta, che soprassegna sforzi e deformazioni, indica che le grandezze sono mediate sul volume dell'RVE.

Al fine di valutare l'intera matrice di rigidità \mathbf{C} del composito, l'RVE viene soggetto ad una deformazione media $\bar{\varepsilon}_\beta$. Le sei componenti di deformazione ε_{ij}^0 vengono applicate imponendo le seguenti condizioni al contorno sulle componenti di spostamento:

$$u_i(a_1, x_2, x_3) - u_i(-a_1, x_2, x_3) = 2a_1 \varepsilon_{i1}^0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_2 \leq x_2 \leq a_2 \\ -a_3 \leq x_3 \leq a_3 \end{cases}$$

$$u_i(x_1, a_2, x_3) - u_i(x_1, -a_2, x_3) = 2a_2 \varepsilon_{i2}^0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 \leq x_1 \leq a_1 \\ -a_3 \leq x_3 \leq a_3 \end{cases}$$

$$u_i(x_1, x_2, a_3) - u_i(x_1, x_2, -a_3) = 2a_3 \varepsilon_{i3}^0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 \leq x_1 \leq a_1 \\ -a_2 \leq x_2 \leq a_2 \end{cases}$$

Con l'apice 0 si fa riferimento alla deformazione applicata, e con $2a_{ij}\varepsilon_{ij}^0$ allo spostamento necessario per dar luogo alla deformazione ε_{ij}^0 su una lunghezza $2a_{ij}$.

La deformazione ε_{ij}^0 applicata al contorno tramite le condizioni sopra riportate, risulta in uno stato complesso di deformazione all'interno dell'RVE. Tuttavia la deformazione mediata sul volume dell'RVE è pari alla deformazione applicata [10]:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV = \varepsilon_{ij}^0$$

Per un materiale composito omogeneo, la relazione tra le tensioni e le deformazioni medie è data da:

$$\bar{\sigma}_\alpha = C_{\alpha\beta} \bar{\varepsilon}_\beta$$

Le componenti elastiche del tensore \mathbf{C} vengono quindi determinate risolvendo sei modelli elastici di RVE, soggetto di volta in volta alle condizioni al contorno sopra riportate; per ogni problema solo una componente di deformazione ε_β^0 sarà diversa da zero.

Scelto un valore unitario per la deformazione applicata, e una volta risolto il problema definito dalle condizioni al contorno, è possibile calcolare, una colonna alla volta, il campo di tensione σ_α , il cui valor medio coincide con la componente della matrice elastica cercata:

$$C_{\alpha\beta} = \bar{\sigma}_\alpha = \frac{1}{V} \int_V \sigma_\alpha(x_1, x_2, x_3) dV \quad \text{con} \quad \varepsilon_\beta^0 = 1$$

dove $\alpha, \beta = 1 \dots 6$.

Tali integrali vengono calcolati all'interno di ogni elemento finito usando la quadratura di Gauss-Legendre.

I coefficienti in \mathbf{C} vengono calcolati impostando un problema differente per ogni colonna della matrice come riportato nel seguente paragrafo 3.3.2 [3].

3.3.2 Calcolo della matrice di rigidità dell'RVE

➤ Calcolo della prima colonna di \mathbf{C}

Per determinare le componenti C_{i1} , con $i = 1, 2, 3$, si applica la seguente deformazione per allungare l'RVE nella direzione della fibra (direzione x_1):

$$\varepsilon_1^0 = 1 \quad \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 = \gamma_4^0 = \gamma_5^0 = \gamma_6^0 = 0$$

Tale deformazione si traduce nell'imporre le seguenti condizioni al contorno in termini di spostamento all'RVE:

$$\begin{aligned}
u_1(+a_1, x_2, x_3) - u_1(-a_1, x_2, x_3) &= 2a_1 \\
u_2(+a_1, x_2, x_3) - u_2(-a_1, x_2, x_3) &= 0 \\
u_3(+a_1, x_2, x_3) - u_3(-a_1, x_2, x_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_2 \leq x_2 \leq a_2 \\ -a_3 \leq x_3 \leq a_3 \end{cases}$$

$$u_i(x_1, +a_2, x_3) - u_i(x_1, -a_2, x_3) = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 \leq x_1 \leq a_1 \\ -a_3 \leq x_3 \leq a_3 \end{cases}$$

$$u_i(x_1, x_2, +a_3) - u_i(x_1, x_2, -a_3) = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 \leq x_1 \leq a_1 \\ -a_2 \leq x_2 \leq a_2 \end{cases}$$

Tali condizioni equivalgono a vincoli sullo spostamento relativo delle tre facce opposte del volumetto in esame. A causa delle simmetrie geometriche e di vincoli imposti, solo un ottavo di RVE necessita di essere modellato nell'analisi agli elementi finiti. Assumendo che solo la frazione frontale in alto a destra dell'RVE (rappresentata in Fig. 3.8) venga modellata, le condizioni imposte sulle componenti di spostamento diventano:

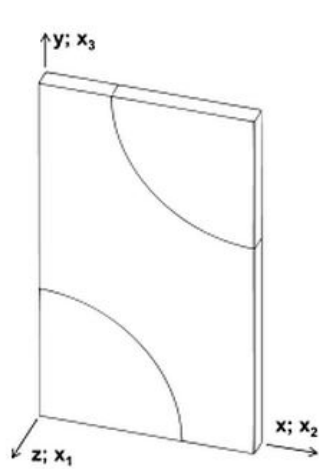


Fig. 3.8: Modello di riferimento per deformazioni estensionali

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, x_2, x_3) &= a_1 & 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\
u_1(0, x_2, x_3) &= 0 & 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\
u_2(x_1, a_2, x_3) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\
u_2(x_1, 0, x_3) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\
u_3(x_1, x_2, a_3) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2 \\
u_3(x_1, x_2, 0) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2
\end{aligned}$$

Condizioni al contorno simmetriche sono applicate sui piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ e, quindi, uno spostamento uniforme è applicato sul piano $x_1 = a_1$. Le componenti di spostamento appena riportate rappresentano dunque delle deformazioni diverse da zero lungo la direzione x_1 e nulle nelle due restanti direzioni.

I coefficienti della colonna 1 saranno a questo punto dati dalla relazione:

$$C_{\alpha 1} = \bar{\sigma}_{\alpha} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{\alpha 1}(x_1, x_2, x_3) dV$$

Nello specifico i risultati ottenuti sono:

- Tensione media volumetrica nella direzione della fibra (Fig. 3.9):

$$C_{11} = \bar{\sigma}_1 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_{1_{elem}} V_{elem} = 50005 \text{ MPa}$$

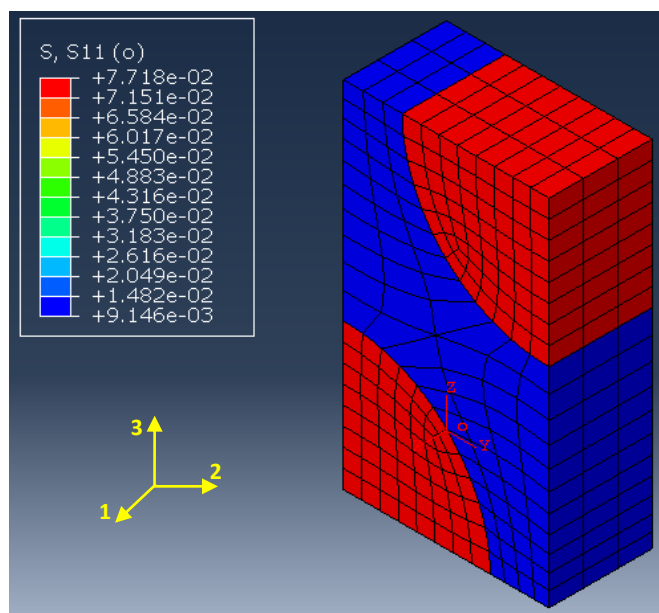


Fig. 3.9: Tensione in direzione 1 per deformazione estensionale unitaria in direzione 1

- Tensione media volumetrica nella direzione ortogonale alla fibra; in particolare si riportano quelle in direzione 2 (Fig. 3.10):

$$C_{12} = \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_{2_{elem}} V_{elem} = 7573 \text{ MPa}$$

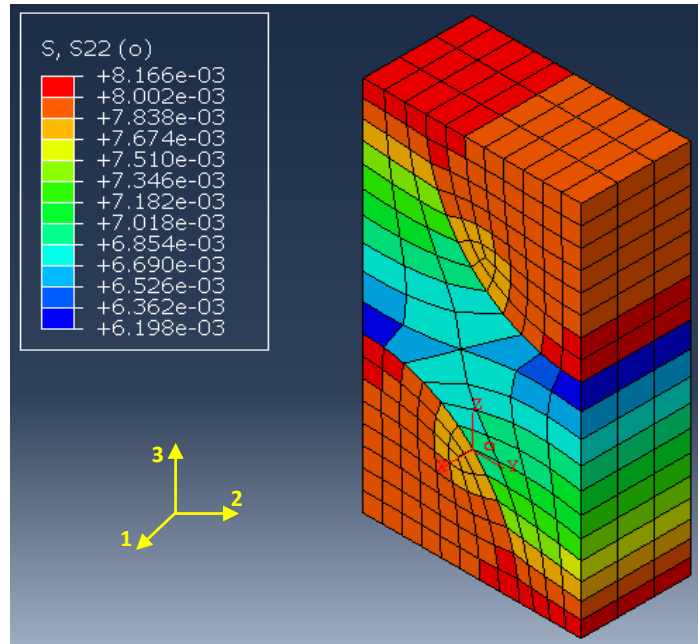


Fig. 3.10: Tensione in direzione 2 per deformazione estensionale unitaria in direzione 1

➤ **Calcolo della seconda colonna di C**

Le componenti $C_{\alpha 2}$, con $\alpha = 1,2,3$, si determinano imponendo una deformazione unitaria nella direzione ortogonale alla fibra e parallela al lato corto del modello:

$$\varepsilon_2^0 = 1 \quad \varepsilon_1^0 = \varepsilon_3^0 = \gamma_4^0 = \gamma_5^0 = \gamma_6^0 = 0$$

Si possono quindi utilizzare le seguenti condizioni di spostamento:

$$\begin{aligned} u_1(a_1, x_2, x_3) &= 0 & 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\ u_1(0_1, x_2, x_3) &= 0 & 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\ u_2(x_1, a_2, x_3) &= a_2 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\ u_2(x_1, 0, x_3) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3 \\ u_3(x_1, x_2, a_3) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2 \\ u_3(x_1, x_2, 0) &= 0 & 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2 \end{aligned}$$

I coefficienti della colonna 2 saranno a questo punto dati dalla relazione:

$$C_{\alpha 2} = \bar{\sigma}_{\alpha} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{\alpha 2}(x_1, x_2, x_3) dV$$

I risultati ottenuti sono:

- Tensione media volumetrica in direzione della deformazione applicata (Fig. 3.11):

$$C_{22} = \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_{2_{elem}} V_{elem} = 18886 \text{ MPa}$$

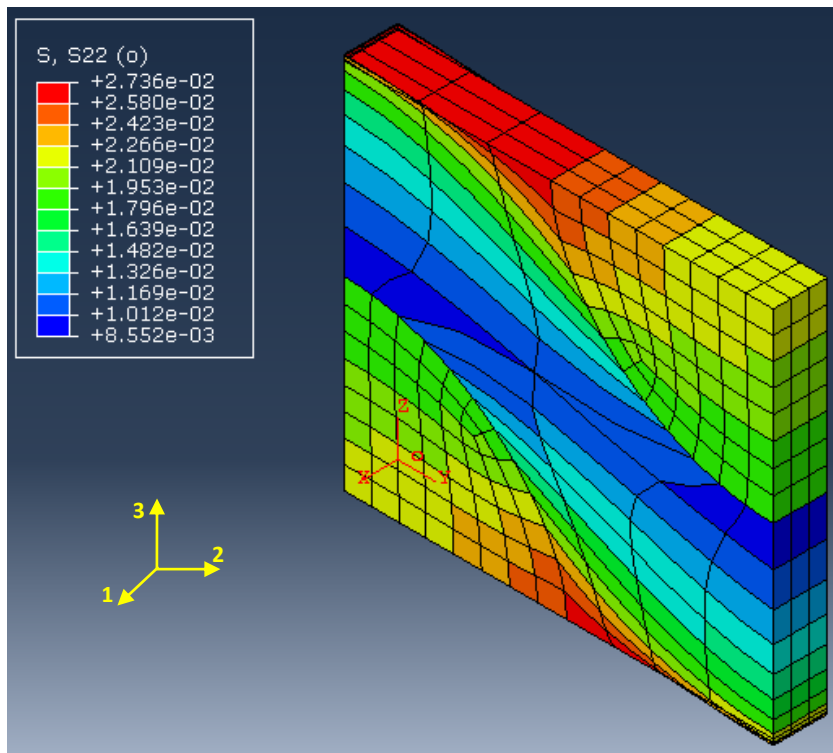


Fig. 3.11: Tensione in direzione 2 per deformazione estensionale unitaria in direzione 2

- Tensione media volumetrica in direzione 3 (Fig. 3.12):

$$C_{23} = \bar{\sigma}_3 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_{3_{elem}} V_{elem} = 9375 \text{ MPa}$$

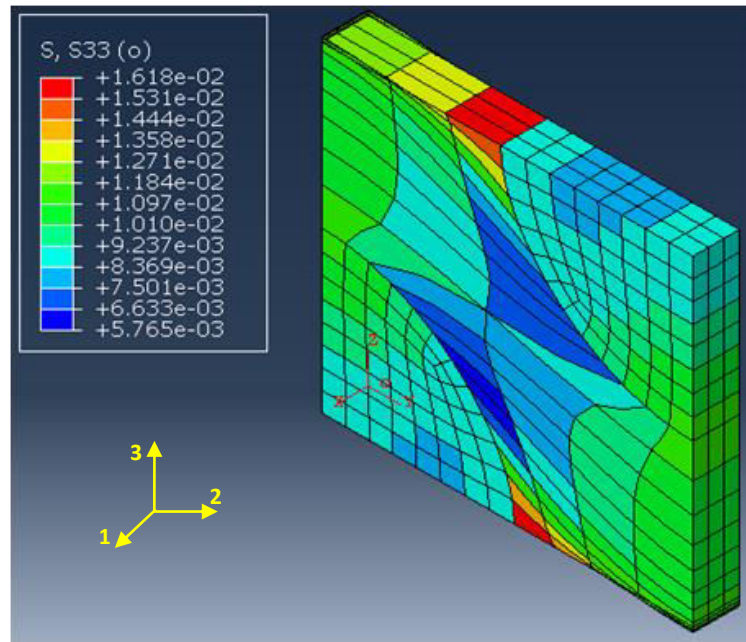


Fig. 3.12: Tensione in direzione 3 per deformazione estensionale unitaria in direzione 2

➤ Calcolo della terza colonna di **C**

A causa dell'isotropia trasversale del materiale, le componenti della terza colonna della matrice **C** potrebbero essere ottenute direttamente da quelle della prima e della seconda colonna senza ulteriori sforzi computazionali. Se si preferisce l'approccio diretto, le condizioni al contorno da imporre per il calcolo delle componenti $C_{\alpha 3}$, con $\alpha = 1,2,3$, sono:

$$\varepsilon_3^0 = 1 \quad \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = \gamma_4^0 = \gamma_5^0 = \gamma_6^0 = 0$$

cioè una deformazione unitaria nella direzione ortogonale alla fibra e parallela al lato lungo dell'RVE.

Le condizioni di spostamento corrispondenti saranno:

$$u_1(a_1, x_2, x_3) = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3$$

$$u_1(0_1, x_2, x_3) = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3$$

$$u_2(x_1, a_2, x_3) = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3$$

$$u_2(x_1, 0, x_3) = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_3 \leq a_3$$

$$u_3(x_1, x_2, a_3) = a_3 \quad 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2$$

$$u_3(x_1, x_2, 0) = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2$$

I coefficienti della colonna 3 saranno a questo punto dati dalla relazione:

$$C_{\alpha 3} = \bar{\sigma}_\alpha = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3) dV$$

Il risultato ottenuto dal modello, cioè la tensione nella direzione della deformazione applicata, è il seguente (Fig. 3.13):

$$C_{33} = \bar{\sigma}_3 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_{3_{elem}} V_{elem} = 18856 \text{ MPa}$$

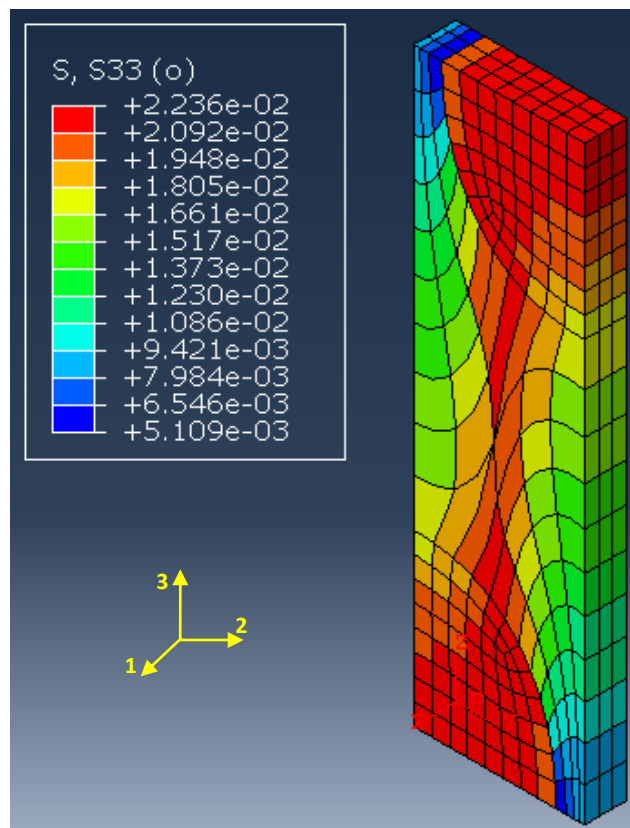


Fig. 3.13: Tensione in direzione 3 per deformazione estensionale unitaria in direzione 3

➤ **Calcolo della quarta colonna di C**

Per un materiale trasversalmente isotropo solo il termine C_{44} è diverso da zero. Questo può essere calcolato in funzione delle altre componenti attraverso l'espressione:

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$$

Tuttavia, se si preferisce l'approccio diretto, bisogna considerare che sia per il calcolo della quarta colonna che della sesta, non è possibile sfruttare la simmetria delle condizioni al contorno ma bisogna far ricorso al modello di RVE completo precedentemente definito.

La necessità di utilizzare il modello completo è dettata dal fatto che, per ottenere la deformazione desiderata, bisogna imporre delle particolari condizioni al contorno in termini di campi di spostamento che sfruttino le cosiddette equazioni di vincolo accoppiate (*coupled constraint equation, CE*). Tali equazioni tendono però a vincolare tutti e 3 i gradi di libertà traslazionali dei nodi posti sulla superficie esterna del volume, pertanto spigoli e vertici non possono essere vincolati dalle condizioni sulle facce poiché risulterebbero sovravincolati. Risulta quindi necessario non includere nelle equazioni delle facce gli spigoli e i vertici, e sviluppare nuovi blocchi di equazioni che definiscano in modo opportuno i campi di spostamento in tali zone al fine di riprodurre la deformazione desiderata.

Per il calcolo delle componenti C_{44} si è quindi imposto per le facce:

$$\gamma_4^0 = \varepsilon_{23}^0 + \varepsilon_{32}^0 = 1 \quad \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 = \gamma_5^0 = \gamma_6^0 = 0$$

cioè una deformazione di scorrimento a taglio unitaria nel piano ortogonale all'asse delle fibre.

Si noti che $\varepsilon_{23}^0 = 1/2$ è applicato tra $x_2 = \pm a_2$ e tra $x_3 = \pm a_3$. Il tutto si traduce nelle seguenti condizioni di spostamento:

$$\begin{aligned} u_1(+a_1, x_2, x_3) - u_1(-a_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_2(+a_1, x_2, x_3) - u_2(-a_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_3(+a_1, x_2, x_3) - u_3(-a_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_2 < x_2 < a_2 \\ -a_3 < x_3 < a_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, +a_2, x_3) - u_1(x_1, -a_2, x_3) &= 0 \\
u_2(x_1, +a_2, x_3) - u_2(x_1, -a_2, x_3) &= 0 \\
u_3(x_1, +a_2, x_3) - u_3(x_1, -a_2, x_3) &= a_3
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 < x_1 < a_1 \\ -a_3 < x_3 < a_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, +a_3) - u_1(x_1, x_2, -a_3) &= 0 \\
u_2(x_1, x_2, +a_3) - u_2(x_1, x_2, -a_3) &= a_2 \\
u_3(x_1, x_2, +a_3) - u_3(x_1, x_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 < x_1 < a_1 \\ -a_2 < x_2 < a_2 \end{cases}$$

Si noti che tali condizioni sono applicate su punti opposti delle facce dell'RVE ma non su spigoli e vertici. Negli spigoli saranno imposte le seguenti condizioni che sono corenti con i campi di spostamento imposte sulle due facce che generano ciascuno spigolo:

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, a_2, x_3) - u_1(-a_1, -a_2, x_3) &= 0 \\
u_2(a_1, a_2, x_3) - u_2(-a_1, -a_2, x_3) &= 0 \\
u_3(a_1, a_2, x_3) - u_3(-a_1, -a_2, x_3) &= a_2
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_3 < x_3 < a_3$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, -a_2, x_3) - u_1(-a_1, a_2, x_3) &= 0 \\
u_2(a_1, -a_2, x_3) - u_2(-a_1, a_2, x_3) &= 0 \\
u_3(a_1, -a_2, x_3) - u_3(-a_1, a_2, x_3) &= -a_2
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_3 < x_3 < a_3$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, x_2, a_3) - u_1(-a_1, x_2, -a_3) &= 0 \\
u_2(a_1, x_2, a_3) - u_2(-a_1, x_2, -a_3) &= a_3 \\
u_3(a_1, x_2, a_3) - u_3(-a_1, x_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_2 < x_2 < a_2$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, x_2, -a_3) - u_1(-a_1, x_2, a_3) &= 0 \\
u_2(a_1, x_2, -a_3) - u_2(-a_1, x_2, a_3) &= -a_3 \\
u_3(a_1, x_2, -a_3) - u_3(-a_1, x_2, a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_2 < x_2 < a_2$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, a_2, a_3) - u_1(x_1, -a_2, -a_3) &= 0 \\
u_2(x_1, a_2, a_3) - u_2(x_1, -a_2, -a_3) &= a_3 \\
u_3(x_1, a_2, a_3) - u_3(x_1, -a_2, -a_3) &= a_2
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_1 < x_1 < a_1$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, a_2, -a_3) - u_1(x_1, -a_2, a_3) &= 0 \\
u_2(x_1, a_2, -a_3) - u_2(x_1, -a_2, a_3) &= -a_3 \\
u_3(x_1, a_2, -a_3) - u_3(x_1, -a_2, a_3) &= a_2
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_1 < x_1 < a_1$$

Le condizioni imposte sui singoli vertici saranno invece coerenti con i campi di spostamento imposti sulle tre facce e i tre spigoli che generano ciascun vertice:

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, a_2, a_3) - u_1(-a_1, -a_2, -a_3) &= 0 \\
u_1(a_1, a_2, a_3) - u_1(-a_1, -a_2, -a_3) &= a_3 \\
u_1(a_1, a_2, a_3) - u_1(-a_1, -a_2, -a_3) &= a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, a_2, -a_3) - u_1(-a_1, -a_2, a_3) &= 0 \\
u_1(a_1, a_2, -a_3) - u_1(-a_1, -a_2, a_3) &= -a_3 \\
u_1(a_1, a_2, -a_3) - u_1(-a_1, -a_2, a_3) &= a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(-a_1, a_2, a_3) - u_1(a_1, -a_2, -a_3) &= 0 \\
u_1(-a_1, a_2, a_3) - u_1(a_1, -a_2, -a_3) &= a_3 \\
u_1(-a_1, a_2, a_3) - u_1(a_1, -a_2, -a_3) &= a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, -a_2, a_3) - u_1(-a_1, a_2, -a_3) &= 0 \\
u_1(a_1, -a_2, a_3) - u_1(-a_1, a_2, -a_3) &= a_3 \\
u_1(a_1, -a_2, a_3) - u_1(-a_1, a_2, -a_3) &= -a_2
\end{aligned}$$

I coefficienti della colonna 4 saranno a questo punto dati dalla relazione:

$$C_{44} = \bar{\sigma}_4 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_4(x_1, x_2, x_3) dV$$

Il risultato ottenuto dal modello, cioè la tensione di taglio risultante, è invece la seguente (Fig. 3.14):

$$C_{44} = \bar{\sigma}_4 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_4 V_{elem} = 4751 \text{ MPa}$$

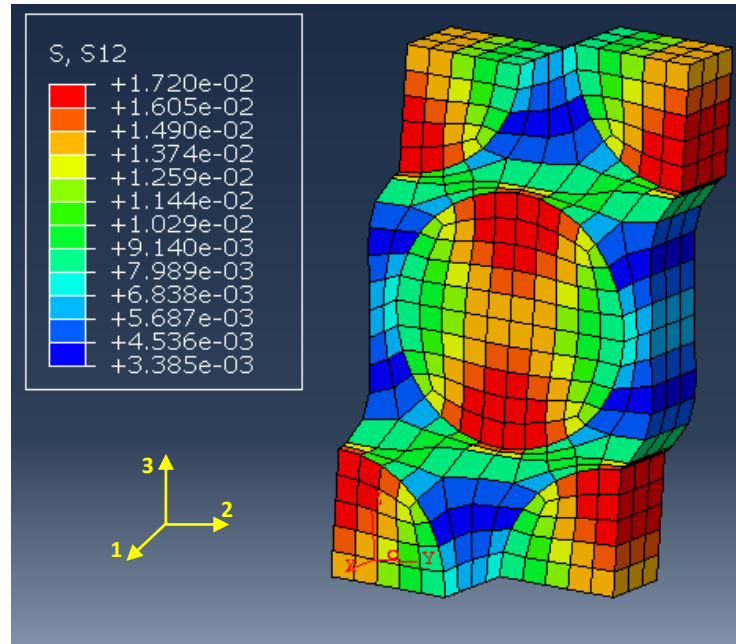


Fig. 3.14: Tensione di taglio in direzione 23 per scorrimento a taglio unitario nel piano 23

➤ **Calcolo della quinta colonna di C**

Per un materiale trasversalmente isotropo solo il termine C_{55} è diverso da zero e uguale a C_{66} . Il suo valore può essere ottenuto quindi dai calcoli effettuati sulla colonna 6.

➤ **Calcolo della sesta colonna di C**

Analogamente a quanto fatto per il calcolo della quarta colonna, le condizioni al contorno devono essere imposte usando equazioni di vincolo accoppiate; per il calcolo delle componenti $C_{\alpha 6}$ si imporrà quindi:

$$\gamma_6^0 = \varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{21}^0 = 1 \quad \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 = \gamma_4^0 = \gamma_5^0 = 0$$

Si noti che $\varepsilon_{12}^0 = 1/2$ è applicato tra $x_1 = \pm a_1$ e tra $x_2 = \pm a_2$. Il tutto si traduce nelle seguenti condizioni di spostamento:

$$\begin{aligned} u_1(+a_1, x_2, x_3) - u_1(-a_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_2(+a_1, x_2, x_3) - u_2(-a_1, x_2, x_3) &= a_1 \\ u_3(+a_1, x_2, x_3) - u_3(-a_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_2 < x_2 < a_2 \\ -a_3 < x_3 < a_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, +a_2, x_3) - u_1(x_1, -a_2, x_3) &= a_2 \\
u_2(x_1, +a_2, x_3) - u_2(x_1, -a_2, x_3) &= 0 \\
u_3(x_1, +a_2, x_3) - u_3(x_1, -a_2, x_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 < x_1 < a_1 \\ -a_3 < x_3 < a_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, +a_3) - u_1(x_1, x_2, -a_3) &= 0 \\
u_2(x_1, x_2, +a_3) - u_2(x_1, x_2, -a_3) &= 0 \\
u_3(x_1, x_2, +a_3) - u_3(x_1, x_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad \begin{cases} -a_1 < x_1 < a_1 \\ -a_2 < x_2 < a_2 \end{cases}$$

Si noti che tali condizioni sono applicate su punti opposti delle facce dell'RVE ma non su spigoli e vertici. Negli spigoli saranno imposte le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, a_2, x_3) - u_1(-a_1, -a_2, x_3) &= a_2 \\
u_2(a_1, a_2, x_3) - u_2(-a_1, -a_2, x_3) &= a_1 \\
u_3(a_1, a_2, x_3) - u_3(-a_1, -a_2, x_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_3 < x_3 < a_3$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, -a_2, x_3) - u_1(-a_1, a_2, x_3) &= -a_2 \\
u_2(a_1, -a_2, x_3) - u_2(-a_1, a_2, x_3) &= a_1 \\
u_3(a_1, -a_2, x_3) - u_3(-a_1, a_2, x_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_3 < x_3 < a_3$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, x_2, a_3) - u_1(-a_1, x_2, -a_3) &= 0 \\
u_2(a_1, x_2, a_3) - u_2(-a_1, x_2, -a_3) &= a_1 \\
u_3(a_1, x_2, a_3) - u_3(-a_1, x_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_2 < x_2 < a_2$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, x_2, -a_3) - u_1(-a_1, x_2, a_3) &= 0 \\
u_2(a_1, x_2, -a_3) - u_2(-a_1, x_2, a_3) &= a_1 \\
u_3(a_1, x_2, -a_3) - u_3(-a_1, x_2, a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_2 < x_2 < a_2$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, a_2, a_3) - u_1(x_1, -a_2, -a_3) &= a_2 \\
u_2(x_1, a_2, a_3) - u_2(x_1, -a_2, -a_3) &= 0 \\
u_3(x_1, a_2, a_3) - u_3(x_1, -a_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_1 < x_1 < a_1$$

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, a_2, -a_3) - u_1(x_1, -a_2, a_3) &= -a_2 \\
u_2(x_1, a_2, -a_3) - u_2(x_1, -a_2, a_3) &= 0 \\
u_3(x_1, a_2, -a_3) - u_3(x_1, -a_2, a_3) &= 0
\end{aligned}
\quad \text{per} \quad -a_1 < x_1 < a_1$$

Le condizioni imposte si traducono nello stato di deformazione presente nella Fig. 3.15 in si riporta una vista dall'alto dell'RVE, guardandolo dal lato positivo di x_3 , e si mostra che i due spostamenti verticali e orizzontali devono essere applicati agli spigoli (indicati con A,B,C e D) per imporre una deformazione a taglio.

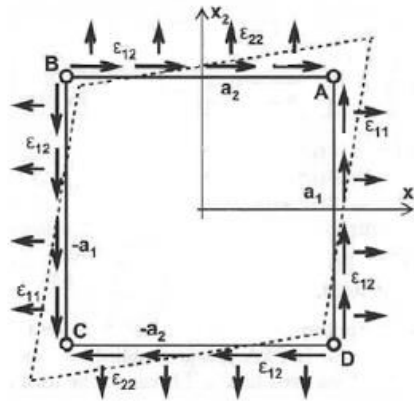


Fig. 3.15: Scorrimento a taglio nel piano 22

Le condizioni imposte sui singoli vertici saranno invece le seguenti:

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, a_2, a_3) - u_1(-a_1, -a_2, -a_3) &= a_1 \\
u_2(a_1, a_2, a_3) - u_2(-a_1, -a_2, -a_3) &= a_2 \\
u_3(a_1, a_2, a_3) - u_3(-a_1, -a_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, a_2, -a_3) - u_1(-a_1, -a_2, a_3) &= a_1 \\
u_2(a_1, a_2, -a_3) - u_2(-a_1, -a_2, a_3) &= a_2 \\
u_3(a_1, a_2, -a_3) - u_3(-a_1, -a_2, a_3) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(-a_1, a_2, a_3) - u_1(a_1, -a_2, -a_3) &= -a_1 \\
u_2(-a_1, a_2, a_3) - u_2(a_1, -a_2, -a_3) &= -a_2 \\
u_3(-a_1, a_2, a_3) - u_3(a_1, -a_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(a_1, -a_2, a_3) - u_1(-a_1, a_2, -a_3) &= -a_1 \\
u_2(a_1, -a_2, a_3) - u_2(-a_1, a_2, -a_3) &= -a_2 \\
u_3(a_1, -a_2, a_3) - u_3(-a_1, a_2, -a_3) &= 0
\end{aligned}$$

Il valore del termine C_{66} si ottiene dall'espressione:

$$C_{66} = \bar{\sigma}_6 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_6(x_1, x_2, x_3) dV \quad \text{con} \quad \gamma_6^0 = 1$$

Il modello fornisce quindi la seguente tensione media di taglio (Fig. 3.16):

$$C_{66} = \bar{\sigma}_6 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \sigma_{6_{elem}} V_{elem} = 4674 \text{ MPa}$$

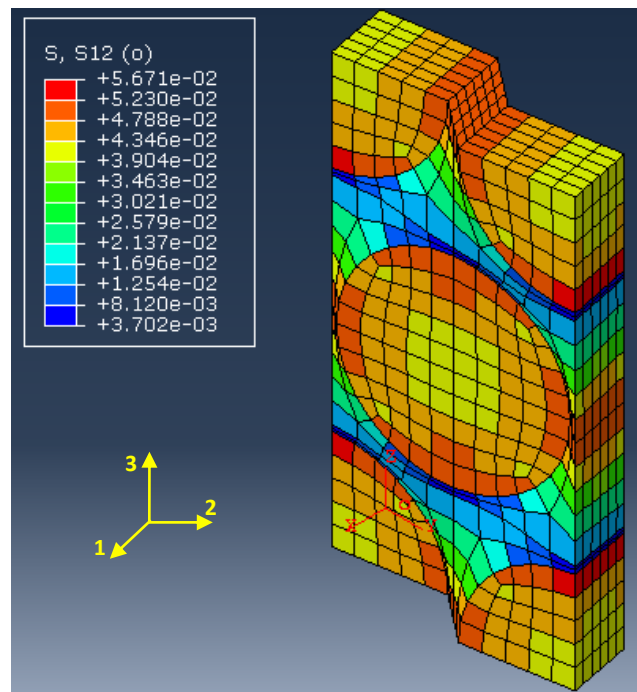


Fig. 3.16: Tensione di taglio in direzione 12 per scorrimento a taglio unitario nel piano 12

A questo punto tutte le proprietà elastiche del materiale composito risultano determinate.

3.4 Calcolo delle costanti elastiche

Una volta note le componenti della matrice \mathbf{C} , le cinque proprietà elastiche del materiale omogeneizzato sono state calcolate attraverso le seguenti relazioni [3]:

$$E_1 = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}$$

$$\nu_{12} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}$$

$$E_2 = [C_{11}(C_{22} + C_{23}) - 2C_{12}^2] \frac{C_{22} - C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}$$

$$\nu_{23} = \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}^2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}$$

$$G_{12} = C_{66}$$

dove:

- E_1 e E_2 sono rispettivamente il modulo di Young longitudinale e quello trasversale;
- ν_{12} e ν_{23} sono rispettivamente il modulo di Poisson longitudinale e quello trasversale;
- G_{12} è la rigidezza a taglio longitudinale.

Infine la rigidezza a taglio nel piano trasversale è stata ottenuta come segue:

$$G_{23} = C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{33}) = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)}$$

3.5 Verifica del modello

I risultati ottenuti dal modello agli elementi finiti sono stati inizialmente comparati con quelli ottenuti dal calcolo analitico fondato sulla Teoria del PMM [11,12]. Tale confronto ha evidenziato l'affidabilità del calcolo basato su FEM, grazie al fatto che i risultati ricavati dalle due procedure sono sostanzialmente identici.

In tabella 3.2 si riportano i risultati ottenuti con i due approcci e l'errore percentuale relativo, definito come:

$$err\% = \frac{X_{fem} - X_{PMM}}{X_{fem}}$$

in cui X è il valore della generica costante elastica.

Costanti elastiche	PMM	Abaqus (FEA)	err%
E_1 [MPa]	45948	45945	0.006
E_2 [MPa]	14029	13991	1.5
G_{12} [MPa]	4693	4674	0.4
G_{23} [MPa]	4798	4751	0.9
ν_{12}	0.267	0.268	0.3
ν_{23}	0.461	0.463	0.4

Tab. 3.2: Confronto PMM-Abaqus sulle costanti elastiche

Sebbene non si disponga di dati sperimentali con cui confrontare i risultati del modello, i bassi valori dell'errore percentuale rispetto ad una delle più valide teorie della micromeccanica garantisce la validità di questo in campo elastico.

Capitolo 4

Teoria della plasticità

4.1 Introduzione

Una volta accertata la validità del modello FEM in campo lineare elastico, si è passati all'analisi delle curve sforzo-deformazione sperimentali dei generici compositi unidirezionali in resina epossidica al fine di riprodurle nella maniera più accurata possibile. I comportamenti non lineari riscontrati hanno reso necessaria l'estensione del modello FEM creato al campo non lineare, introducendo gli effetti della plasticità. Questa permette di descrivere l'insorgere di deformazioni irreversibili all'interno del materiale, accompagnate da una perdita di proporzionalità diretta tra lo stato di tensione e quello di deformazione.

L'obiettivo del presente capitolo è proprio quello di analizzare e comprendere la natura fisica del comportamento non lineare, e di individuare le equazioni da adottare in un'implementazione numerica per la simulazione di tale comportamento. Verrà così affrontata la teoria della plasticità in un modello monodimensionale, per estendere poi la trattazione al modello tridimensionale.

4.2 Analisi delle curve sforzo-deformazione

Il fine ultimo del lavoro è quello di sviluppare un modello capace di riprodurre, nella maniera più fedele possibile, la risposta del materiale composito in esame a generici stati di sollecitazione. E' quindi necessario analizzare preventivamente le risposte sperimentali dei materiali compositi in resina epossidica.

Le curve sforzo-deformazione sperimentali prese oggetto di analisi sono riportate in Fig. 4.1 e si riferiscono al comportamento di una singola lamina di un composito in fibra di carbonio e resina epossidica sollecitato a trazione longitudinale, trazione trasversale e taglio puro [13].

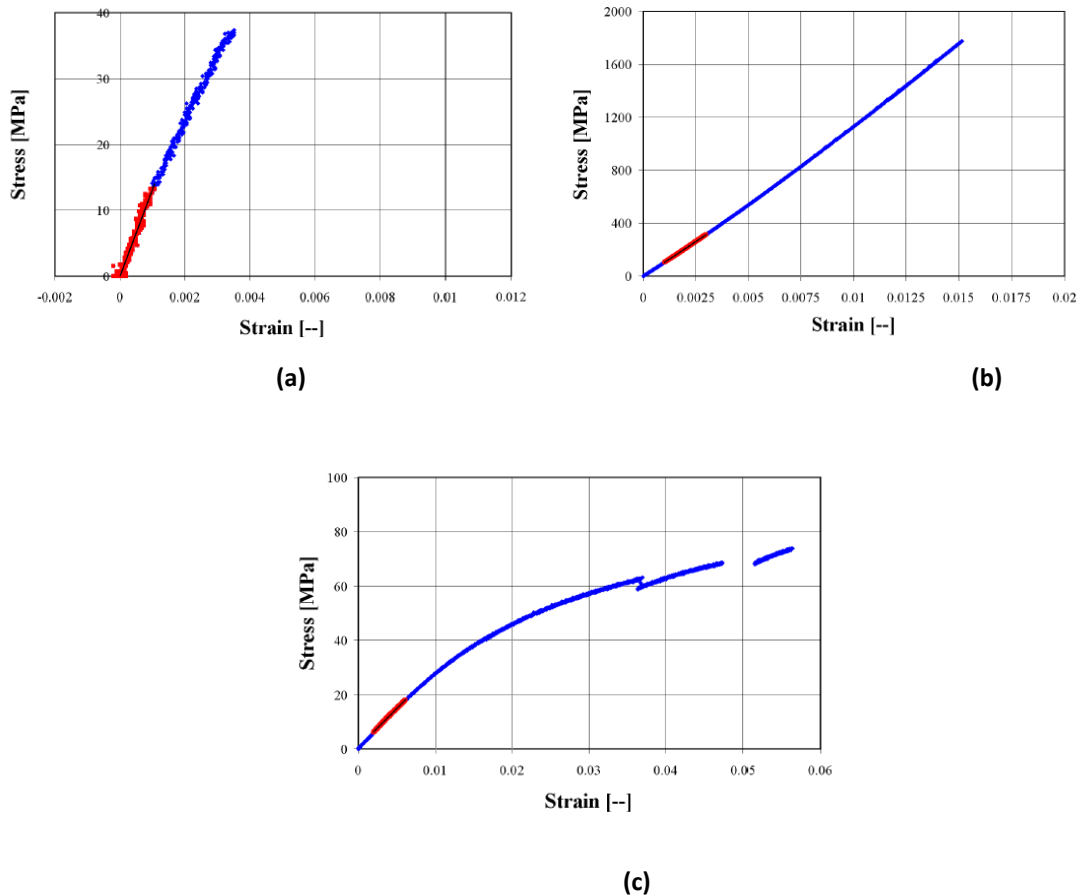


Fig. 4.1: Curve sforzo-deformazione per un materiale composito in resina epossidica:
a) Test a trazione longitudinale b) Test a trazione trasversale c) Test a taglio puro

Dalle figure si evince la presenza di non linearità, specialmente quando il materiale è soggetto a stati di tensione in cui la matrice sopporta gran parte del carico (quali per esempio la trazione trasversale e, soprattutto, il taglio). Alla luce di tali risultati è stato ritenuto opportuno risalire all'origine di simili comportamenti, andando ad analizzare le risposte dei costituenti presi singolarmente. Si può osservare che:

- la **fibra** presenta curve sforzo-deformazione (Fig. 4.2) di tipo prevalentemente elastico lineare sino a rottura ;

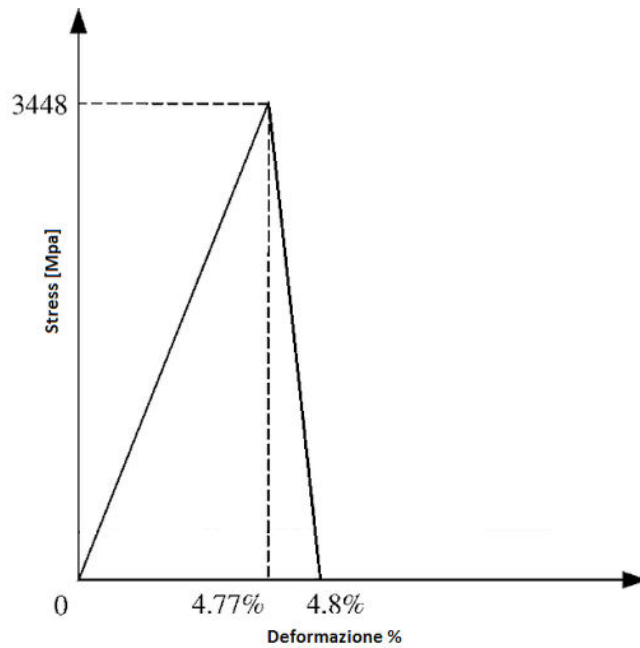


Fig. 4.2: Curva sforzo-deformazione del test a trazione longitudinale per fibra di vetro

- la **matrice** manifesta invece un comportamento isotropo fortemente non lineare come si vede in Fig. 4.3:

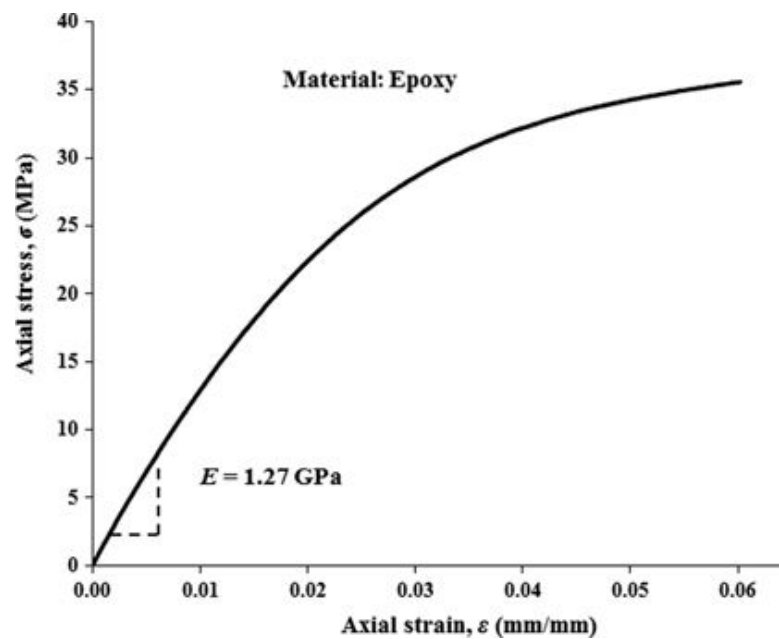


Fig. 4.3: Curva sforzo-deformazione per prova di trazione monoassiale di una resina epossidica

E' naturale quindi ritenere che sia proprio la matrice una delle principali cause del comportamento non-lineare del materiale composito.

La natura delle non linearità all'interno di un materiale polimerico può essere associata a due fenomeni distinti [14]:

- la **visco-elasticità**: meccanismo di perdita di linearità del materiale legato alla velocità di deformazione e al tempo di applicazione del carico, in cui si ha un ritorno alla condizione iniziale al cessare delle sollecitazioni. Un esempio di risposta visco-elastica è riportato in Fig. 4.4.

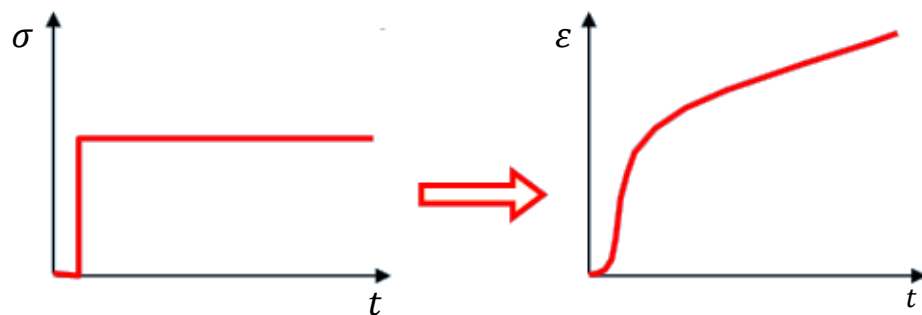


Fig. 4.4: Esempio generico di risposta visco-elastica

- l' **elasto-plasticità**: meccanismo di perdita di linearità del materiale legato al superamento di un suo limite fisico, in cui non si ha un ritorno alla condizione iniziale al cessare delle sollecitazioni. Un esempio generico di risposta elasto-plastica è riportata in Fig. 4.5.

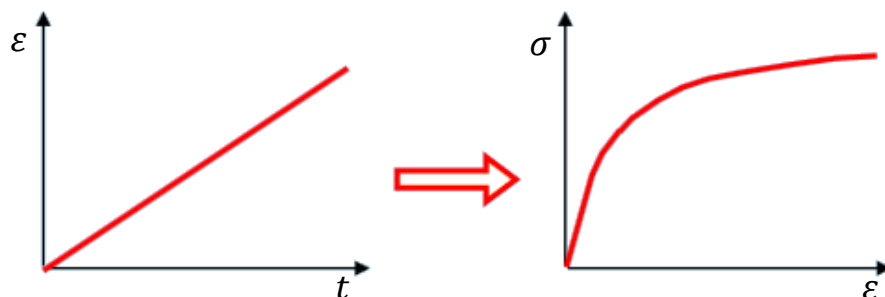


Fig. 4.5: Esempio generico di risposta elasto-plastica

Questi meccanismi tendono solitamente a presentarsi contemporaneamente nella realtà evidenziando la cosiddetta **visco-plasticità**.

Per un'implementazione numerica tuttavia, è generalmente preferibile semplificare il problema utilizzando uno solo dei due meccanismi appena visti. La preferenza dell'uno o dell'altro fenomeno è strettamente correlata al tipo di analisi che si desidera effettuare; questa influisce infatti sull'ordine di grandezza dei gradienti di deformazione che si presentano nel solido. Nel caso in cui si vogliono analizzare risposte dinamiche del materiale su scale temporali molto ridotte, per esempio risposte a impatti, bisognerà prediligere l'aspetto visco-elastico del problema a causa della presenza di forti gradienti di deformazione. Nel caso in esame invece, volendo realizzare un'analisi quasi-statica del fenomeno e, quindi, simulare la risposta a sollecitazioni distribuite su un arco temporale sufficientemente lungo con piccoli gradienti temporali di deformazione, è stata naturale la scelta di un approccio basato su un modello elasto-plastico. Tale scelta ha permesso di trascurare la dipendenza del meccanismo di non linearità dai gradienti di deformazione, pur conservando la dipendenza dalla variabile temporale per la descrizione dell'evoluzione del fenomeno.

4.3 La plasticità

Prima di esplicitare le equazioni fondamentali che governano la teoria della plasticità, è utile analizzare il fenomeno da un punto di vista fisico.

Con il termine di plasticità si fa riferimento ad un meccanismo fisico dotato di "memoria" che determina l'insorgere di deformazioni irreversibili dovute al superamento dei limiti di snervamento.

Si consideri il ciclo di carico e scarico per un generico materiale elasto-plastico (Fig. 4.6).

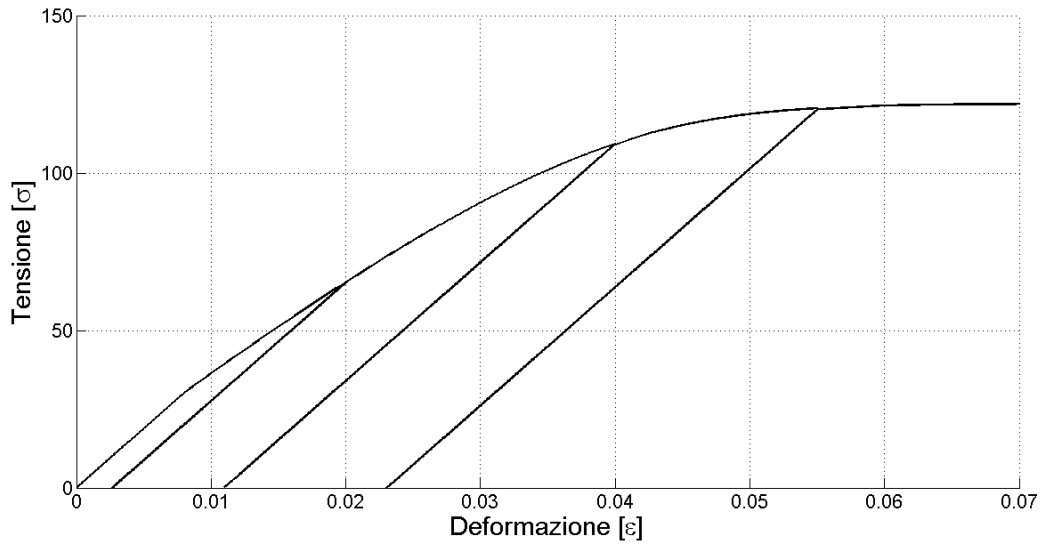


Fig. 4.6: Curva sforzo-deformazione per un ciclo di carico e scarico

L'evoluzione pseudotemporale delle variabili principali del sistema durante tale ciclo è riportata in Fig 4.7.

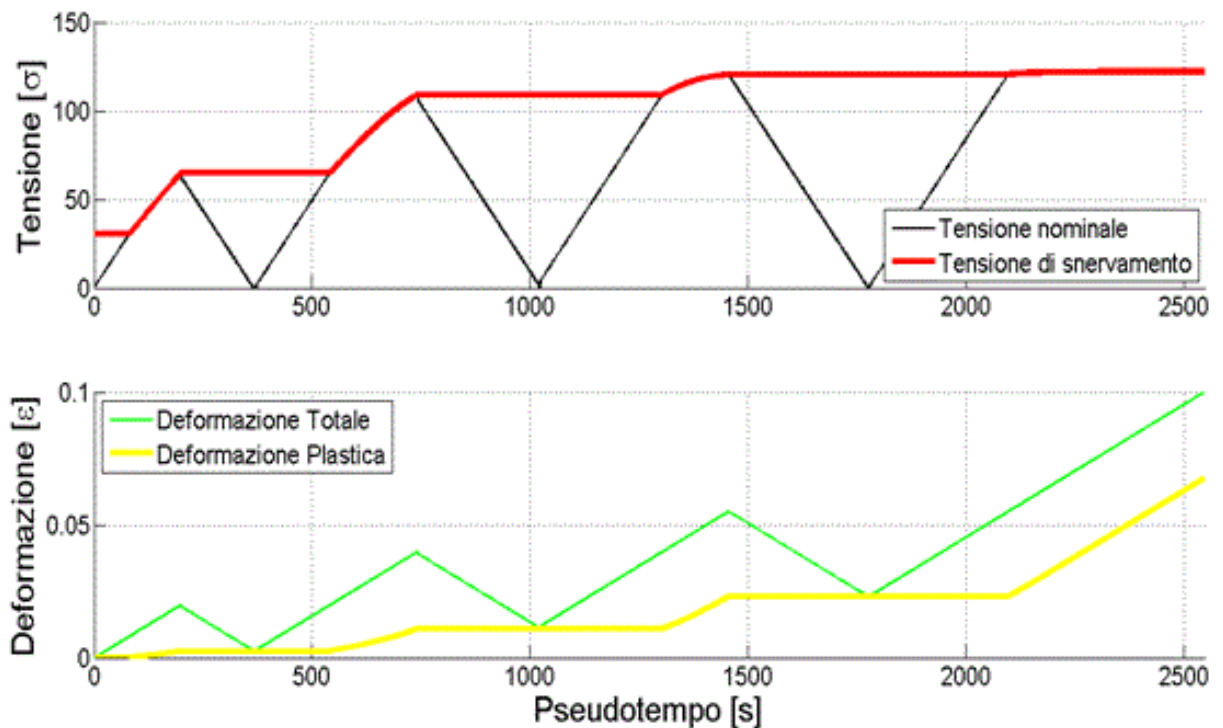


Fig. 4.7: Andamento pseudo temporale delle principali grandezze elasto-plastiche

Il primo grafico di Fig. 4.7 mostra l'“effetto memoria” che contraddistingue il meccanismo di plasticità; si nota infatti che la tensione di snervamento (linea rossa) si mantiene costantemente uguale al massimo valore di tensione raggiunto nel ciclo anche durante la fase di scarico.

Dal secondo grafico si evince invece la natura irreversibile del fenomeno di plasticizzazione; la deformazione plastica (linea gialla) assume infatti un andamento monotono crescente con l'avanzare della plasticizzazione.

Si noti infine come le non linearità legate al progredire della plasticizzazione si manifestano ogni qual volta la tensione nominale (linea nera) eguaglia la tensione di snervamento.

4.4 Equazioni fondamentali della teoria della plasticità perfetta monodimensionale

4.4.1 Concetti fondamentali

Per risalire alle equazioni che governano la teoria della plasticità, si parte da un modello di plasticità perfetta, cioè un modello semplificato in cui non si ha incrudimento.

Si consideri un modello monodimensionale e si valuti cosa accade quando questo è soggetto a carichi esterni; in un qualsiasi stato di equilibrio la sua deformazione totale ε sarà scindibile in [15]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}$$

in cui ε_{el} è la componente elastica e ε_{pl} la componente plastica (Fig. 4.8).

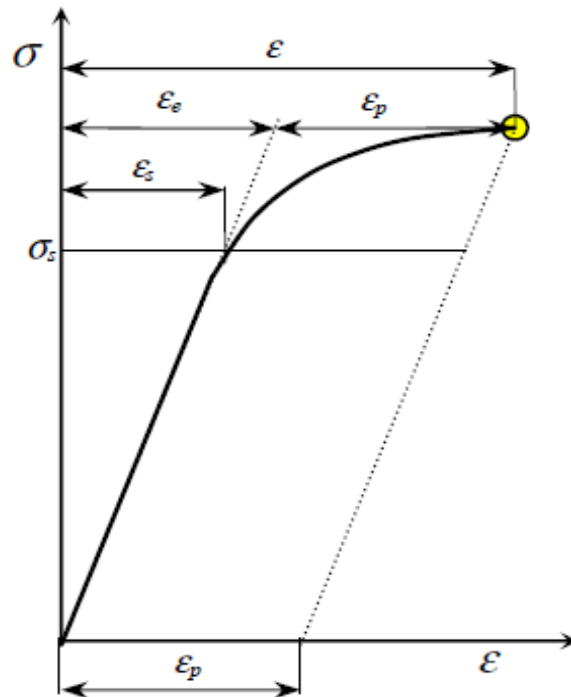


Fig. 4.8: Generica risposta elasto-plastica

Di conseguenza la nota relazione sforzo - deformazione sarà esprimibile come:

$$\sigma = E \varepsilon_{el} \equiv E(\varepsilon - \varepsilon_{pl})$$

Fissate tali relazioni è a questo punto possibile esaminare la risposta meccanica del solido come segue.

4.4.2 Irreversibilità della risposta plastica

Si assuma che ε , ε_{pl} e σ siano funzioni dipendenti da una variabile pseudo-temporale e, in particolare, che per [16]:

$$\varepsilon_{pl} : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$$

sia definibile:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \frac{\partial \varepsilon_{pl}}{\partial t}$$

Si possono dunque avere variazioni nella configurazione del modello solo se $\dot{\varepsilon}_{pl} \neq 0$. Per caratterizzare tali variazioni è necessario effettuare le seguenti assunzioni:

1. La tensione σ non può superare in valore assoluto la tensione di snervamento σ_y ; affinché si abbia uno stato di tensione ammissibile è quindi necessario che il valore di σ ricada nell'intervallo chiuso $[-\sigma_y; \sigma_y]$. Per semplicità con la notazione:

$$\mathbf{E}_\sigma = \{ \sigma \in \mathbf{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \}$$

si indicherà l'insieme delle tensioni ammissibili.

Per ragioni che saranno spiegate in seguito, la tensione σ_y sarà d'ora in poi chiamata *tensione di snervamento*. La funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita come:

$$f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0$$

prenderà invece il nome di *funzione di snervamento*.

2. Se il valore assoluto della tensione applicata è inferiore alla tensione di snervamento non si avranno variazioni di ε_{pl} e, pertanto, $\dot{\varepsilon}_{pl}$ sarà nulla. Questa condizione implica dunque che:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = 0 \text{ se } f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y < 0$$

Considerando anche le relazioni precedenti segue che:

$$f(\sigma) < 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}$$

3. Poiché, dall'assunzione 1, gli stati di tensione tali che $f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y > 0$ sono inammissibili e $\dot{\varepsilon}_{pl} = 0$ per $f(\sigma) < 0$ dall'assunzione 2, una variazione della deformazione ε_{pl} può avere luogo solo se $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0$. Se quest'ultima condizione è verificata, si

assisterà ad uno scorrimento del materiale nella direzione del carico applicato σ con un gradiente di scorrimento costante. Si supponga che $\gamma \geq 0$ sia il valore assoluto del gradiente di scorrimento, allora le precedenti assunzioni fisiche prenderanno la forma:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{pl} = \gamma \geq 0 & \text{se } \sigma = \sigma_y > 0 \\ \dot{\varepsilon}_{pl} = -\gamma \leq 0 & \text{se } \sigma = -\sigma_y < 0 \end{cases} \quad [1]$$

γ è maggiore o uguale a zero a seconda delle condizioni che tengono conto del rateo di deformazione applicato $\dot{\varepsilon}$; queste, identificate con il nome di *condizioni di carico/scarico*, saranno discusse in seguito. Per il momento si nota che le condizioni [1] possono essere assemblate in un'unica equazione:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \text{ se } f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y = 0 \text{ con } \gamma \geq 0 \quad [2]$$

nota come *legge di scorrimento*.

La definizione del gradiente di deformazione plastica può essere derivata alternativamente come:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \gamma \operatorname{sign}(\sigma)$$

ovvero, il gradiente di deformazione corrisponde alla derivata rispetto a σ dalla funzione di snervamento che assume il ruolo di funzione potenziale. Il dominio delle condizioni di tensione ammissibili \mathbf{E}_σ , indicato con $\partial \mathbf{E}_\sigma$, è derivato dalla seguente espressione:

$$\partial \mathbf{E}_\sigma = \{ \sigma \in \mathbf{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0 \}$$

e prende il nome di *limite di snervamento*. Nel presente modello monodimensionale $\partial \mathbf{E}_\sigma$ si riduce a due soli punti pertanto $\partial \mathbf{E}_\sigma = \{-\sigma_y, \sigma_y\}$. Per completare la descrizione del modello resta da determinare la *legge di flusso* $\gamma \geq 0$; questo richiederà l'introduzione di condizioni essenziali che incorporino l'aspetto di irreversibilità caratteristico della risposta fisica del sistema.

4.4.3 Condizioni di carico/scarico

E' stato dimostrato [16] che la valutazione di ε_{pl} può essere effettuata per ogni stato di tensione ammissibile $\sigma \in \mathbf{E}_\sigma$ con la sola equazione [2]:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \gamma \text{sign}(\sigma)$$

tenendo conto che γ e σ sono soggetti ad opportuni vincoli unilaterali.

- σ deve essere ammissibile, cioè $\sigma \in \mathbf{E}_\sigma$, (assunzione 1), e γ deve essere non negativo (assunzione 3). Di conseguenza si richiede che:

$$\gamma \geq 0 \text{ e } f(\sigma) \leq 0 \quad (a)$$

- Dall'assunzione 2 risulta che $\gamma = 0$ se $f(\sigma) < 0$; dall'altra parte, per l'assunzione 3, $\dot{\varepsilon}_{pl} \neq 0$ e, quindi $\gamma > 0$, solo se $f(\sigma) = 0$. Quanto appena detto porta alle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0 \end{cases}$$

Si richiede quindi che:

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (b)$$

Le condizioni *a* e *b* si traducono nei requisiti fisici secondo i quali la tensione deve essere ammissibile e il flusso plastico $\dot{\varepsilon}_{pl}$ può essere diverso da zero solo se la tensione coincide con il limite di snervamento $\partial \mathbf{E}_\sigma$. Queste due condizioni sono note sotto il nome di *condizioni di Kuhn – Tucher*.

- Si esamini ora come evolve nel tempo il fenomeno della plasticità considerando note $\{\varepsilon(t), \varepsilon_{pl}(t)\}$ allo pseudo-tempo $t \in [0, T]$, cosicché anche $\sigma(t)$ sia nota al tempo t grazie alla relazione:

$$\sigma(t) = E(\varepsilon(t) - \varepsilon_{pl}(t))$$

Si definisca il gradiente di deformazione totale $\dot{\epsilon}(t)$ all'istante t e si supponga di essere nel caso in cui:

$$\sigma(t) \in \partial \mathbf{E}_\sigma \Leftrightarrow f(t) := f[\sigma(t)] = 0$$

E' facile dimostrare che $\dot{f}(t) \leq 0$, infatti un valore positivo di $\dot{f}(t)$ implicherebbe che $f(t + \Delta t) > 0$ per $\Delta t > 0$ il che violerebbe la condizione di ammissibilità $f \leq 0$. Inoltre specificando che $\gamma > 0$ solo se $\dot{f}(t) = 0$ e che $\gamma = 0$ se $\dot{f}(t) < 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} \gamma > 0 \Rightarrow \dot{f} = 0 \\ \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

Si ha così una condizione aggiuntiva, dimostrata in letteratura [35]:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (c)$$

Quest'ultima relazione, nota con il nome *condizione di consistenza*, corrisponde al requisito fisico secondo cui per un gradiente di deformazione plastica $\dot{\epsilon}_{pl}$ diverso da zero (cioè per $\gamma > 0$), lo stato di tensione σ deve mantenersi su $\partial \mathbf{E}_\sigma$ di modo che $\dot{f}[\sigma(t)] = 0$.

4.4.4 Flusso plastico

Per il modello monodimensionale, l'espressione di γ , quando la condizione di consistenza è soddisfatta, assume una forma particolarmente semplice [16]. Dalla *regola di derivazione per le funzioni composte* e dalle due relazioni precedentemente viste:

$$\sigma = E \epsilon_{el} \equiv E(\epsilon - \epsilon_{pl}) \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon}_{pl} = \gamma \text{sign}(\sigma)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma) &= \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} E (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl}) \\ &= \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon} - \gamma \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} E \text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

Peraltro:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} |\sigma| = \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$$

Di conseguenza, da quanto appena riportato e ricordando che $[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1$, si può affermare che:

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma)$$

Sostituendo l'espressione di γ così trovata nell'espressione di $\dot{\varepsilon}_{pl}$ si ottiene:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \dot{\varepsilon} \quad \text{per} \quad f(\sigma) = 0, \dot{f}(\sigma) = 0$$

Ciò sta a significare che il gradiente di deformazione totale coincide con il gradiente di deformazione plastico.

In Fig. 4.9 viene mostrato un grafico qualitativo del diagramma sforzo - deformazione per un corpo con comportamento perfettamente plastico.

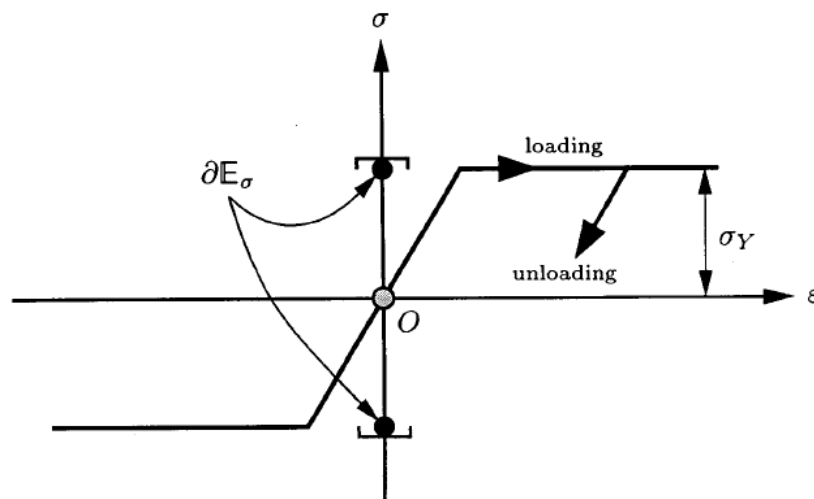


Fig. 4.9: Esempio di curva sforzo-deformazione in plasticità perfetta

4.5 Fenomeno dell'incrudimento

La teoria della plasticità perfetta non riesce a riprodurre in maniera corretta il comportamento delle resine in esame. Analizzando infatti le curve sforzo-deformazione di una tipica resina (fig. 4.10), è facile intuire come, a seguito dell'abbandono del campo elastico, l'andamento delle curve sforzo-deformazione dipende direttamente dalla deformazione a cui è soggetto il materiale [17].

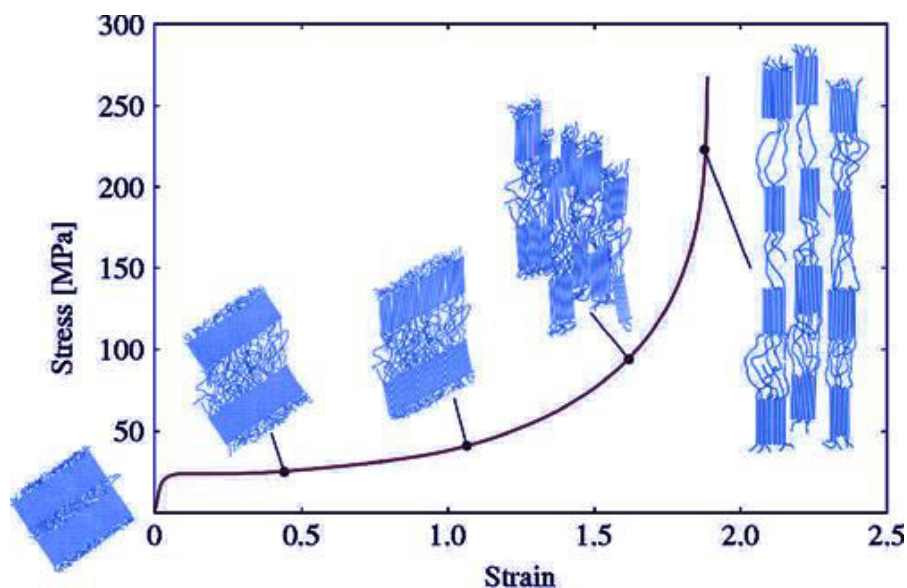


Fig. 4.10: Curva sforzo-deformazione completa per una resina epossidica

Questo comportamento, tipico non solo delle resine ma anche di alcuni dei più comuni metalli, assume il nome di incrudimento, e la sua evoluzione è legata ad una funzione detta legge di incrudimento.

Esistono principalmente due tipi di incrudimento in campo elasto-plastico:

- **Incrudimento isotropo:** espansione o contrazione della superficie/limite di snervamento in funzione della deformazione plastica senza alcuna traslazione o variazione di forma della stessa; la sua rappresentazione nello spazio delle tensioni principali è mostrata in Fig. 4.11.

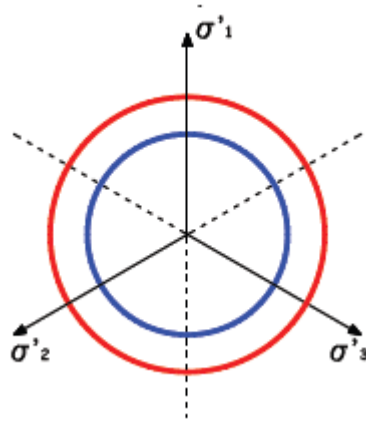


Fig. 4.11: Incrudimento isotropo nello spazio delle tensioni principali

- **Incrudimento cinematico:** traslazione rigida della superficie/limite di snervamento in funzione della deformazione plastica senza alcuna variazione di dimensione e forma; la sua rappresentazione nello spazio delle tensioni principali è riportata in Fig. 4.12.

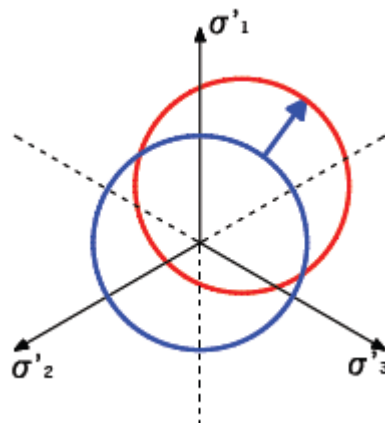


Fig. 4.12: Incrudimento cinematico nello spazio delle tensioni principali

Questi due tipi di incrudimento si manifestano solitamente accoppiati nel cosiddetto incrudimento isotropo/cinematico.

Volendo focalizzare l'attenzione su prove di carico progressivo sino a rottura del materiale, e trascurare la sua risposta ad eventuali sollecitazioni cicliche, è possibile trascurare la componente cinematica dell'incrudimento. Si tratta di una semplificazione resa ragionevole dal fatto che, in questo tipo di analisi, tale componente risulta particolarmente influente.

4.6 Equazioni fondamentali della teoria della plasticità con incrudimento isotropo monodimensionale

Compresa la necessità di definire un modello di incrudimento isotropo capace di riprodurre le curve tipiche di una resina epossidica, si passi alla sua definizione matematica.

La differenza sostanziale tra il modello di plasticità perfetta e quello di plasticità con incrudimento isotropo risiede nel fatto che nel primo, l'intervallo delle tensioni ammissibili E_σ si mantiene costante, mentre nel secondo, E_σ può espandersi in maniera proporzionale alla deformazione plastica accumulata nel corpo, il che porta a curve sforzo-deformazione del tipo mostrato in Fig.4.13:

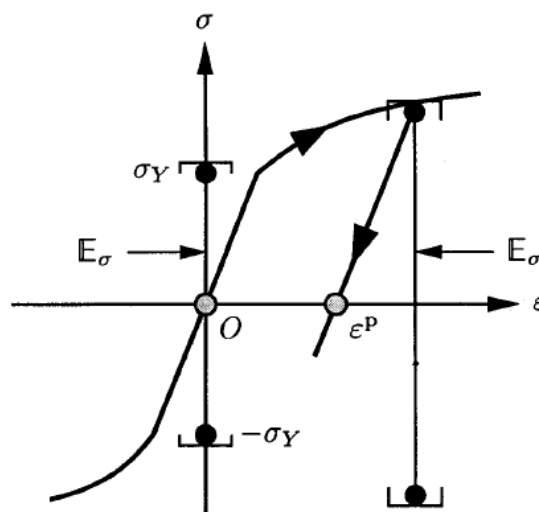


Fig. 4.13: Esempio di curva sforzo-deformazione in presenza di incrudimento

Analogamente a quanto fatto per il modello di plasticità perfetta, si inizierà col considerare la deformazione monodimensionale nella forma [16]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}$$

Di conseguenza la nota relazione sforzo-deformazione sarà ancora esprimibile come:

$$\sigma = E\varepsilon_{el} \equiv E(\varepsilon - \varepsilon_{pl})$$

In questo caso però la condizione di ammissibilità dello stato di tensione \mathbf{E}_σ non è costante, ma deve rispettare le seguenti condizioni:

- l'incrudimento è isotropo nel senso che il centro di \mathbf{E}_σ rimane nell'origine qualunque sia lo stato di sollecitazione applicato;
- l'incrudimento è proporzionale ad una variabile interna del sistema α :

$$\alpha = \text{Variabile interna di plasticità} : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$$

correlata direttamente alla deformazione plastica dalla relazione:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_{pl}|$$

Da queste due condizioni si evince subito che la funzione di snervamento assume la forma:

$$f(\sigma, \alpha) := |\sigma| - [\sigma_y + K(\alpha)] \leq 0$$

dove:

$$K(\alpha) = \text{Legge di incrudimento}$$

La legge di incrudimento $K(\alpha)$ permette di definire l'evoluzione della superficie/limite di snervamento di un solido a seguito di una deformazione plastica e, quindi, di governarne le curve sforzo-deformazione.

Questa variazione della funzione di snervamento fa sì che si abbia una variazione implicita della condizione di ammissibilità descritta dalla seguente relazione:

$$\mathbf{E}_\sigma = \{(\sigma, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \mid f(\sigma, \alpha) \leq 0\}$$

A questo punto, ripercorrendo i passi fondamentali descritti per la plasticità perfetta, si può dimostrare che:

- il meccanismo irreversibile che governa il fenomeno della plasticità è legato alla legge di flusso secondo la relazione:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \gamma \operatorname{sign}(\sigma)$$

- la natura irreversibile del flusso plastico è ancora una volta regolata dalla condizione di carico e scarico di Kuhn-Tucker espressa dalla relazione:

$$\gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

- il fatto che la regola di flusso sia sempre positiva, $\gamma \geq 0$, è governato dalla condizione di consistenza espressa come:

$$\dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

Definite le equazioni che governano il flusso plastico, non rimane che esplicitare la regola di flusso γ ; questa, come visto nel caso della plasticità perfetta, è estrapolabile dalla condizione di consistenza sfruttando la *regola di derivazione per le funzioni composte*:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma, \alpha) &= \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial t} = \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \sigma} E (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl}) + \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \\ &= \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon} - \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon}_{pl} + \frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \end{aligned}$$

in cui:

$$\frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \sigma} = \frac{\partial (|\sigma| - [\sigma_y + K(\alpha)])}{\partial \sigma} = \operatorname{sign}(\sigma)$$

$$\frac{\partial f(\sigma, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial (|\sigma| - [\sigma_y + K(\alpha)])}{\partial \alpha} = \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha}$$

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_{pl}| = |\gamma \operatorname{sign}(\sigma)| = \gamma$$

Ragion per cui la $\dot{f}(\sigma, \alpha)$ si riduce a:

$$\begin{aligned}\dot{f}(\sigma, \alpha) &= E \operatorname{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} - \gamma E \operatorname{sign}(\sigma)^2 - \gamma \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha} \\ &= E \operatorname{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} - \gamma E - \gamma \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha} \leq 0\end{aligned}$$

Una volta giunti alla condizione di snervamento, data la validità della condizione di Khun-Tucker e di quella di consistenza:

$$f(\sigma, \alpha) = 0 \quad e \quad \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

si ricava direttamente il valore della legge di flusso dalla seguente relazione:

$$\gamma = \frac{E \operatorname{sign}(\sigma)}{E + \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha}} \dot{\varepsilon}$$

Sarà dunque possibile definire la variazione di tensione associata alla variazione di deformazione durante un'incipiente plasticizzazione come:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{pl}) = E(\dot{\varepsilon} - \gamma \operatorname{sign}(\sigma)) = E \left(\dot{\varepsilon} - \frac{E \operatorname{sign}(\sigma)}{E + \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha}} \dot{\varepsilon} \operatorname{sign}(\sigma) \right) = \\ &= E \left(\frac{E \dot{\varepsilon} + E \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha} - E \dot{\varepsilon}}{E + \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha}} \right)\end{aligned}$$

Che si riduce alla relazione:

$$\dot{\sigma} = \frac{EK(\alpha)}{E + \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha}} \dot{\varepsilon}$$

dove:

$$\frac{EK(\alpha)\text{sign}(\sigma)}{E + \frac{\partial K(\alpha)}{\partial \alpha}} = \text{Modulo tangente elastoplastico}$$

4.7 Teoria della plasticità tridimensionale

Viste le equazioni fondamentali della teoria della plasticità relative ai casi monodimensionali, si vada ad esaminare cosa accade quando il problema viene esteso al campo tridimensionale.

Le grandezze non sono più semplicemente scalari, ma subentrano più componenti di tensione e deformazione; in particolare, tensioni e deformazioni diventano grandezze tensoriali e, quindi, anche il coefficiente di proporzionalità tra le due si trasforma in un tensore del quarto ordine.

Il concetto finora esaminato di tensione di snervamento si traduce, in campo tridimensionale, in termini di *superficie di snervamento*.

Il primo passo per definire un modello elasto-plastico tridimensionale è, ancora una volta, la scissione di ciascun termine del tensore di deformazione nelle due componenti [18]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}$$

Per calcolare il tensore degli sforzi associato al campo di deformazione, si può sfruttare la matrice di rigidità che lega le due grandezze, ottenendo così:

$$\sigma_{ij} = C_{ijhk} \varepsilon_{hk}^{el} = C_{ijhk} (\varepsilon_{hk} - \varepsilon_{hk}^{pl})$$

dove:

$$C_{ijhk} = \text{Tensore del IV}^\circ \text{ ordine di rigidità}$$

Per verificare che il solido in esame si trovi in campo plastico o elastico, noto il tensore degli sforzi, si dovrà:

- Definire una superficie di snervamento, cioè una superficie che rappresenti nel piano delle tensioni principali la condizione per cui il materiale entra in campo plastico. Tale scelta influenzerà anche il calcolo della tensione equivalente da confrontare con la superficie di snervamento.
- Definire la legge di incrudimento isotropa, cioè una legge che descriva l'espansione della superficie di snervamento dovuta all'incremento delle deformazioni plastiche:

$$K(\alpha) = K(\varepsilon_{ij}^{pl}) \rightarrow \alpha = \alpha(\varepsilon_{ij}^{pl})$$

La conoscenza di questi due elementi permette di calcolare il valore della tensione di snervamento in funzione della deformazione plastica del solido:

$$\sigma_y = \sigma_y(\text{Superficie}, K(\alpha))$$

e, di conseguenza, anche il valore di una *tensione equivalente*, funzione delle componenti tensoriali, da confrontare con quella di snervamento:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_{ij}, \text{Superficie})$$

Le due tensioni vengono poi confrontate tra loro nella cosiddetta *funzione di snervamento* che, in un modello tridimensionale, assume la seguente forma:

$$f(\sigma_{eq}, \sigma_y) = \sigma_{eq} - \sigma_y \leq 0$$

Nel caso in cui ci si trovi in campo elastico, il campo di tensione è espresso dall'equazione costitutiva prima citata. In presenza di deformazioni plastiche invece, è necessario modificare i valori delle variabili del sistema, tenendo conto degli effetti procurati dalla plasticizzazione.

Analogamente a quanto fatto per il caso monodimensionale, è possibile dimostrare la validità sia della condizione di Kuhn-Tucker:

$$\gamma f(\sigma_{eq}, \sigma_y) = 0$$

che della condizione di consistenza:

$$\gamma \dot{f}(\sigma_{eq}, \sigma_y) = 0$$

Grazie a tali condizioni il gradiente di deformazione può essere espresso come:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \gamma \nabla [f(\sigma_{eq}, \sigma_y)] = \gamma \frac{\partial f(\sigma_{eq}, \sigma_y)}{\partial \sigma_{ij}}$$

Tale relazione implica che la deformazione plastica è sempre ortogonale alla funzione di snervamento.

Risolvendo infine l'equazione ricavata dalle condizioni di consistenza, si otterrà il valore della legge di flusso γ , che varia al variare della superficie di snervamento scelta.

Capitolo 5

Superfici di snervamento e leggi di incrudimento per matrici epossidiche

5.1 Introduzione

Nel presente capitolo si illustrano le leggi di incrudimento e i criteri di snervamento maggiormente utilizzati nei modelli numerici predittivi della risposta meccanica dei materiali strutturali. Essi rivestono infatti un ruolo fondamentale nell'ambito della scienza dei materiali e del lavoro oggetto della tesi, poiché permettono di determinare l'evoluzione dei fenomeni plastici. Saranno riportate inoltre le ragioni che hanno portato all'adozione della superficie di snervamento di Von Mises e della legge di incrudimento esponenziale di Voce [19].

5.2 Superfici di snervamento

Quando si parla di superficie di snervamento, si fa riferimento all'equazione di una superficie nello spazio delle tensioni principali che individua le condizioni di innesco della deformazione plastica in un materiale soggetto ad un certo stato di sollecitazione.

La forma matematica più generale con cui è possibile descrivere una superficie di snervamento è la seguente:

$$Y(\sigma_{ij}; \sigma_{Y_k}; \varepsilon_{pl_{ij}}) = 0$$

dove con σ_{ij} si indicano le tensioni, con σ_{Y_k} le proprietà legate al primo snervamento del materiale, e con $\varepsilon_{pl_{ij}}$ le deformazioni plastiche. La

dipendenza della superficie dalla deformazione plastica si traduce nel fatto che, nel corso della plasticizzazione, la superficie cambia forma e dimensioni. Molte sono le superfici di snervamento che si possono creare, ma solo alcune assumono il corretto significato fisico per la descrizione di fenomeni plastici più comuni.

La scelta della superficie più opportuna da prendere a riferimento dipende dal tipo di materiale in esame, e dall'aspetto più significativo della sua risposta meccanica. I criteri variano per esempio a seconda che il materiale assuma un comportamento fragile o duttile; nel caso specifico dei materiali polimerici il comportamento è prevalentemente duttile ma la componente fragile non può essere completamente trascurata.

Nei paragrafi che seguono, si passano in rassegna le superfici di snervamento più utilizzate esplicitandone le equazioni e i principali campi di applicazione.

5.2.1 Superficie di Tresca

Tale criterio, conosciuto anche come *criterio della massima tensione di taglio*, individua nello spazio delle tensioni principali una superficie a forma di prisma (Fig. 5.1) il cui asse coincide con l'asse idrostatico (direzione $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), e la cui sezione retta è un esagono regolare.

La superficie di snervamento è definita attraverso l'equazione [20, 21]:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_{Y_{shear}} = \frac{1}{2} \sigma_Y$$

in cui:

- τ_{max} = tensione tangenziale massima;
- σ_i = tensioni principali in direzione i , con $i = 1,2,3$, corrispondenti agli autovalori del tensore degli sforzi;
- $\sigma_{Y_{shear}}$ = tensione di snervamento a taglio;
- σ_Y = tensione di snervamento a trazione monoassiale.

Dalla relazione suddetta si evince che tale criterio assume, come parametro determinante, la tensione tangenziale massima, e si ha snervamento quando questa eguaglia un valore limite.

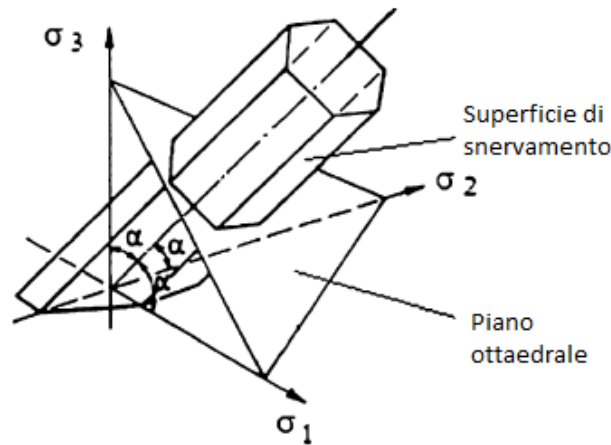


Fig. 5.1: Superficie di snervamento di Tresca nello spazio delle tensioni principali

Tale criterio è indipendente dalla pressione idrostatica ed è utilizzabile nel caso di materiali isotropi duttili con uguale resistenza sia a trazione che a compressione; ciò lo rende particolarmente adatto all'analisi del comportamento dei metalli.

In ambito computazionale la superficie di Tresca non trova un largo impiego; esso risulta infatti molto simile al criterio di Von Mises il quale, essendo caratterizzato da una più semplice rappresentazione del dominio elastico, viene spesso preferito.

5.2.2 Superficie di Von Mises

Tale criterio, individua nello spazio delle tensioni principali una superficie a forma di cilindro di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$ il cui asse coincide con l'asse idrostatico (direzione $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), e la cui sezione retta è un cerchio che risulta circoscritto all'esagono di Tresca (come mostrato in Fig. 5.2) [21].

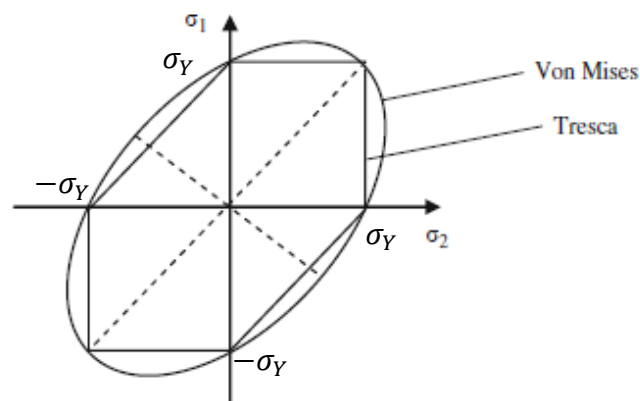


Fig. 5.2: Confronto tra il criterio di Von Mises e quello di Tresca

Il criterio di Von Mises è molto simile a quello di Tresca, infatti anch'esso fa riferimento a materiali duttili con uguale resistenza a trazione e a compressione, e non tiene assolutamente conto della componente idrostatica del tensore degli sforzi.

La superficie di snervamento, riportata nello spazio delle tensioni principali in figura 5.3, è definita attraverso l'equazione [21, 22]:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2$$

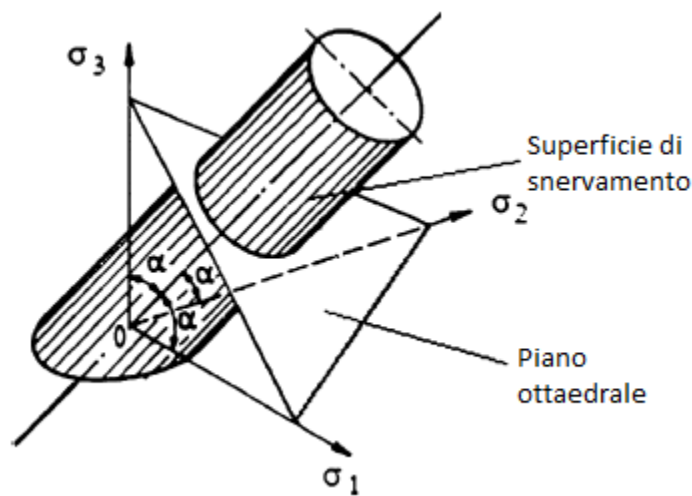


Fig. 5.3: Superficie di snervamento di Von Mises nello spazio delle tensioni principali

Tale relazione permette di definire la tensione equivalente σ_{vm} (detta di Von Mises) per lo stato di tensione triassiale da confrontare con quella di snervamento:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

che, espressa nelle singole componenti di tensione diventa:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)]}$$

Pertanto il parametro di riferimento risulta essere il secondo invariante della parte deviatorica del tensore delle tensioni J_2 .

Il criterio di Von Mises è conosciuto anche come *criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale*, in quanto la relativa condizione di snervamento può essere interpretata come il raggiungimento di un valore limite della tensione tangenziale ottaedrale (τ_{oct}):

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2}$$

cioè la componente della tensione sul piano ottaedrale (piano equiorientato rispetto alle tre direzioni principali).

5.2.3 Superficie di Mohr – Coulomb

Tale criterio individua una superficie a forma di piramide a base esagonale irregolare il cui asse coincide con l'asse idrostatico (Fig. 5.4).

La superficie di snervamento è definita attraverso le equazioni che definiscono nel piano delle tensioni principali le sei facce della piramide [23]:

$$|\sigma_i - \sigma_k| - (\sigma_i + \sigma_k)\sin\varphi - 2c \cdot \cos\varphi = 0 \quad \text{per } i, k = 1, 2, 3$$

In cui c è il parametro di coesione e φ l'angolo di attrito interno.

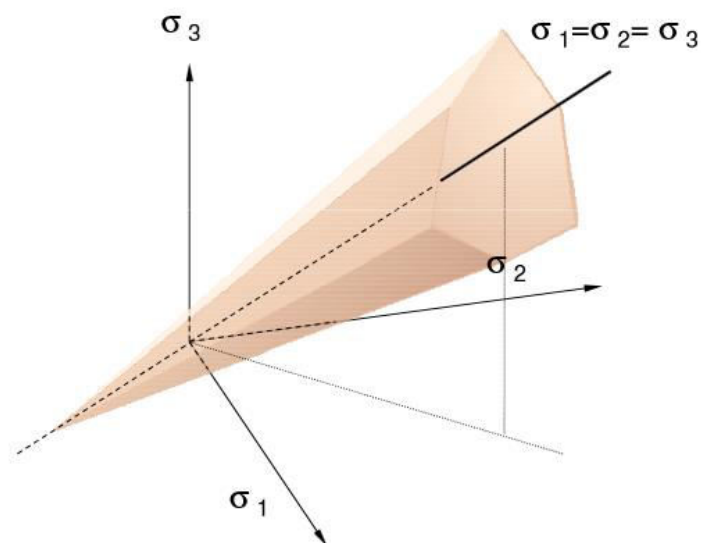


Fig. 5.4: Superficie di snervamento di Mohr-Coulomb nello spazio delle tensioni principali

Il criterio di Mohr – Coulomb ha il vantaggio di poter tener conto di un diverso comportamento tra la trazione e la compressione, e ciò fa sì che particolarmente idoneo per materiali quali il calcestruzzo e terreni.

Tuttavia, analogamente al criterio di Tresca, esso presenta sugli spigoli delle forti discontinuità nella superficie, il che ne rende difficile l'implementazione numerica.

5.2.4 Superficie di Drucker – Prager

Tale criterio individua una superficie a forma di cono il cui asse coincide con l'asse idrostatico, come riportato in Fig. 5.5.

L'equazione che descrive la superficie di snervamento può essere scritta in termini di tensioni principali come [24]:

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

dove A e B sono proprietà del materiale definite dalle seguenti espressioni:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_{Y_c} \sigma_{Y_t}}{\sigma_{Y_c} + \sigma_{Y_t}} \right) \quad B = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_{Y_t} - \sigma_{Y_c}}{\sigma_{Y_c} + \sigma_{Y_t}} \right)$$

in cui σ_{Y_c} e σ_{Y_t} sono rispettivamente la tensione di snervamento a compressione e a trazione. Si noti come riscrivendo l'equazione della superficie di Drucker – Prager in termini di invarianti del tensore degli sforzi e di quello deviatorico, essa si presenta come:

$$\sqrt{J_2} = A + BI_1$$

in cui I_1 è la traccia del tensore degli sforzi.

Da questa relazione si deduce immediatamente la dipendenza di tale criterio dalla pressione e, quindi, dalla componente idrostatica del tensore degli sforzi.

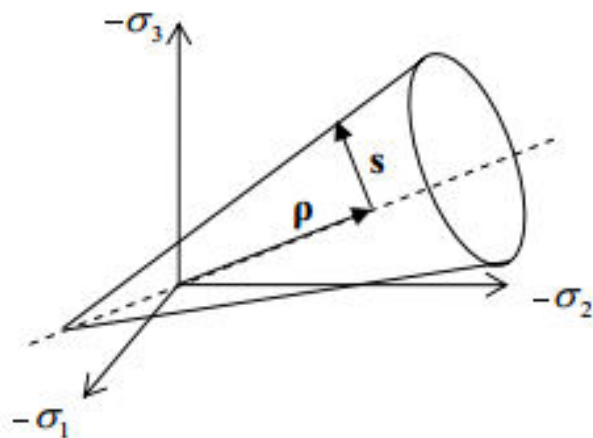


Fig. 5.5: Superficie di snervamento di Drucker - Prager nello spazio delle tensioni principali

Analogamente a quanto avviene nella superficie di Mohr – Coulomb, si nota che all’incremento della pressione idrostatica si ha un aumento della resistenza a taglio.

Il seguente criterio può essere inteso come una versione priva di discontinuità sugli spigoli (ma non sul vertice) del criterio di Mohr – Coulomb, infatti oltre ad avere il vantaggio di poter descrivere un diverso comportamento tra lo stato di trazione e quello di compressione nel solido, può anche essere implementato più semplicemente nei codici di calcolo.

Il criterio di Drucker – Prager trova largo impiego in materiali come rocce, polimeri e calcestruzzo, cioè materiali il cui comportamento è influenzato dalla componente idrostatica del tensore degli sforzi.

5.2.5 Superficie di Tschoegl

Tale criterio individua una superficie di forma parabolica con asse coincidente con l’asse idrostatico, come mostrato in Fig. 5.6.

L’equazione che descrive la superficie di snervamento può essere scritta in funzione delle tensioni principali come segue [25]:

$$6[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\sigma_{Yc}\sigma_{Yt}$$

che in termini di invarianti diventa:

$$6J_2 + 2I_1(\sigma_{Yc} - \sigma_{Yt}) = 2\sigma_{Yc}\sigma_{Yt}$$

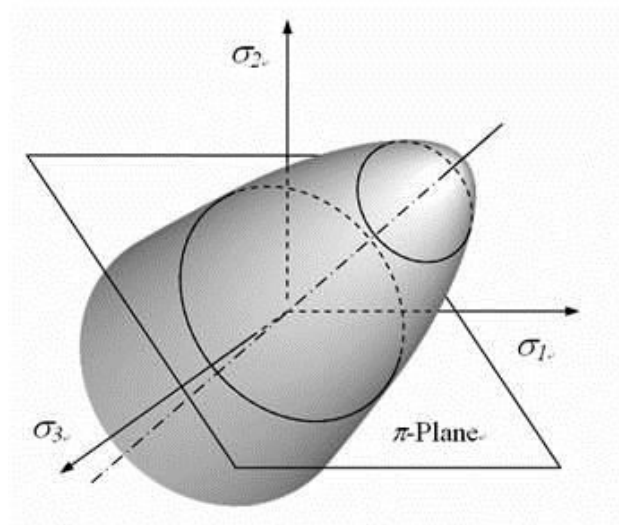


Fig. 5.6: Superficie di snervamento di Tschoegl nello spazio delle tensioni principali

Tale superficie, analoga a quella di Drucker – Prager, ha inoltre il vantaggio di non avere discontinuità il che la rende preferibile nell'ambito di calcoli numerici.

5.3 Scelta della superficie di snervamento per il modello numerico

La superficie di snervamento scelta per l'implementazione numerica del modello è quella di Von Mises. Sebbene tale superficie venga preferibilmente impiegata nel caso di materiali duttili come i metalli, è comunque utilizzabile nell'ambito di materiali polimerici qualora si voglia esaminare il solo comportamento a taglio.

Il vantaggio di usare il criterio di Von Mises non risiede solo nella sua capacità di cogliere il comportamento duttile dei materiali, ma anche nella sua semplice implementazione numerica. Inoltre a questi aspetti si aggiunge il fatto che, tra tutte le superfici sopracitate, questa è quella caratterizzata da una più immediata interpretazione dei risultati, poiché facilmente verificabili grazie all'esperienza pregressa nel campo dei materiali metallici.

Tuttavia la scelta della superficie di Von Mises comporta anche degli svantaggi, in quanto non permette di distinguere la tensione di snervamento

tra il caso di trazione e quello di compressione; inoltre, non tiene conto della componente idrostatica del tensore degli sforzi. Quest'ultimo aspetto è di rilevante importanza e non dovrebbe essere trascurato, poiché è stata verificata sperimentalmente la sensibilità dei materiali compositi a detta componente idrostatica. Da tale punto di vista sarebbe quindi preferibile la scelta della superficie di Tschoegl, ma i contro inerenti la più difficile implementazione e comprensione dei risultati, ci hanno indotto a riserVARLA per gli sviluppi futuri.

5.4 Leggi di incrudimento

Quando si parla di legge di incrudimento si fa riferimento alla legge fisica che governa la crescita della tensione di snervamento in funzione della deformazione plastica. La notazione utilizzata per identificare tale legge è la seguente:

$$K(\alpha) = \text{legge di incrudimento}$$

dove α è la variabile interna di plasticità. Tale variabile è associata al gradiente di deformazione plastica secondo la relazione:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_{pl}| = \dot{\gamma}$$

α sarà quindi nulla fino a che non insorgeranno deformazioni plastiche nel solido ovvero non si avrà il superamento del primo limite di snervamento σ_Y . Si potrà in generale definire la legge che descrive l'evoluzione della tensione di snervamento nella forma:

$$\sigma_Y(\alpha) = \sigma_{Y_0} + K(\alpha)$$

In letteratura esistono molte e diverse leggi di incrudimento sviluppate nel tempo da vari autori, ma in questa sede si focalizzerà l'attenzione solo su quelle che risultano più appropriate per le resine epossidiche; per farlo si riportano in Fig. 5.7 i risultati sperimentali prodotti da B. Fiedler [26], ottenuti da prove condotte su provini di resina soggetti a diverse condizioni di carico.

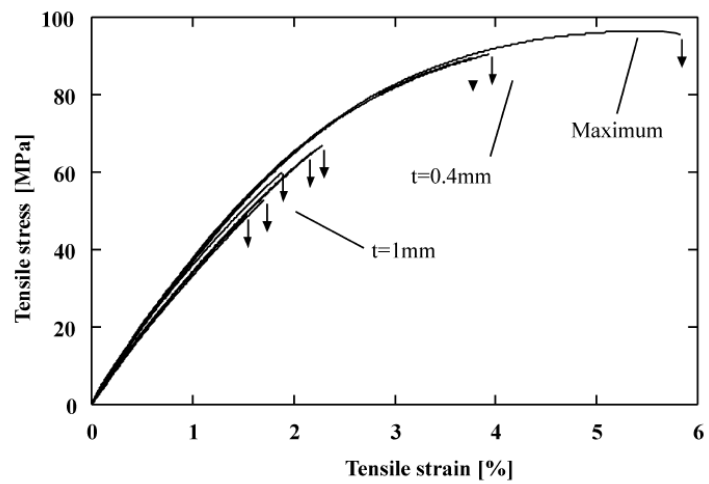
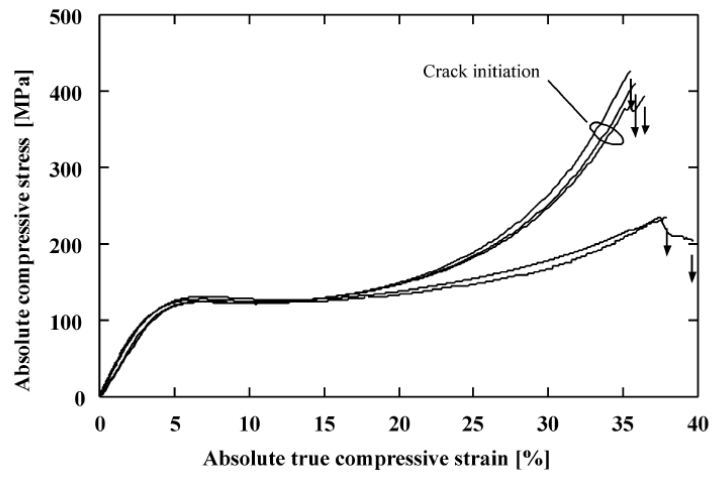
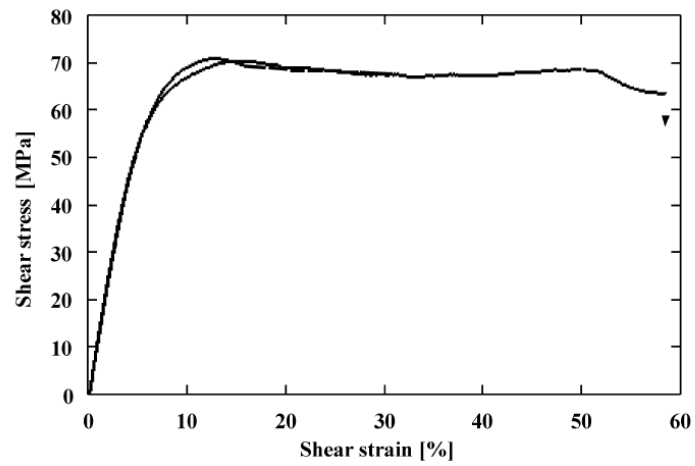


Fig. 5.7: Curve sforzo-deformazione sperimentali al variare dello spessore per resina epossidica soggetta a diverse condizioni di carico: a) Compressione b) Taglio c) Trazione

In tali curve è possibile osservare come, dopo il superamento del tratto lineare, si abbia un fenomeno di perdita di linearità progressiva fino al raggiungimento di una tensione di saturazione; da questo punto in poi le tensioni tendono a mantenersi praticamente costanti sebbene la deformazione plastica continui a incrementare. Questo andamento non si verifica però nel caso delle prove a compressione per i provini di elevato spessore, per i quali si osserva un incremento delle tensioni anche nel tratto conclusivo. Nel modello che s'intende sviluppare quest'ultimo comportamento verrà trascurato, in quanto complicherebbe notevolmente lo schema di calcolo senza fornire alcun beneficio in termini di risultati (si tratta infatti di un fenomeno che si manifesta solo per tensioni molto elevate rispetto a quelle di impiego della resina una volta inserita nel composito).

Le leggi di incrudimento analizzate per la descrizione della risposta della resina epossidica sono:

- Legge di Ramberg – Osgood
- Legge esponenziale di Voce

5.4.1 Legge di Ramberg – Osgood

La legge di Ramberg – Osgood è una legge di incrudimento [27] sviluppata per descrivere il comportamento non lineare delle curve sforzo-deformazione di materiali metallici in cui si ha una transizione graduale dalla zona elastica a quella plastica.

La sua forma originale esprime la deformazione totale del materiale come:

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{R-O} = \frac{\sigma}{E} + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$$

dove:

- ε_{tot} = *deformazione totale*
- ε_{el} = *deformazione elastica*
- ε_{R-O} = *deformazione plastica di Ramberg – Osgood*
- σ = *tensione*
- E = *modulo di Young*
- K e n = *costanti che dipendono dal materiale*

In Fig. 5.8 si riportano le componenti elastica lineare ed esponenziale con tratto discontinuo, e la curva risultante di Ramberg – Osgood con tratto continuo.

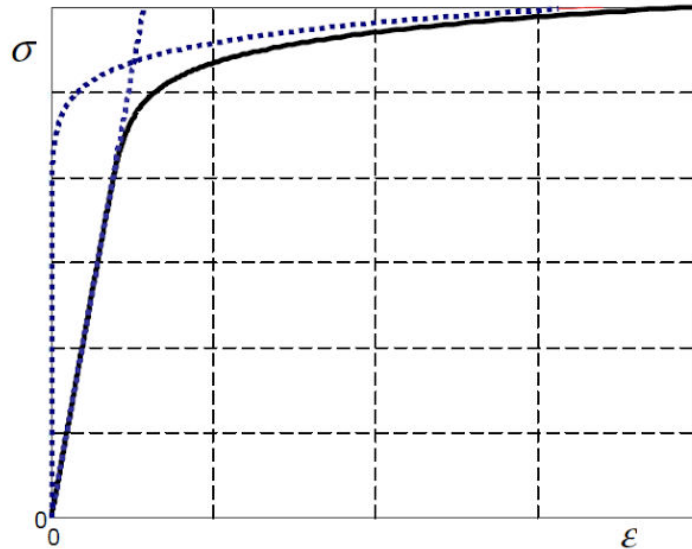


Fig. 5.8: Tipica curva sforzo – deformazione con legge di incrudimento di Ramberg - Osgood

Secondo tale legge la componente plastica di Ramberg – Osgood tenderebbe a presentarsi sin da subito ma, poiché ha valori trascurabili fino al superamento della prima tensione di snervamento del materiale, è ragionevole pensare che questa subentri solo quando si entra in campo plastico. Grazie a tali considerazioni, la legge di Ramberg – Osgood può essere espressa come:

$$K(\alpha) = C \cdot \alpha^n$$

in cui C e n sono costanti del materiale.

5.4.2 Legge esponenziale di Voce

La legge di Voce [19] è una legge esponenziale sviluppata per descrivere l'andamento non lineare delle curve sforzo-deformazione dei metalli, sottolineando il fatto che un materiale non può presentare resistenza indefinita a deformazioni molto grandi. Tale modello infatti, a differenza del

precedente, prevede una saturazione della tensione a seguito di importanti deformazioni plastiche, il che fornisce risultati più realistici.

L'espressione matematica della legge di incrudimento di Voce è:

$$K(\alpha) = (\sigma_u - \sigma_{Y_0})(1 - e^{-\delta\alpha})$$

dove σ_u è la tensione di saturazione della condizione di snervamento, e δ è un valore caratteristico associato alla deformazione, che determina la forma della curva della legge di incrudimento (Fig. 5.9).

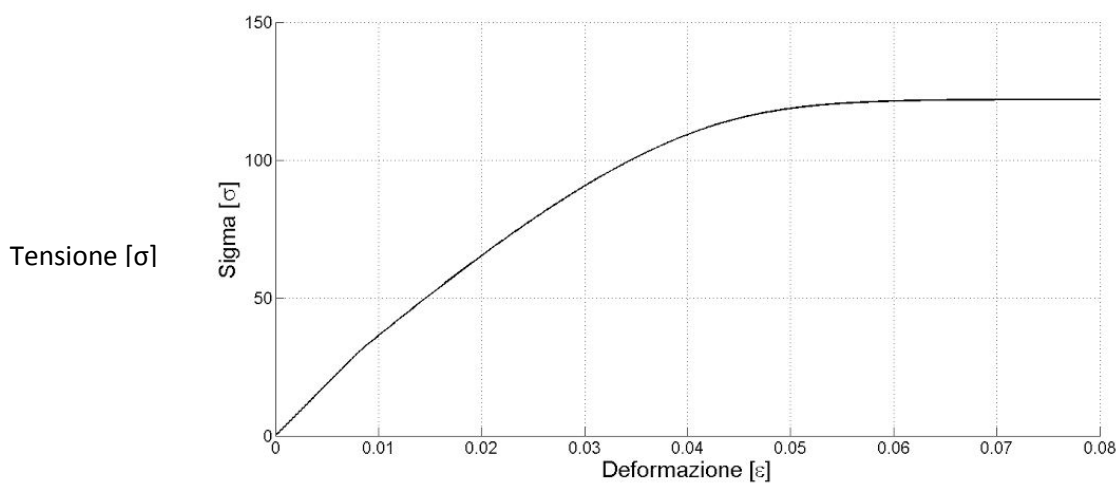


Fig. 5.9: Tipica curva sforzo – deformazione con legge di incrudimento di Voce

5.5 Scelta della legge di incrudimento per il modello numerico

Da quanto appena riportato si evince che, sebbene entrambe le leggi di incrudimento riproducano abbastanza fedelmente il primo tratto di non linearità nella risposta delle resine epossidiche, la legge di Ramberg – Osgood tende a riprodurre un incrudimento indefinito nel campo delle grandi deformazioni, mentre la legge di Voce permette di cogliere il fenomeno della saturazione della tensione. La scelta è quindi ricaduta su quest'ultima proprio a causa della sua capacità di riprodurre in modo affidabile le curve sforzo - deformazione nella loro totalità e, soprattutto, nel range delle deformazioni di esercizio della resina epossidica una volta inserita nel composito.

Capitolo 6

Implementazione numerica della teoria della plasticità

6.1 Introduzione

Nel presente capitolo si focalizzerà l'attenzione sulla discretizzazione numerica delle equazioni differenziali che governano il meccanismo fisico della plasticità, e sulla possibile applicazione di queste ad un modello tridimensionale.

Si riporteranno in particolare i risultati ottenuti per un particolare modello di plasticità implementato mediante il software MATLAB. Tale approccio è stato sviluppato per i casi che adottano la superficie di Von Mises come superficie di snervamento, al fine di ottenere una soluzione delle equazioni della plasticità senza incorrere in particolari problemi di singolarità numeriche; lo schema di seguito riportato sarà quindi caratterizzato da semplificazioni peculiari derivanti della scelta del criterio di Von Mises.

6.2 Modello numerico per l'incrudimento isotropo non lineare

La struttura base di un programma di calcolo, che riproduca il comportamento elasto-plastico di un generico materiale, si compone dei seguenti blocchi fondamentali [16]:

- **Ciclo principale:** macrociclo con cui si verifica la condizione di plasticità e si calcolano le variabili di uscita.

- **Algoritmo di ritorno radiale:** sottoparte del ciclo principale che permette di modificare le variabili del modello qualora si abbia il superamento del limite elastico.
- **Ciclo correttivo elasto-plastico:** microciclo annidato nell'algoritmo di ritorno radiale, in cui si ha la correzione vera e propria dei parametri legati alla plasticità.

Nel seguente diagramma di flusso (Fig. 6.1) si riporta in breve la struttura del modello numerico utilizzato:

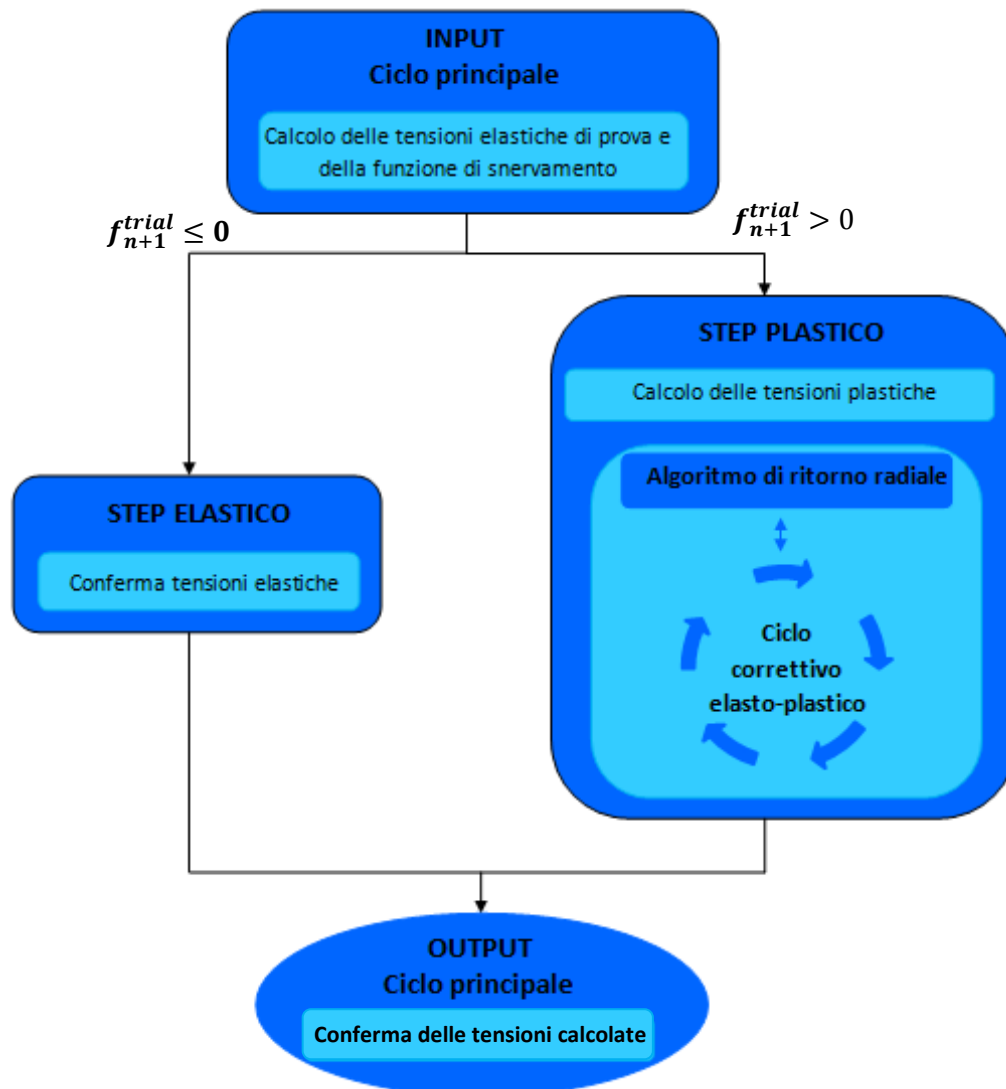


Fig. 6.1: Diagramma di flusso del modello numerico elastoplastico

Si passa ora all'analisi dettagliata dei singoli blocchi e delle loro interazioni.

6.2.1 Ciclo principale

Il ciclo principale permette di stabilire quando si raggiunge la condizione di snervamento in un solido e, una volta raggiunta, di calcolare le variabili in uscita dal sistema; all'interno del macrociclo è incluso l'algoritmo di ritorno radiale, il quale interviene solo in caso di avvenuta plasticizzazione.

Il punto di partenza del macrociclo è la definizione del campo di deformazione totale per un generico incremento [16]:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$$

Si passa poi al calcolo della sola parte deviatorica attraverso l'espressione:

$$\varepsilon_{n+1}^{dev} = \varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3}tr(\varepsilon_{n+1})I$$

in cui con I si indica la matrice identità.

La componente elastica del tensore di deformazione deviatorico si ottiene sottraendo, componente per componente, la parte deviatorica del tensore di deformazione plastica ε_{pl} (se diverso da zero) a quella del tensore di deformazione totale:

$$\varepsilon_{n+1}^{dev,el} = \varepsilon_{n+1}^{dev} - \varepsilon_n^{dev,pl}$$

dove:

$$\varepsilon_n^{dev,pl} = \varepsilon_n^{pl} - \frac{1}{3}tr(\varepsilon_n^{pl})I$$

Una volta nota questa grandezza, è possibile calcolare un valore di primo tentativo delle componenti deviatoriche del tensore degli stress, considerando il solido come caratterizzato da un comportamento puramente elastico. Si ottiene quindi:

$$\sigma_{n+1}^{dev,trial} = 2G\varepsilon_{n+1}^{dev,el} = 2G(\varepsilon_{n+1}^{dev} - \varepsilon_n^{dev,pl})$$

A questo punto la validità della condizione di plasticità può essere verificata mediante l'introduzione di una tensione equivalente, definita per comodità come:

$$\sigma_{eq} = \left\| \sigma_{n+1}^{dev,trial} \right\|$$

in cui con il simbolo $\|x\|$ si indica la norma quadra di una matrice definita come:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$$

La tensione così calcolata dovrà essere confrontata con la tensione di snervamento, come previsto dal criterio di Von Mises e dalla legge di incrudimento scelta.

Il valore della funzione di snervamento sarà dato dalla seguente espressione:

$$f_{n+1}^{trial} = \left\| \sigma_{n+1}^{dev,trial} \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_y + K(\alpha_n) \right)$$

E' da notare come alla norma della parte deviatorica del tensore degli sforzi venga sottratta non la sola tensione di snervamento, ma la tensione di snervamento moltiplicata per il coefficiente $\sqrt{\frac{2}{3}}$; ciò è legato al fatto che tale norma non è altro che l'equivalente della tensione di Von Mises moltiplicata per lo stesso fattore:

$$\left\| \sigma_{n+1}^{dev,trial} \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{vm}$$

Una volta calcolata la funzione di snervamento sarà possibile stabilire se lo stato di tensione è tale da far sì che il solido in esame si trovi in campo plastico o meno; infatti, in perfetto accordo con la condizione di complementarità di Kuhn – Tucker, se:

$$f_{n+1}^{trial} \leq 0 \Rightarrow \text{Campo elastico} \Leftrightarrow \Delta\gamma = 0$$

$$f_{n+1}^{trial} > 0 \Rightarrow \text{Campo plastico} \Leftrightarrow \Delta\gamma > 0$$

dove:

$$\Delta\gamma = \gamma\Delta t$$

Se si ricade in campo elastico, è sufficiente considerare come variabili di uscita le variabili di ingresso in termini di tensioni e deformazioni, senza alterare quindi i valori delle variabili plastiche del sistema. Se invece si ricade in campo plastico, prima di aggiornare le variabili del sistema bisogna passare attraverso i cicli correttivi collegati al fenomeno di plasticità (descritti in seguito). In entrambi i casi il calcolo delle componenti del tensore degli sforzi viene effettuato attraverso la relazione:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{dev,trial} + \bar{K} \operatorname{tr}(\varepsilon_{n+1})I - 2G\Delta\gamma \mathbf{n}_{n+1}$$

In cui \bar{K} è il *bulk modulus* del materiale e \mathbf{n}_{n+1} è un versore che indica la direzione di evoluzione del tensore degli sforzi.

6.2.2 Algoritmo di ritorno radiale

L'algoritmo di ritorno radiale consente di correggere le variabili di tensione e deformazione plastica del modello, a seguito del superamento del limite elastico del materiale. La correzione apportata sarà tale da far sì che i nuovi valori soddisfino la condizione di consistenza senza mai approdare in campi di tensione non ammissibili.

Si consideri la variabile interna di plasticità α e si indichi con [16, 28]:

$$\mathbf{n}_{n+1} := \frac{\sigma_{n+1}}{\|\sigma_{n+1}\|}$$

il versore normale alla superficie di snervamento di Von Mises al termine dell'intervallo temporale $[t_n, t_{n+1}]$.

Le equazioni generali della teoria della plasticità assumeranno quindi la seguente forma:

$$\varepsilon_{n+1}^{pl} = \varepsilon_n^{pl} + \Delta\alpha \mathbf{n}_{n+1} = \varepsilon_n^{pl} + \Delta\gamma \mathbf{n}_{n+1}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\alpha = \alpha_n + \Delta\gamma$$

e lo stato di tensione di tentativo sarà dato da:

$$\sigma_{n+1}^{dev,trial} := \sigma_n^{dev} + 2G\Delta\varepsilon_{n+1}^{dev}$$

Dove $\sigma^{dev,trial}$ è la componente deviatorica dello stato di tentativo e G è il modulo di rigidezza a taglio.

Si può dimostrare che la risoluzione delle equazioni generali della plasticità si riduce alla risoluzione di un'equazione scalare per il parametro di consistenza $\Delta\gamma$. Si vede infatti che σ_{n+1}^{dev} è espresso in termini di $\sigma_{n+1}^{dev,trial}$ attraverso l'espressione:

$$\sigma_{n+1}^{dev} = \sigma_{n+1}^{dev,trial} - 2G\Delta\gamma\mathbf{n}_{n+1}$$

da cui si deduce che, nello spazio delle tensioni principali, la parte deviatorica del vettore tensione allo step $n+1$ viene corretta mediante una sua riduzione nella direzione perpendicolare alla superficie di snervamento, come si evince da quanto schematizzato in Fig. 6.2.

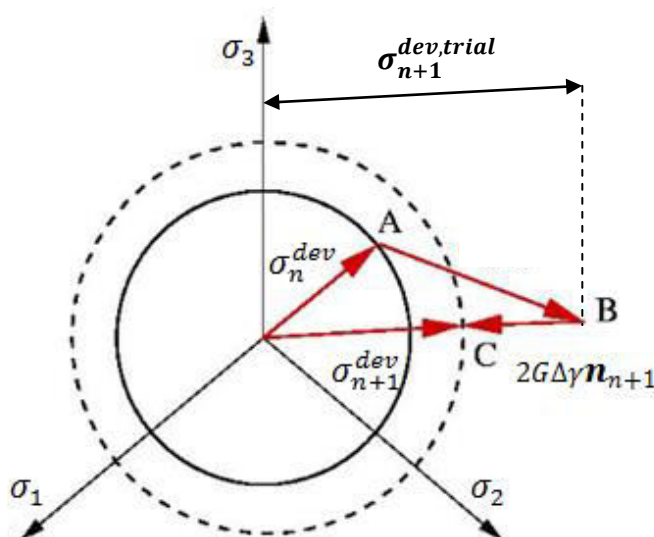


Fig. 6.2: Algoritmo di ritorno radiale

Per arrivare all'espressione algoritmica della condizione di consistenza, si nota che per definizione $\sigma_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1} \|\sigma_{n+1}\|$ e, di conseguenza varrà anche:

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\sigma_{n+1}^{dev,trial}}{\|\sigma_{n+1}^{dev,trial}\|}$$

Moltiplicando quindi \mathbf{n}_{n+1} per l'equazione tensoriale vista:

$$\sigma_{n+1}^{dev} = \sigma_{n+1}^{dev,trial} - 2G\Delta\gamma \mathbf{n}_{n+1}$$

e sostituendo l'espressione di $\|\sigma_{n+1}^{dev}\|$ a nella condizione di ammissibilità dello stato di tensione in campo plastico $\sqrt{\frac{3}{2}}\|\sigma_{n+1}^{dev}\| - K(\alpha_{n+1}) = 0$, si ottiene la seguente equazione scalare con cui determinare il parametro di consistenza $\Delta\gamma$:

$$g(\Delta\gamma) := -\left(\sigma_y + K(\alpha_{n+1})\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}\|\sigma_{n+1}^{dev}\| - 2G\Delta\gamma = 0$$

dove:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

Tale equazione si risolve molto semplicemente con il metodo iterativo di Newton locale, come si vedrà nel paragrafo seguente.

6.2.3 Ciclo correttivo elasto-plastico

Si tratta di un ciclo correttivo, contenuto all'interno dell'algoritmo di ritorno radiale, che adotta il metodo iterativo di Newton locale per calcolare la soluzione dell'equazione $g(\Delta\gamma)$, e ottenere quindi il valore del parametro di consistenza $\Delta\gamma$ (detto anche *moltiplicatore plastico*). Tale schema iterativo viene preferito in quanto la funzione $g(\Delta\gamma)$ è una funzione convessa e, pertanto, la convergenza è garantita [16].

Per eseguire il calcolo è innanzitutto necessario inizializzare i valori delle variabili del ciclo come segue:

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

$$\alpha_{n+1}^{(0)} = \alpha_n$$

dopo di che si passa a fissare un valore di tolleranza TOLL, e si ripete il ciclo iterativo fino a che non si ha il soddisfacimento della condizione di convergenza:

$$|g(\Delta\gamma^{(k)})| < TOLL$$

Il ciclo iterativo sarà così strutturato:

$$g(\Delta\gamma^{(k)}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \sigma_{dev_{n+1}}^{tr} \right\| - \left(\sigma_y + K \left(\alpha_{n+1}^{(k)} \right) \right) - 2G(\Delta\gamma^{(k)})$$

$$Dg(\Delta\gamma^{(k)}) = -2G * \left(1 - \frac{K' \left(\alpha_{n+1}^{(k)} \right)}{2G} \right)$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{g(\Delta\gamma^{(k)})}{Dg(\Delta\gamma^{(k)})}$$

Al termine del ciclo si aggiornerà non solo il valore del parametro di consistenza $\Delta\gamma$, ma anche il valore della variabile interna di plasticità α come segue:

$$\alpha_{n+1}^{(k+1)} = \alpha_{n+1}^{(k)} + \Delta\gamma^{(k+1)}$$

Il ciclo si ripeterà fino al raggiungimento della convergenza.

6.3 Realizzazione di un modello tridimensionale di plasticità in ambiente MATLAB

Sulla base dello schema di calcolo appena trattato, è stato realizzato un modello monodimensionale di plasticità con incrudimento isotropo per la sola matrice [29], successivamente esteso al caso di solido tridimensionale isotropo, da includere in un modello agli elementi finiti che simulasse le curve sforzo-deformazione del materiale composito in modo più realistico.

Lo script è stato realizzato in ambiente MATLAB e successivamente provato con tre campi di deformazione: la trazione monoassiale, il taglio puro e la loro combinazione. Il modello è rappresentativo del comportamento di un solido elasto-plastico per il quale è stata scelta arbitrariamente come superficie di snervamento la superficie di Von-Mises, e come legge di incrudimento quella esponenziale di Voce.

Le proprietà della matrice inserite all'interno del modello sono state reperite in letteratura [26], e caratterizzano una resina epossidica; i loro valori sono riportati in tabella 6.1.

Proprietà	Valore
Modulo di Young (E)	3760 Mpa
Modulo di Poisson (ν)	0.39
Tensione di snervamento (σ_y)	29 Mpa
Tensione di saturazione (σ_u)	122 Mpa
Esponente caratteristico (δ)	180

Tab. 6.1: Proprietà della resina epossidica utilizzata nel programma

Di seguito si riportano i risultati ottenuti dal modello numerico nei due casi presi a riferimento.

6.3.1 Trazione Monoassiale

Nel caso di trazione monoassiale l'input dato al programma consiste in un vettore di deformazione che riproduce una deformazione monoassiale pura in direzione 1 (Fig. 6.3). Matematicamente questo è esprimibile come:

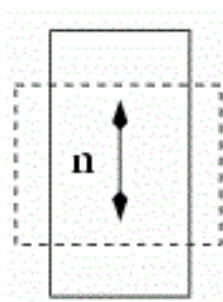


Fig. 6.3: Deformazione a trazione monoassiale

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= e \\ \varepsilon_2 &= -\nu e \\ \varepsilon_3 &= -\nu e \\ \gamma_{12} &= 0 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0\end{aligned}$$

in cui e è uno scalare associato all'entità della deformazione e ν è il modulo di Poisson del materiale aggiornato via via col progredire della plasticizzazione.

Si riportano in Fig. 6.4 i grafici degli andamenti delle singole componenti del tensore degli sforzi.

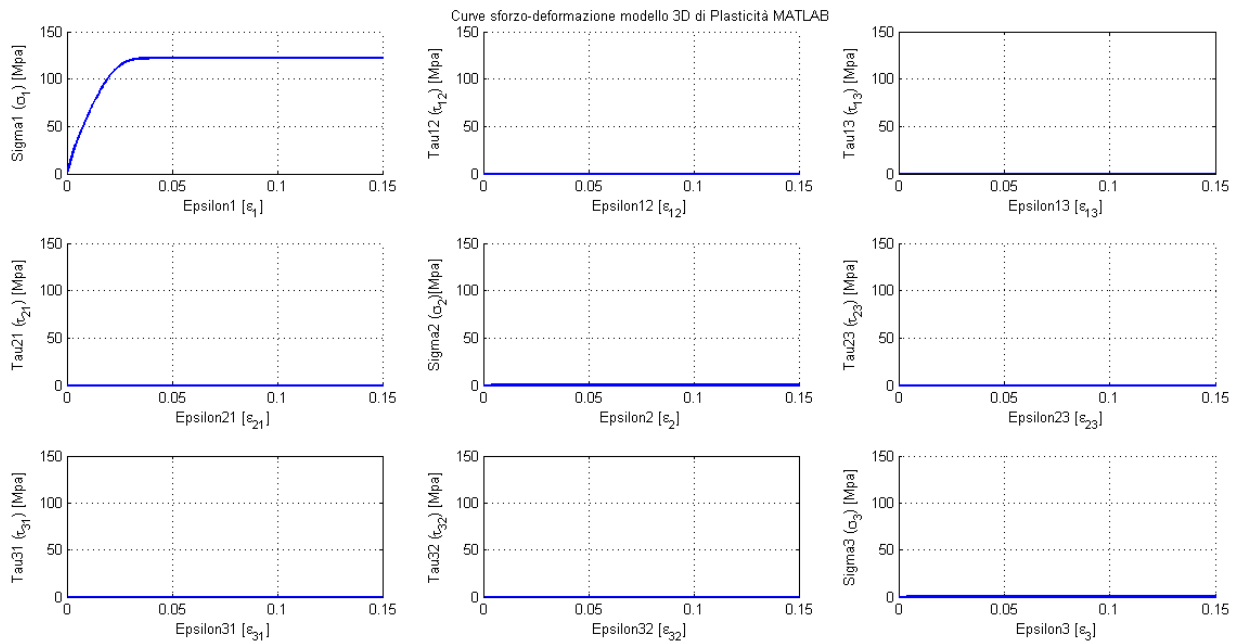


Fig. 6.4: Componenti del tensore degli sforzi nel caso di trazione monoassiale

Da tale grafico si evince come il modello riesca a fornire come output in termini di tensioni la trazione monoassiale pura desiderata, rispettando le tensioni di snervamento e di saturazione caratteristiche del materiale.

Oltre a tale risultato è necessario riportare anche i risultati ottenuti in termini di tensione di Von Mises e il confronto di questa con quella di snervamento.

Si ricordi che nel caso di trazione monoassiale pura la tensione di Von Mises si riduce a:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Dal grafico di Fig. 6.5 si osserva che il modello numerico non viola la condizione di consistenza durante l'intera evoluzione della plasticità, ovvero la tensione equivalente di Von Mises non supera mai quella di snervamento.

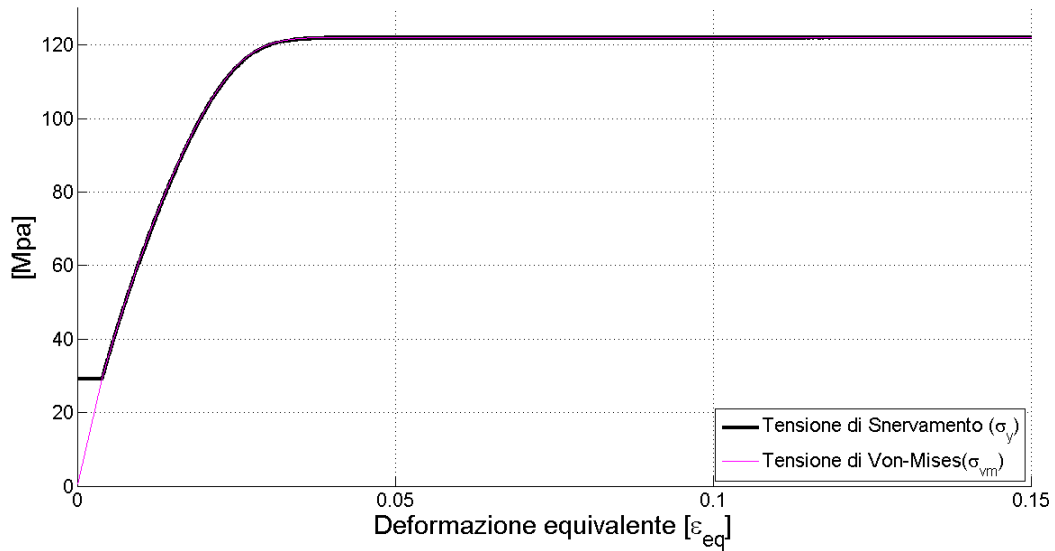


Fig. 6.5: Confronto tra la tensione di snervamento e la tensione di Von Mises nel caso della trazione monoassiale

6.3.2 Taglio puro

Nel caso di taglio puro l'input dato al programma consiste invece in un vettore di deformazione che riproduce una deformazione di scorrimento a taglio sul piano 12 (Fig. 6.6). Matematicamente questo è esprimibile come:

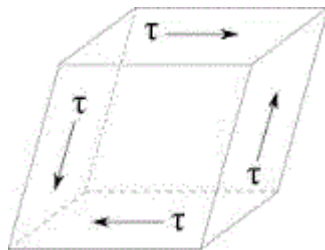


Fig. 6.6: Deformazione di taglio puro

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 0 \\ \epsilon_2 &= 0 \\ \epsilon_3 &= 0 \\ \gamma_{12} &= \frac{e}{2} \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0 \end{aligned}$$

in cui e è uno scalare associato all'entità della deformazione.

I grafici degli andamenti delle singole componenti del tensore degli sforzi sono riportati in Fig. 6.7.

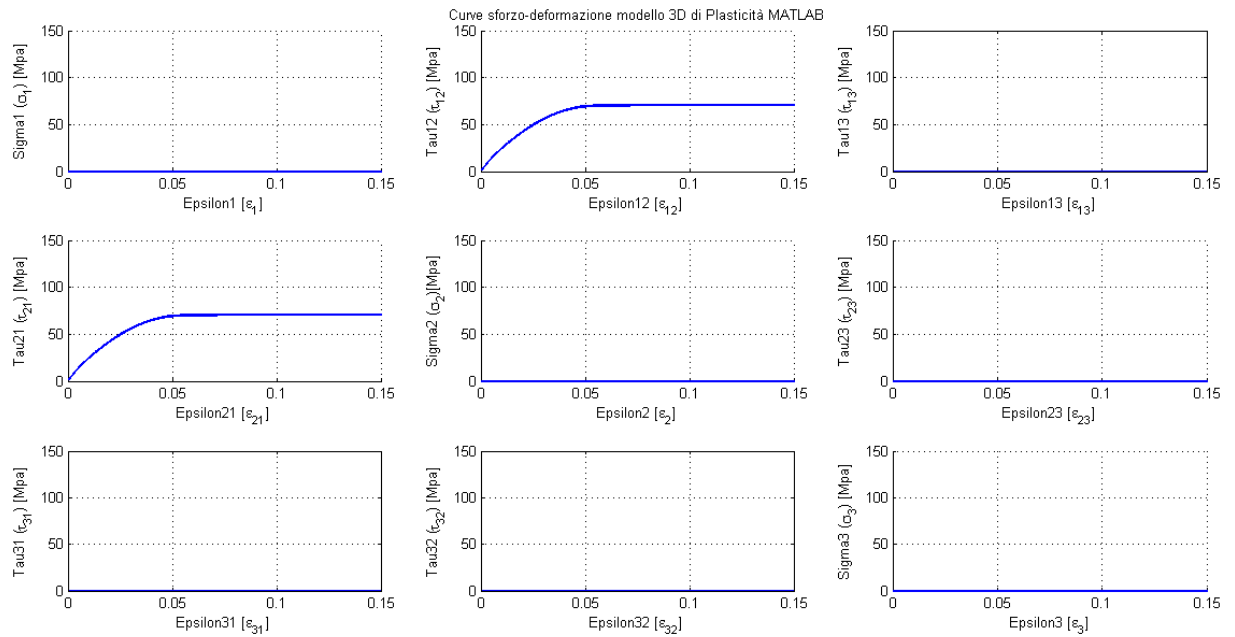


Fig. 6.7: Componenti del tensore degli sforzi nel caso di taglio puro

Dal grafico mostrato in Fig. 6.7 si nota che il modello, anche nel taglio puro, riesce a riprodurre la risposta attesa.

E' necessario inoltre riportare i risultati ottenuti in termini di tensione di Von Mises, e il confronto di questa con quella di snervamento.

Si ricordi che nel caso di taglio puro la tensione di Von Mises assume un'espressione differente rispetto al caso di trazione ed è pari a:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{3\tau_{12}^2}$$

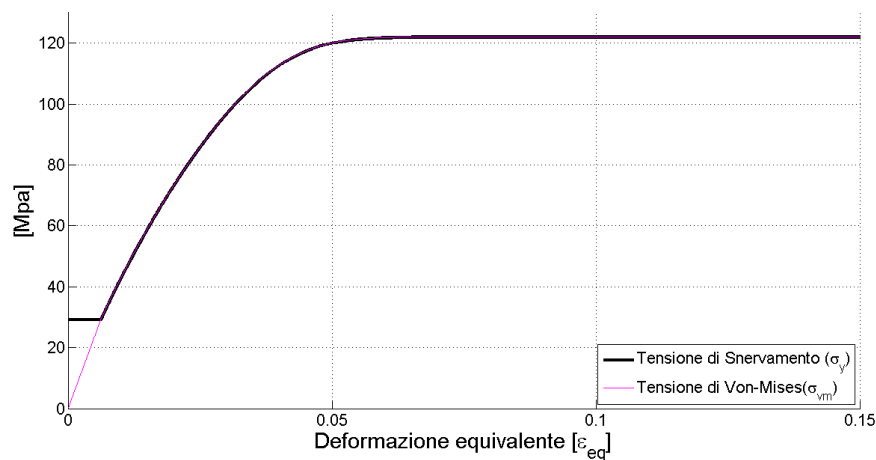


Fig. 6.8: Confronto tra la tensione di snervamento e la tensione di Von Mises nel caso di taglio puro

Anche nel caso di taglio puro si può osservare come il modello numerico non viola la condizione di consistenza durante l'intera evoluzione della plasticità.

6.3.3 Trazione monoassiale e taglio puro combinati

Infine il programma è stato testato con un campo di deformazione che riproducesse la combinazione di una trazione monoassiale con un taglio puro.

In questo caso il vettore di deformazione è stato definito come segue:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= e \\ \varepsilon_2 &= -\nu e \\ \varepsilon_3 &= -\nu e \\ \gamma_{12} &= \frac{e}{2} \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \gamma_{31} &= 0\end{aligned}$$

in cui e è ancora una volta uno scalare associato all'entità della deformazione e ν è il modulo di Poisson del materiale aggiornato col progredire della plasticizzazione.

Il test numerico è stato realizzato per confermare la validità del modello anche nel caso di uno stato di deformazione generico, per il quale è atteso sia un valore di deformazione più basso a cui si manifesta il primo snervamento, sia una riduzione dei valori di saturazione delle varie componenti di tensione. La conferma di quanto atteso è data dagli andamenti ottenuti per le componenti del tensore degli sforzi come mostrato in Fig. 6.9.

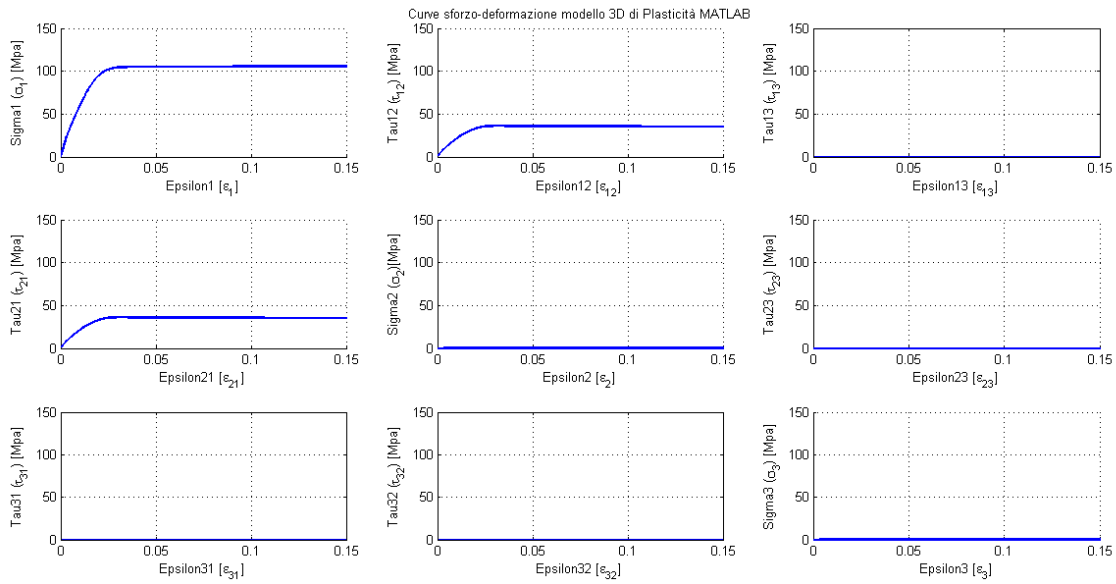


Fig. 6.9: Componenti del tensore degli sforzi nel caso di trazione monoassiale combinata con il taglio puro

E' necessario riportare anche per quest'ultimo caso i risultati ottenuti in termini di tensione di Von Mises, e il confronto di questa con quella di snervamento.

Anche nel caso di una condizione di carico misto si ha il rispetto della condizione di consistenza.

Per il caso in esame la tensione di Von Mises assume la seguente espressione:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{12}^2}$$

e il suo andamento rispetto a quello della tensione di snervamento è riportato in Fig. 6.10.

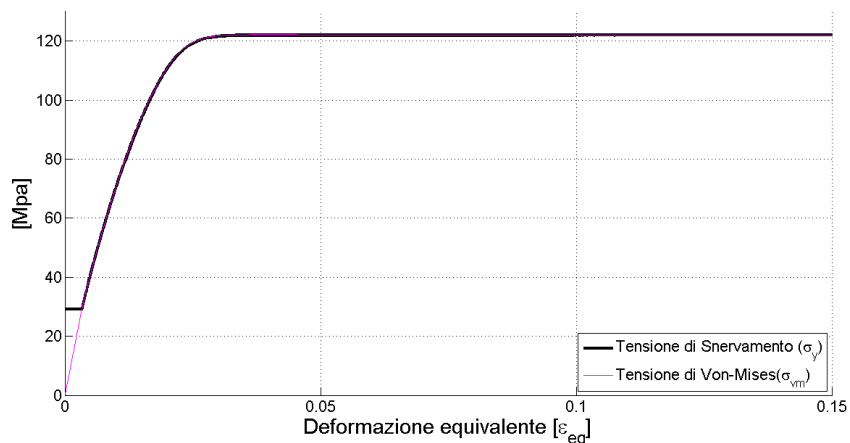


Fig. 6.10: Confronto tra la tensione di snervamento e la tensione di Von Mises nel caso di trazione monoassiale e taglio puro combinati

6.4 Verifica del modello numerico con i risultati sperimentali

Il modello numerico è stato applicato per varie condizioni di carico e, in particolare, a quelle per cui si dispone di dati sperimentali di confronto cioè trazione monoassiale e taglio, precedentemente visti, e compressione.

I risultati ottenuti con il modello elasto-plastico attraverso l'implementazione numerica in ambiente MATLAB, e riproducono l'andamento atteso delle curve sforzo-deformazione.

Tuttavia, come si evince dalla Fig. 6.11, lo schema creato (i cui risultati sono rappresentati in linea continua) riesce a descrivere fedelmente solo il comportamento a taglio e compressione.

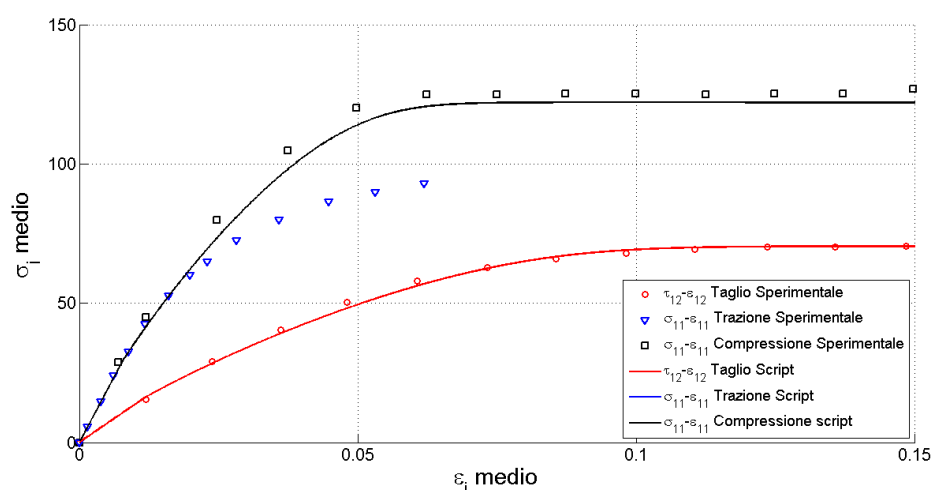


Fig. 6.11: Confronto delle curve sforzo-deformazione numeriche con i valori sperimentali

I dati sperimentali di confronto sono dati di letteratura [26] e ad una resina epossidica pura.

L'incapacità del modello di cogliere la differenza comportamentale tra trazione e compressione è intrinseca nella scelta della superficie di snervamento di Von Mises. Il programma risulta essere comunque valido per l'analisi di sollecitazioni a taglio del materiale.

Capitolo 7

Implementazione FEM del modello di elastoplasticità

7.1 Introduzione

Nel presente capitolo viene descritto lo sviluppo e la verifica di un modello agli elementi finiti capace di riprodurre il comportamento elasto-plastico di una resina epossidica. Il modello creato deriva dalla conversione del modello di plasticità precedentemente implementato in ambiente MATLAB, in una UMAT (*User MATerial*) in linguaggio di programmazione FORTRAN; tale passaggio risulta essere necessario poiché è il linguaggio FORTRAN che permette all'utente di definire routine esterne nel software agli elementi finiti ABAQUS [30].

Infine, si riporteranno i risultati derivanti dall'inserimento del modello di elasto-plasticità creato all'interno di opportuni modelli agli elementi finiti.

7.2 Creazione della UMAT elasto-plastica

UMAT è l'acronimo di *User MATerial* con cui si fa riferimento a una routine esterna in linguaggio FORTRAN che permette di definire le equazioni caratteristiche della fisica del materiale da modellizzare in ABAQUS. Tale routine deve inoltre rispettare una ben definita struttura di interfaccia input/output con il software ABAQUS.

La creazione della routine per un modello elasto-plastico ha richiesto [31]:

- la traduzione dello script realizzato dal linguaggio MATLAB a quello FORTRAN;
- la compilazione della nuova routine ottenuta;

- il confronto dei risultati forniti dai diversi linguaggi;
- la realizzazione della UMAT da introdurre nel solutore agli elementi finiti grazie all'utilizzo della struttura logica sviluppata in FORTRAN.

Il passaggio dallo script in FORTRAN classico a quello necessario per l'interfaccia con il software ABAQUS, ha richiesto la modifica sostanziale di veri e propri blocchi del programma e la definizione della matrice jacobiana. Per quel che riguarda le modifiche da apportare, bisogna considerare il fatto che nello script MATLAB, e nel suo corrispondente FORTRAN, il campo di deformazione di ingresso può essere definito dall'utente; nel software agli elementi finiti invece le cose si complicano, in quanto il campo di deformazione ad un certo incremento deriva dal campo di deformazione ottenuto come output dell'incremento precedente. Nell'ambito degli elementi finiti quindi, lo stato di deformazione da imporre al solido è funzione delle condizioni al contorno inserite nel modello; queste sono infatti responsabili delle deformazioni che si generano a seguito della ricerca delle condizioni di equilibrio da parte del solutore. Sarà quindi compito dell'utente definire delle condizioni al bordo idonee che permettano di riprodurre i campi desiderati.

Nello specifico, i campi di deformazione che si vogliono riprodurre sono gli stessi utilizzati nella verifica dello script elasto-plastico in MATLAB, relativi cioè a stati di trazione monoassiale e taglio puro.

Per quanto concerne la definizione della matrice jacobiana, detta anche matrice di rigidezza elasto-plastica tangente consistente, essa riveste un ruolo fondamentale nel software agli elementi finiti poiché permette la realizzazione di una *User MATerial*. La matrice viene valutata alla fine di ogni incremento; in ciascuno di questi si richiede che venga espresso, all'interno di qualsiasi UMAT, un tensore del quart'ordine, noto come matrice Jacobiana di materiale, fondamentale per individuare la direzione di calcolo durante le iterazioni numeriche della matrice di rigidezza non lineare del materiale fino a convergenza.

La matrice Jacobiana è definita come la derivata parziale di un incremento infinitesimale del tensore degli sforzi causato da un tensore delle deformazioni a variazioni infinitesimali [32]:

$$C_{ijhk} = \frac{\partial \Delta \sigma_{il}}{\partial \Delta \varepsilon_{hk}}$$

L'implementazione di tale matrice può non essere necessariamente esatta, infatti anche una versione approssimata fornisce risultati attendibili ma con un prolungamento dei tempi di simulazione.

Presi in considerazione questi due passaggi fondamentali, si è proceduto alla realizzazione della UMAT.

7.3 Verifica della UMAT

La UMAT è stata provata su due modelli agli elementi finiti che riproducessero i campi di tensioni con cui è stato precedentemente validato lo script MATLAB, cioè il caso di trazione monoassiale e quello di taglio puro. L'applicazione di tali sollecitazioni ha richiesto la generazione di due modelli agli elementi finiti distinti, nei quali le condizioni al contorno sono state imposte in modo da generare, in alcuni elementi, il campo di deformazione desiderato.

7.3.1 Verifica della UMAT a trazione monoassiale

Per la generazione del campo di deformazione di trazione monoassiale, è stato creato un modello a forma di parallelepipedo a base quadrata e con altezza pari a cinque volte il lato del quadrato di base. Questo elemento è stato poi suddiviso in 3 parti in modo tale da poter individuare un blocco centrale di lunghezza pari a tre volte il lato del quadrato di base. La geometria ottenuta è mostrata in Fig. 7.1.

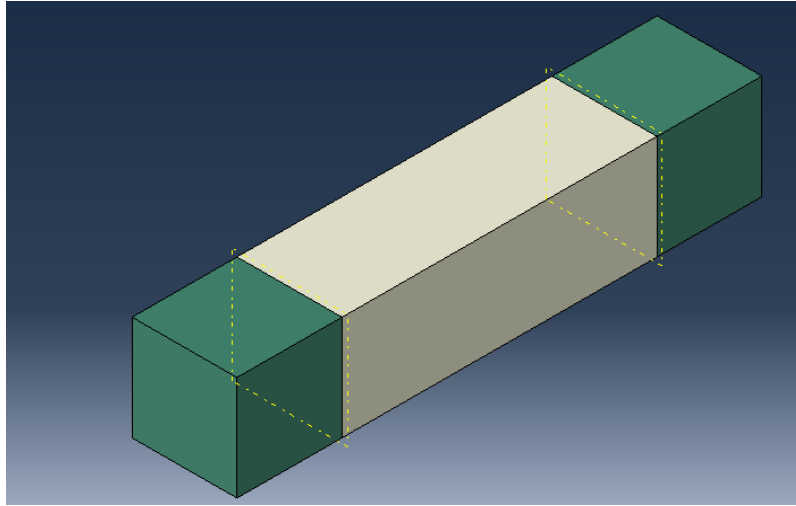


Fig. 7.1: Geometria e definizione dei materiali del modello FEM di trazione monoassiale

Nei due blocchi laterali (in colore grigio scuro) è stato inserito un materiale omogeneo isotropo elastico le cui proprietà corrispondessero a quelle della resina epossidica in esame. Nel blocco centrale è stata invece inserita la UMAT, anch'essa caratterizzata dalle stesse proprietà della resina epossidica ma, questa volta, comprensive di quelle necessarie alla corretta riproduzione del suo comportamento elasto-plastico.

Il modello è stato poi meshato e sottoposto alle opportune condizioni al bordo. Dalla Fig. 7.2 si evince che è stato posto un incastro ad una base, mentre l'altra è stata messa in trazione in modo da imporre un campo di spostamento ben definito lungo la direzione dell'asse del parallelepipedo.

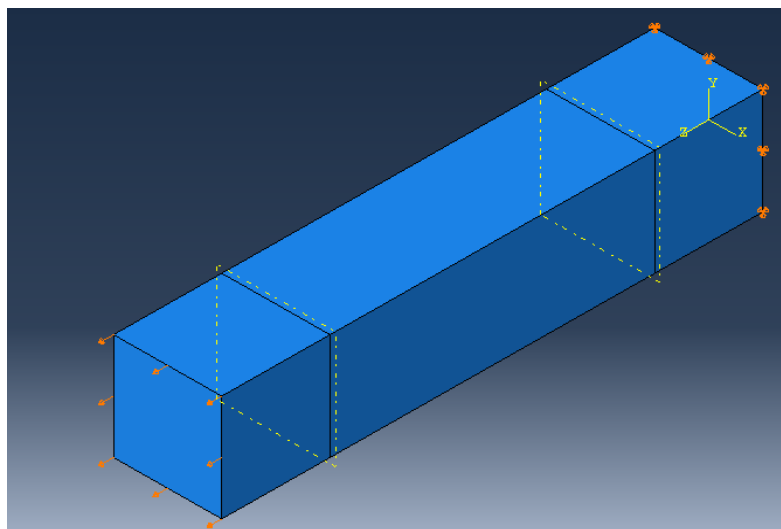


Fig. 7.2: Condizione di vincoli del modello FEM di trazione monoassiale

La scelta della geometria, della disposizione dei materiali e delle condizioni al contorno è stata effettuata con il fine di realizzare nel tratto centrale e, in particolare, negli elementi disposti lungo l'asse del parallelepipedo, uno stato di deformazione tale da indurre un campo di tensione il più possibile monoassiale (che non risentisse cioè né dei vincoli applicati e, soprattutto, dell'incastro di base, né di eventuali disturbi di tipo numerico (ad esempio nelle zone di transizione)).

Il modello così generato, è stato quindi provato mediante un'analisi statica non lineare e la deformata ottenuta è rappresentata nella Fig. 7.3.

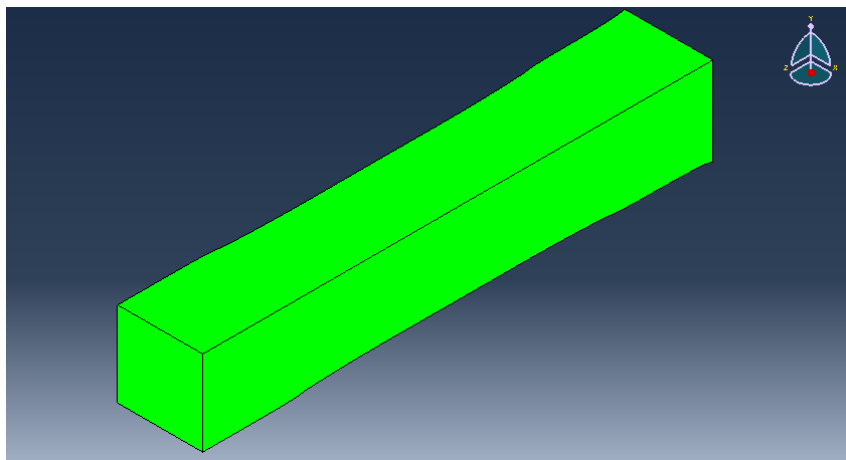


Fig. 7.3: Deformata del modello FEM di trazione monoassiale

Si evince come nel tratto plastico si evidenzia il fenomeno di strizione legato all'insorgere delle deformazioni plastiche. Tale fenomeno è reso visibile mediante un ingrandimento, a fattore di scala incrementato (Fig. 7.4), di una delle due zone di congiunzione del materiale elastico con quello elastoplastico.

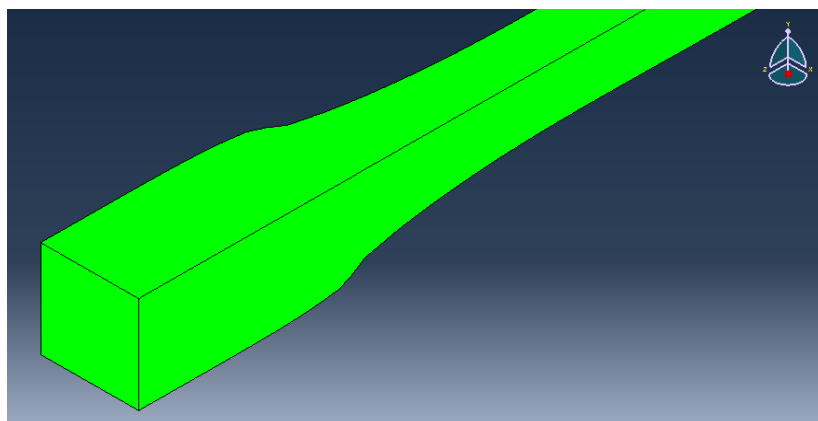


Fig. 7.4: Particolare amplificato della strizione del modello FEM di trazione monoassiale

In Fig. 7.5 e 7.6 si riporta la risposta del modello in termini di tensioni di Von-Mises e di tensioni lungo l'asse del parallelepipedo.

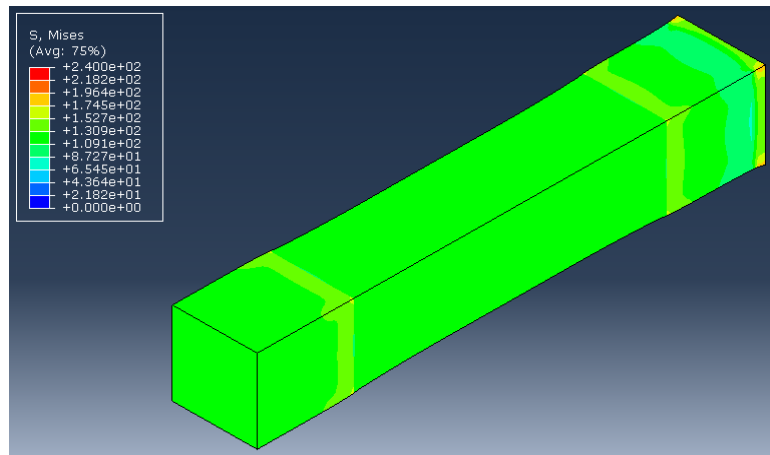


Fig. 7.5: Andamento della tensione di Von-Mises nel modello FEM di trazione monoassiale

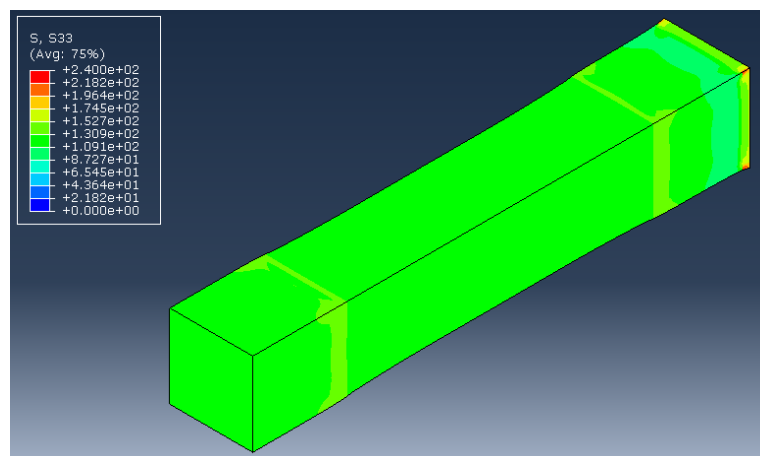


Fig. 7.6: Andamento della tensione assiale nel modello FEM di trazione monoassiale

Si nota come entrambe le tensioni tendano a mantenersi uniformi lungo tutto il modello a meno di due zone specifiche: l'incastro di base, in cui si ha un'intensificazione delle tensioni a causa dei vincoli, e le sezioni, in cui si ha la transizione dalla matrice elasto-plastica a quella puramente elastica a seguito della discontinuità del materiale. In particolare, si osserva come le due mappe a parità di scala, siano praticamente identiche, il che è indice di un effettivo stato di tensione monoassiale poichè la tensione di Von-Mises coincide con la tensione lungo l'asse del solido.

In Fig. 7.7 si mostra l'evoluzione della plasticizzazione nel tratto centrale del modello.

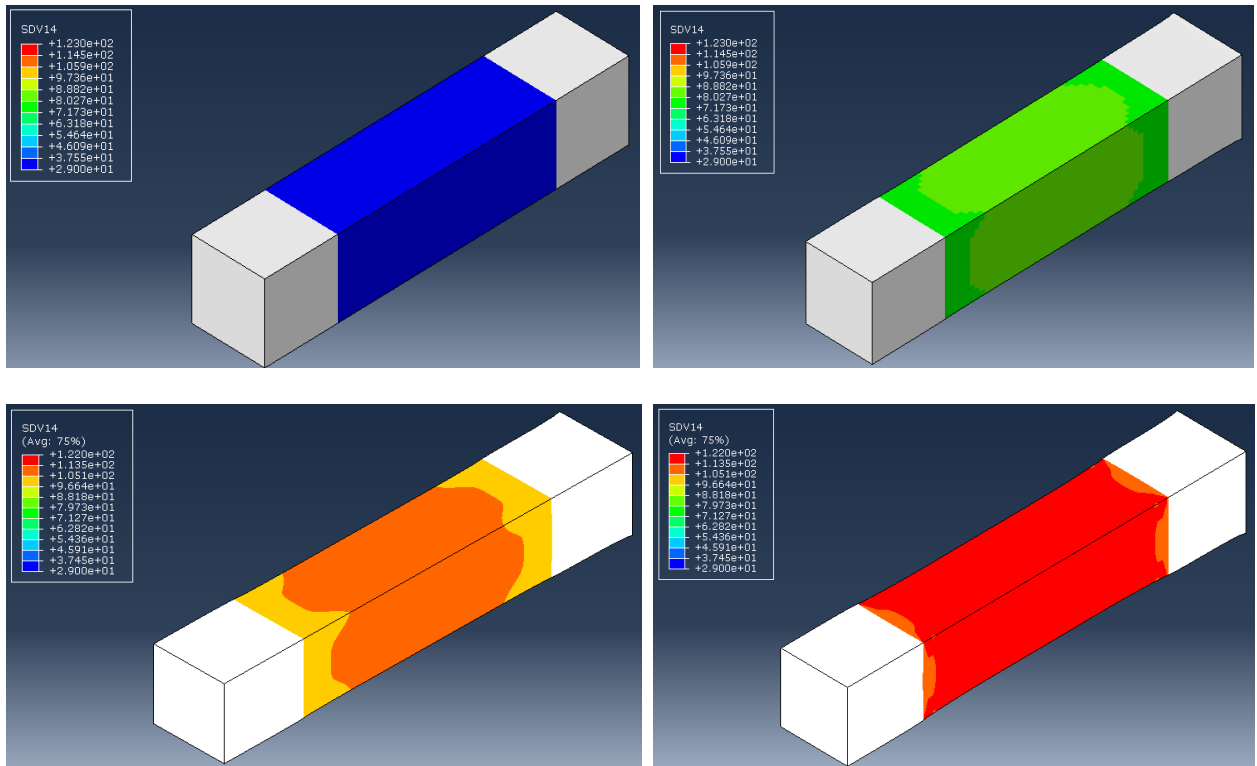


Fig 7.7: Evoluzione della superficie di snervamento del modello FEM di trazione monoassiale

Infine si riportano i risultati e il loro confronto con quelli ottenuti dallo script in MATLAB, in termini di componenti del tensore degli sforzi (Fig. 7.8). Si noti che tali valori sono quelli relativi ad uno degli elementi posti nella zona in cui è ragionevole supporre una condizione di trazione monoassiale.

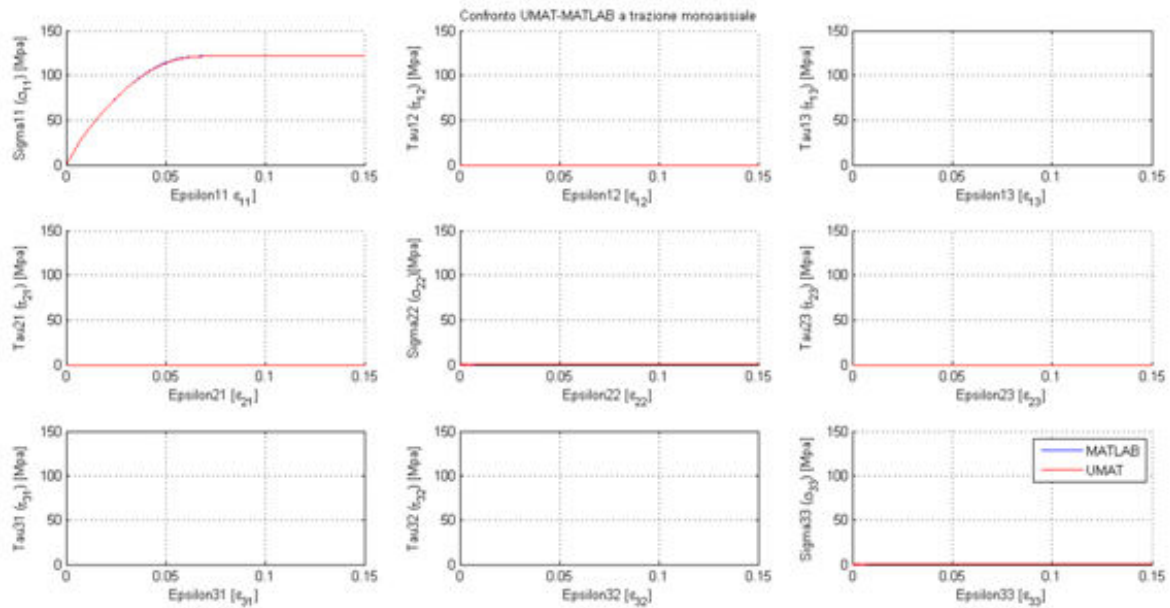


Fig. 7.8: Confronto delle componenti del tensore degli sforzi nel modello FEM di trazione monoassiale con output MATLAB

I risultati forniti dalla UMAT e quelli ottenuti mediante lo script MATLAB appaiono praticamente indistinguibili, ragion per cui è possibile asserire che il modello elasto-plastico implementato nel software agli elementi finiti descrive in maniera accettabile il comportamento desiderato per la matrice, quantomeno nel caso di trazione monoassiale.

7.3.2 Verifica della UMAT a taglio puro

Per la generazione del campo di deformazione di taglio puro è stato invece creato un modello a forma cubica di sola matrice elasto-plastica. Il modello è stato poi meshato in modo uniforme e sottoposto alle opportune condizioni al bordo. Dalla Fig. 7.9 si evince che sono stati imposti degli specifici scorrimenti paralleli alle facce (analogamente a quanto visto nel capitolo 5 in cui tale condizione è utilizzata per il calcolo delle componenti della matrice di rigidità del composito omogeneizzato), al fine di riprodurre un campo di deformazione a taglio puro.

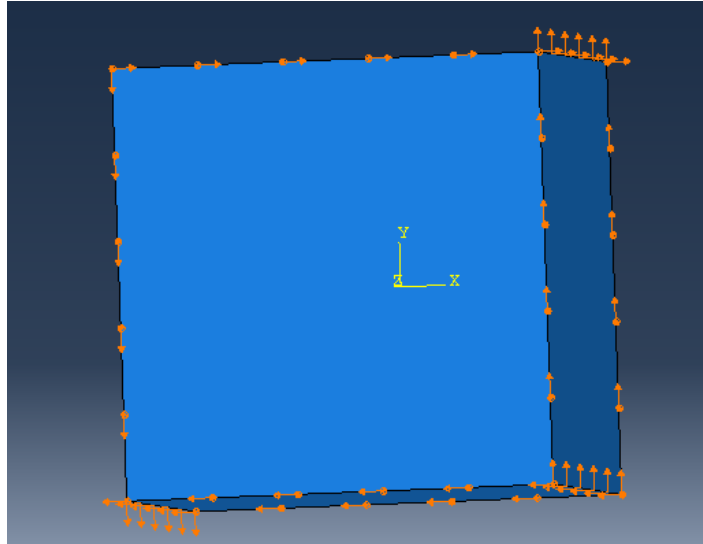


Fig. 7.9: Condizione di vincolo del modello FEM di taglio puro

La scelta della geometria e delle condizioni al contorno è stata effettuata con il fine di realizzare nel cubo e, in particolare, negli elementi centrali, uno stato di deformazione tale da indurre un campo di tensioni di taglio puro. Il modello così generato è stato quindi provato tramite un'analisi statica non lineare; la deformata ottenuta è mostrata in Fig. 7.10.

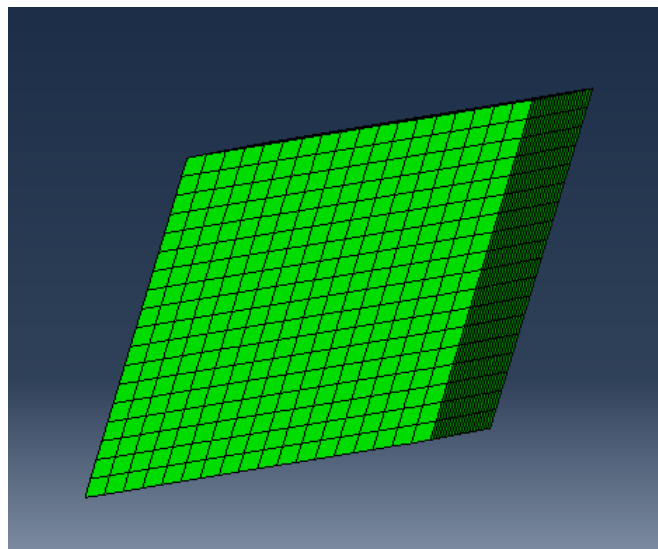


Fig 7.10: Deformata del modello FEM di taglio puro

I risultati ottenuti vengono di seguito riportati in termini di tensioni di Von-Mises (Fig 7.11) e, successivamente, della tensione a taglio principale (Fig. 7.12):

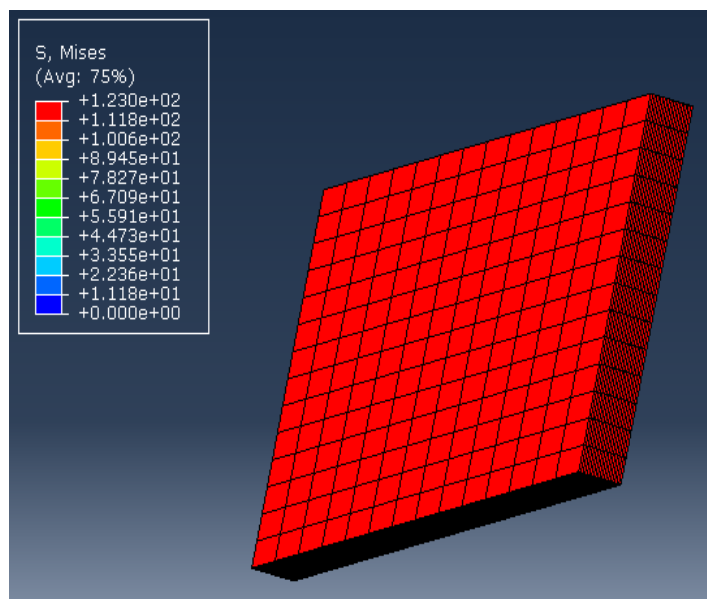


Fig. 7.11: Andamento della tensione di Von-Mises nel modello FEM di taglio puro

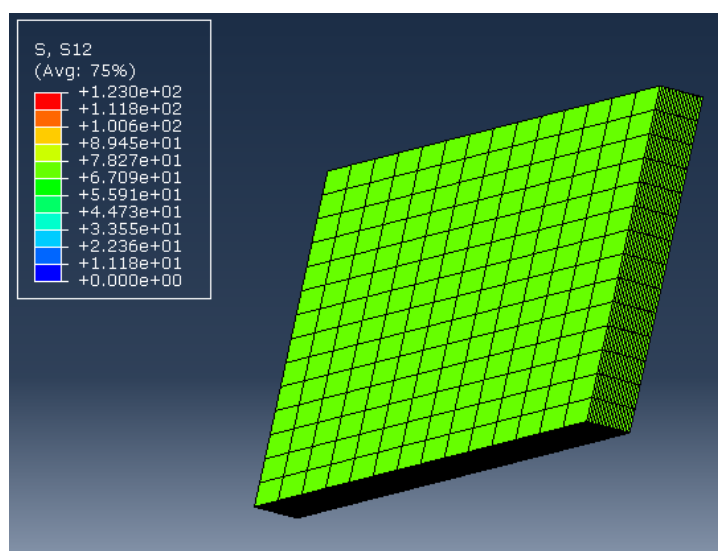


Fig. 7.12: Andamento della tensione di taglio nel modello FEM di taglio puro

Si nota come il valore della tensione di taglio sia in perfetto accordo con quella di Von-Mises nel caso di taglio puro.

Infine, si osservi in Fig. 7.13 l'evoluzione della superficie di snervamento durante il processo di plasticizzazione del cubo.

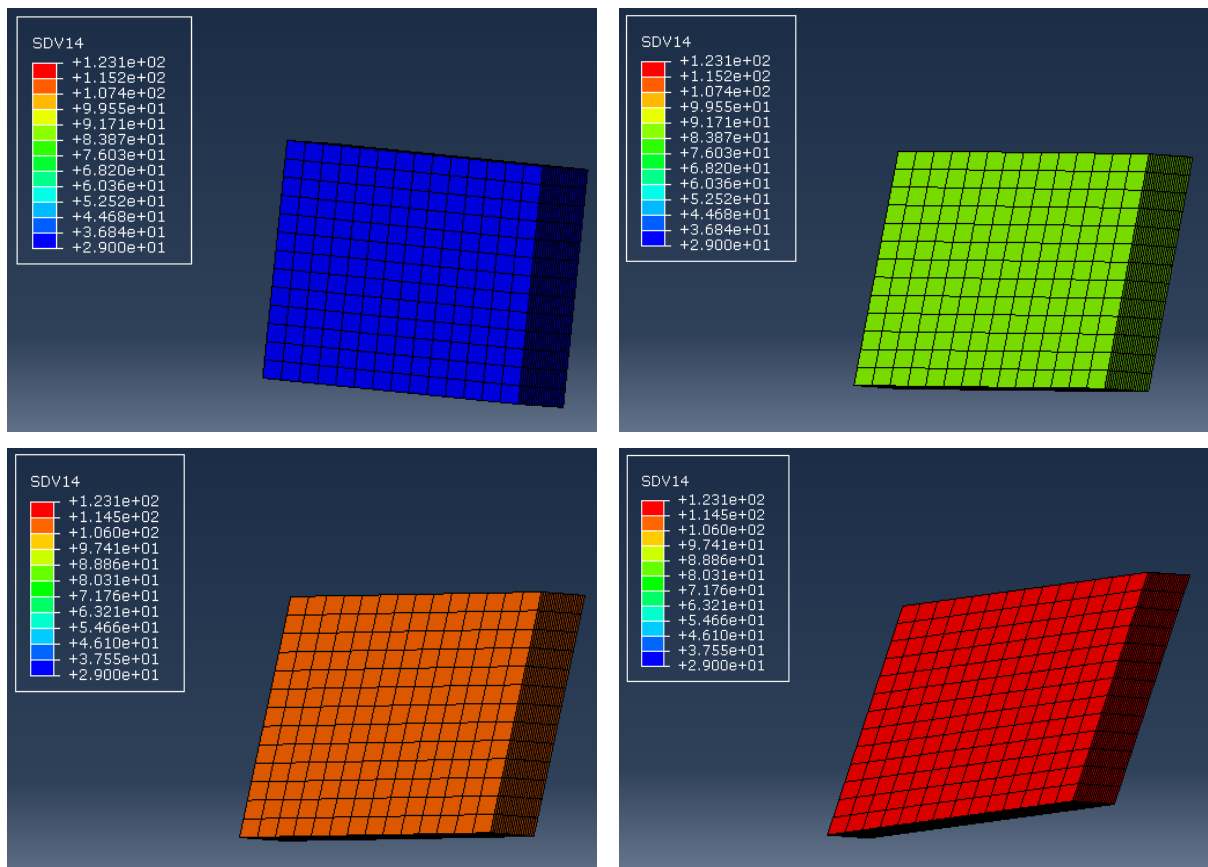


Fig 7.13: Evoluzione della superficie di snervamento del modello FEM di taglio puro

A conferma del rispetto della risposta elasto-plastica a taglio puro prevista per il modello, si riportano i risultati in termini di componenti del tensore degli sforzi e il loro confronto con quelli ottenuti dallo script in MATLAB (Fig. 7.14). Si noti che tali valori sono quelli relativi ad uno degli elementi posti nella zona in cui è ragionevole supporre una condizione di taglio puro.

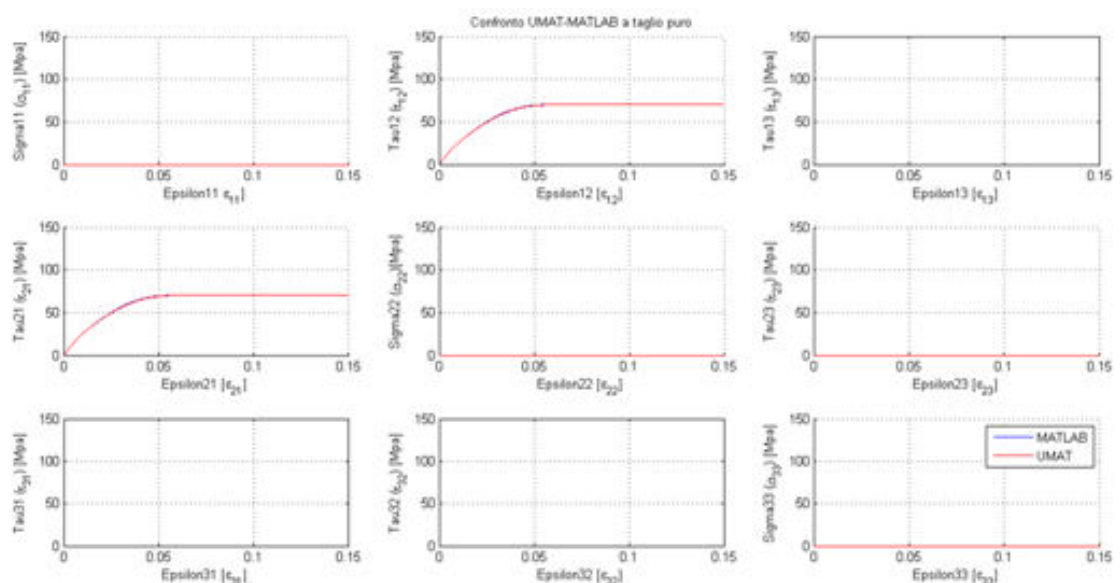


Fig. 7.14: Confronto delle componenti del tensore degli sforzi nel modello FEM di taglio puro con output MATLAB

Anche per la deformazione a taglio è possibile notare come i risultati della UMAT e quelli dello script MATLAB siano praticamente indistinguibili, ragion per cui è possibile affermare che il modello elasto-plastico implementato nel software agli elementi finiti descrive in maniera accettabile il comportamento desiderato per la matrice. Tale risultato è indice della validità del modello di elasto-plasticità creato anche per la condizione di taglio puro.

7.4 Conclusioni

Alla luce di quanto esposto, la validità del modello elasto-plastico inserito nella *User MATerial* risulta essere confermata. E' inoltre ragionevole pensare che la routine sia capace di riprodurre, in maniera sufficientemente accurata, il comportamento elasto-plastico anche in condizioni di carico generiche. Si ritiene infine che questa possa essere utilizzata per simulare in modo realistico il comportamento di una matrice in resina epossidica contenente fibre di carbonio unidirezionali e, quindi, dell'intero composito.

Capitolo 8

Modello elasto-plastico di materiale composito unidirezionale in resina epossidica

8.1 Introduzione

Nel presente capitolo verrà innanzitutto trattata la realizzazione di un modello agli elementi finiti di un composito unidirezionale in resina epossidica, basato su uno analogo di letteratura preso a riferimento [8, 9].

Si esaminerà poi la risposta del modello ad una sollecitazione di taglio trasverso. La scelta di tale stato di tensione è associata al fatto che l'intera realizzazione del modello si ispira al quello di letteratura, per il quale risultano note le risposte a tale stato di sollecitazione. Le tensioni che si ottengono in output, verranno infatti sottoposte ad un processo di omogeneizzazione volumetrica, al fine di ottenere delle curve sforzo-deformazione mediate e confrontabili con i risultati di letteratura [9] del modello di riferimento.

8.2 Scelta del modello di riferimento

L'obiettivo di base è quello di realizzare un modello agli elementi finiti dotato di una certa validità statistica nel riprodurre le curve sforzo-deformazione di un materiale composito in fibra unidirezionale e resina epossidica.

La validità statistica del modello di riferimento è assicurata dal fatto che questo è stato generato tramite un algoritmo capace di realizzare volumetti elementari di materiale composito in fibra continua, con una distribuzione casuale delle fibre all'interno della matrice. I dati di letteratura [33, 34]

mostrano come tale tipo di distribuzione, una volta fissati il raggio e la frazione volumetrica di fibra, riesca a produrre dei risultati realistici in termini di rigidità del modello.

Sfruttando l'algoritmo sopracitato, sono stati generati 5 modelli minori e un macromodello; ciascuno di essi è stato provato numericamente sotto varie condizioni di carico, al fine di evidenziare la bassa dispersione dei risultati ottenuti per ogni test. In Fig. 8.1 si riportano le sezioni trasversali dei modelli di riferimento [9] ottenuti impostando una frazione volumetrica media del 60% e un raggio della fibra pari a $2.5\mu\text{m}$.

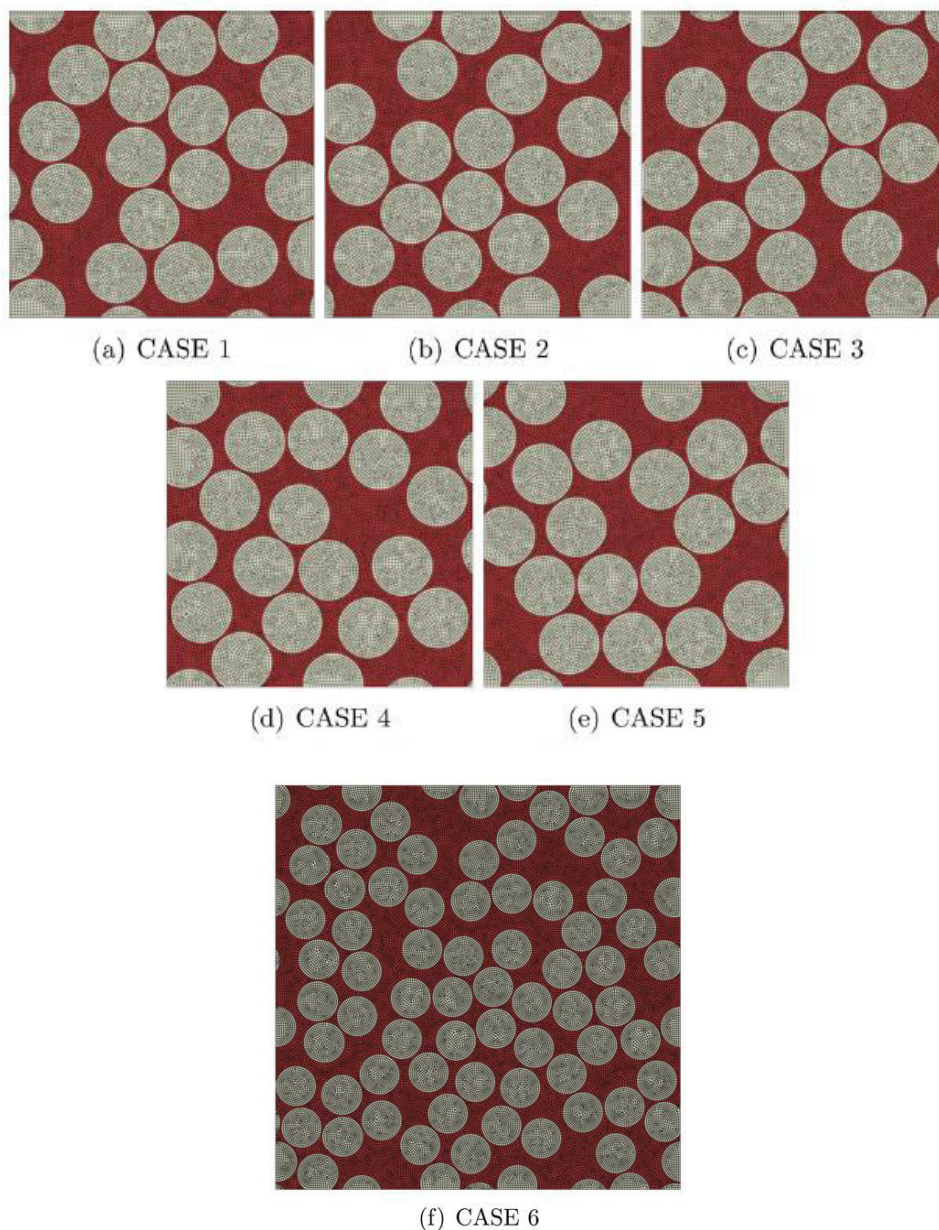


Fig. 8.1: Modelli di letteratura

I modelli completi non sono che una semplice estrusione di tali sezioni lungo la direzione dell'asse della fibra. Questi sono stati poi sollecitati sotto diverse condizioni di carico tra cui quella di taglio trasverso (Fig. 8.2).

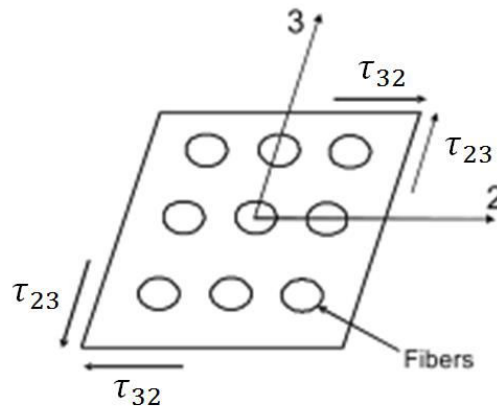


Fig. 8.2: Deformazione a taglio trasverso imposta

In Fig. 8.3 vengono riportati i risultati ottenuti in letteratura [9] per tale condizione di carico.

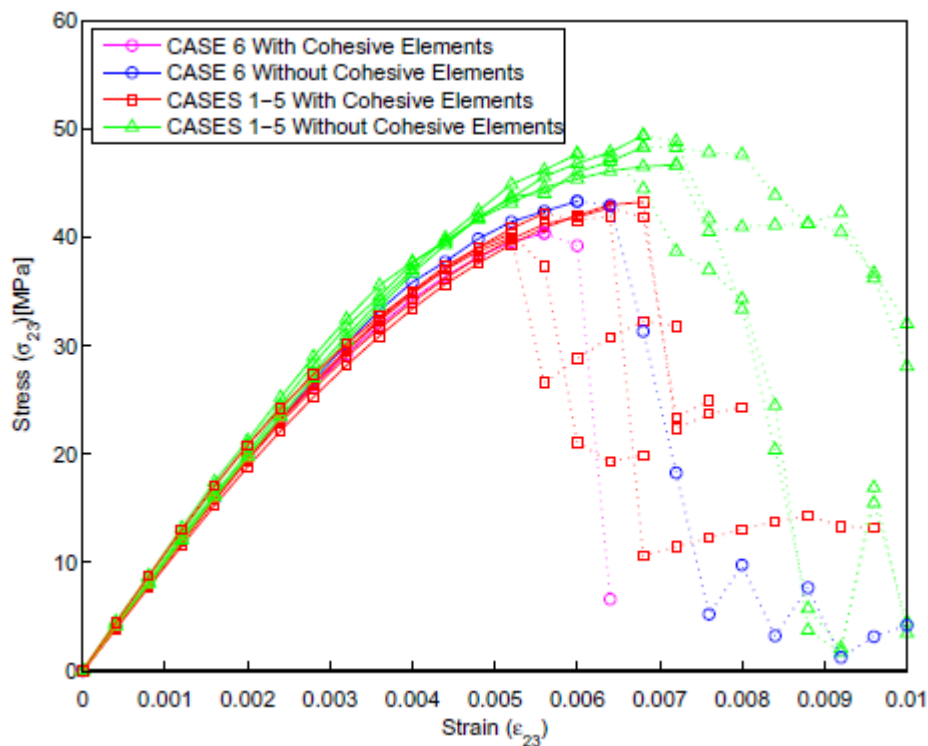


Fig. 8.3: Curve sforzo-deformazione per i modelli a taglio trasverso

Risulta evidente come la dispersione delle curve sforzo-deformazione per i vari modelli sia bassa, il che giustifica la volontà di prendere ad esempio uno

dei risultati, e implementarlo per la verifica del modello elasto-plastico sviluppato.

I risultati considerati per il futuro confronto con il modello elasto-plastico, sono quelli ottenuti per i modelli privi di elementi coesivi (curve verdi e blu). Verrà inoltre trascurato il tratto finale delle curve sforzo-deformazione, in cui si ha il drastico abbattimento delle rigidzze del composito in esame; il modello creato infatti, a differenza di quello di riferimento [9], non ingloberà alcun meccanismo di danneggiamento della matrice.

8.3 Realizzazione del modello elasto-plastico per il materiale composito

Per la realizzazione del modello elasto-plastico, si è partiti dalla scelta del modello di riferimento da riprodurre. Nello specifico, tra i cinque modelli sopra citati, è stato scelto il caso A; in Fig. 8.4 si riporta un confronto tra questo e quello riprodotto.

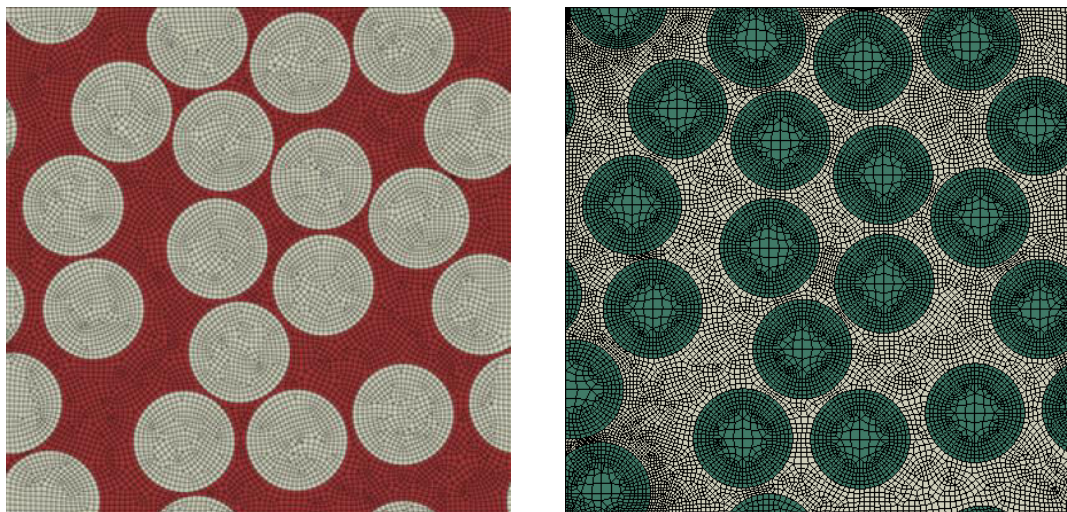


Fig. 8.4: Confronto tra il modello di letteratura di riferimento (a sinistra) e il modello realizzato (a destra)

I modelli, oltre ad avere geometria simile, sono stati realizzati in modo tale da presentare un numero di elementi confrontabile, così da non avere particolari differenze nelle risposte. Nello specifico, per ogni sezione il numero di elementi è quello riportato in tabella 8.1.

Modello	CASO A	Riproduzione
Numero di elementi	19000	16000

Tab. 8.1: Confronto del numero di elementi tra i due modelli

Nel modello è stata riservata particolare attenzione alla modellizzazione dei meati più sottili tra le fibre (zone critiche per la soluzione), in cui è stato inserito un numero minimo di 3 elementi, al fine di poter rilevare anche eventuali gradienti delle grandezze di interesse in tali zone. In Fig. 8.5 si mostra un ingrandimento di un meato per comprendere meglio la taglia degli elementi utilizzati nel calcolo.

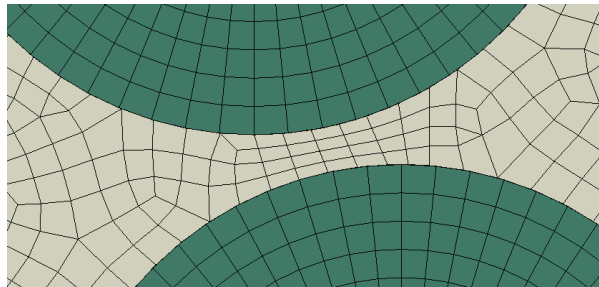


Fig. 8.5: Zoom della griglia di calcolo in un meato tra due fibre

Per quanto concerne i materiali, la matrice, realizzata in resina epossidica, è stata definita attraverso una UMAT (User MATerial) che ne riproducesse il comportamento elasto-plastico, la fibra di vetro invece è stata trattata come un materiale omogeneo isotropo elastico. In tabella 8.2 si riportano le proprietà di entrambi i materiali.

	Fibra di Vetro	Resina Epossidica
Modulo di Young	74000 Mpa	3760 Mpa
Modulo di Poisson	0.2	0.39
Tensione di snervamento	-	29 Mpa
Tensione di saturazione	-	122Mpa
Esponente di incrudimento	-	180

Tab. 8.2: Proprietà dei materiali impiegati

8.4 Risultati del modello elasto-plastico per il materiale composito

Definite le proprietà dei materiali e la geometria del modello, si è proceduto all'applicazione dei vincoli necessari per la riproduzione della deformazione di taglio trasverso desiderata. Tali vincoli sono stati espressi in termini di campi di spostamento imposti su facce, spigoli e vertici del modello.

L'analisi effettuata sul solido è stata di tipo statico non lineare; la risposta è stata osservata per un tempo sufficientemente lungo da permettere l'osservazione dell'evoluzione delle grandezze di interesse dal campo elastico lineare iniziale a quello elasto-plastico finale.

In Fig. 8.6 si osserva come il solido tende a distorcersi a causa dell'imposizione dei vincoli (tenendo però conto del fatto che nell'immagine sottostante la deformata è stata moltiplicata per un fattore di scala 20 al fine di renderla più evidente).

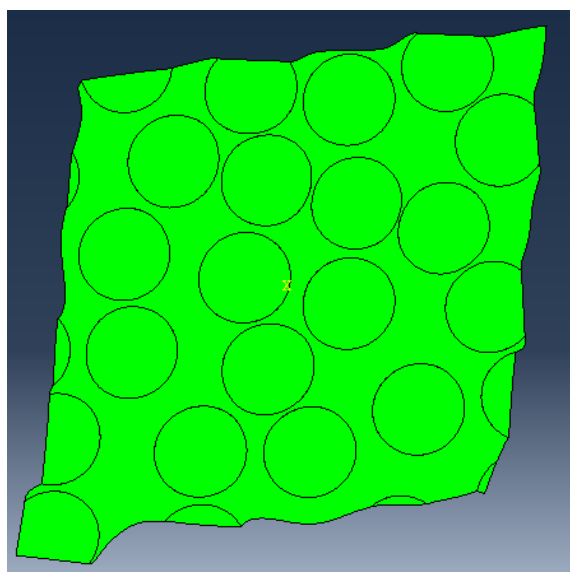


Fig. 8.6: Deformata del composito a taglio trasverso

Un risultato di particolare interesse è fornito dal confronto qualitativo tra le mappe della tensione di Von-Mises nel tratto puramente elastico, ad uno dei primi incrementi, e quelle della stessa tensione nel tratto elasto-plastico (considerando, in quest'ultimo caso, l'incremento finale avvenuti prima che il

software agli elementi finiti desse problemi di convergenza e interruzione della simulazione); tale confronto è riportato in Fig. 8.7.

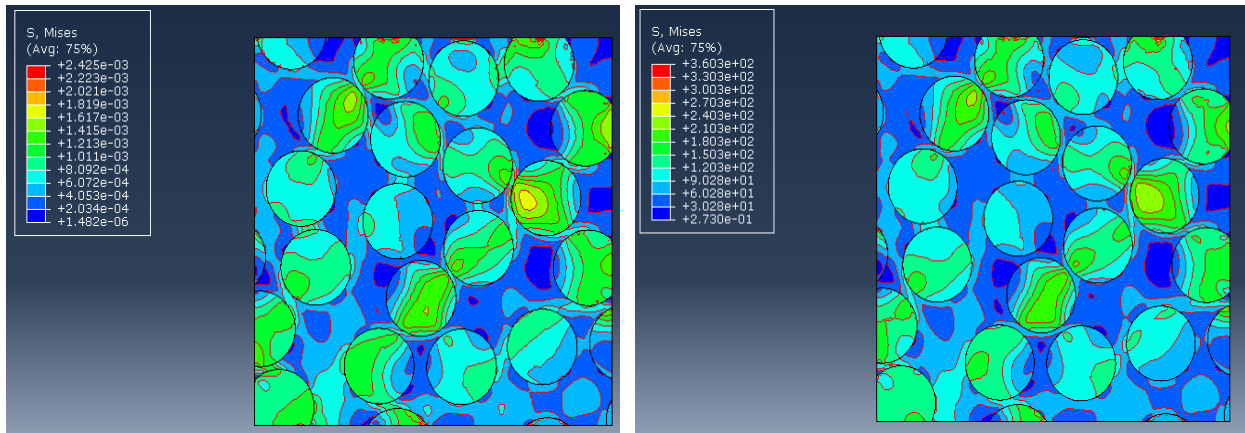


Fig. 8.7: Confronto tra l'andamento delle tensioni di Von Mises in campo elastico (a sinistra) e plastico (a destra)

Dai risultati mostrati in Fig. 8.7 si nota come il fenomeno di plasticizzazione produca nel solido una redistribuzione degli sforzi tra i vari elementi, al fine di rispettare la condizione di equilibrio. A conferma di ciò, si osserva (Fig. 8.8) che le varie componenti di tensione si ridistribuiscono a seguito dell'avvenuta plasticizzazione di alcuni elementi e, in particolare, tale redistribuzione risulta particolarmente marcata nella tensione di taglio trasverso ovvero la τ_{23} . Tale componente viene presa come parametro di confronto con il modello di riferimento, e sarà espressa in funzione della deformazione a taglio γ_{23} , al fine di poter estrapolare la curva sforzo-deformazione di relativa.

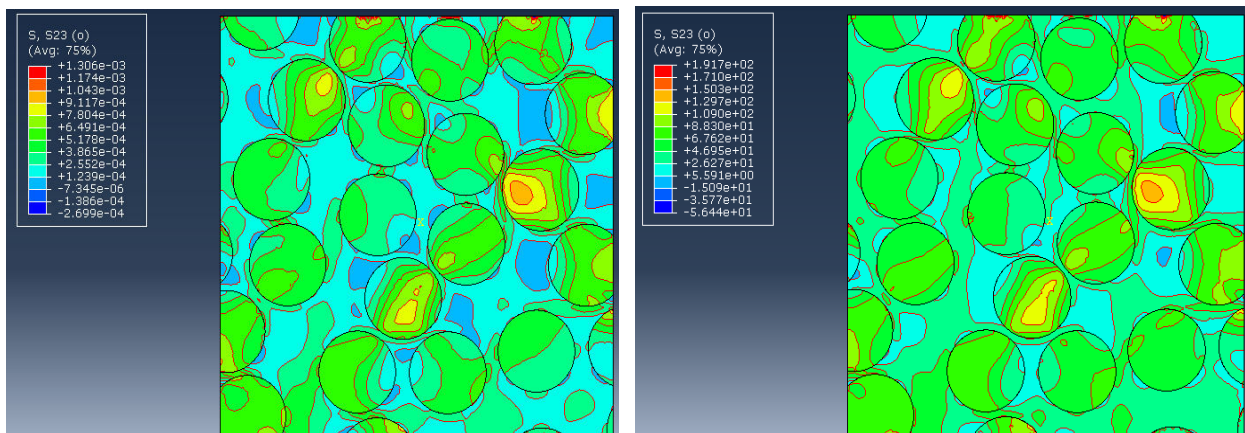


Fig. 8.8: Confronto tra l'andamento delle tensioni di taglio trasversali τ_{23} in campo elastico (a sinistra) e plastico (a destra)

Una volta appurato il raggiungimento della condizione di plasticizzazione, si è passati alla valutazione dell'entità di tale fenomeno fisico; in Fig. 8.9 si descrive l'evoluzione della superficie di snervamento durante la simulazione.

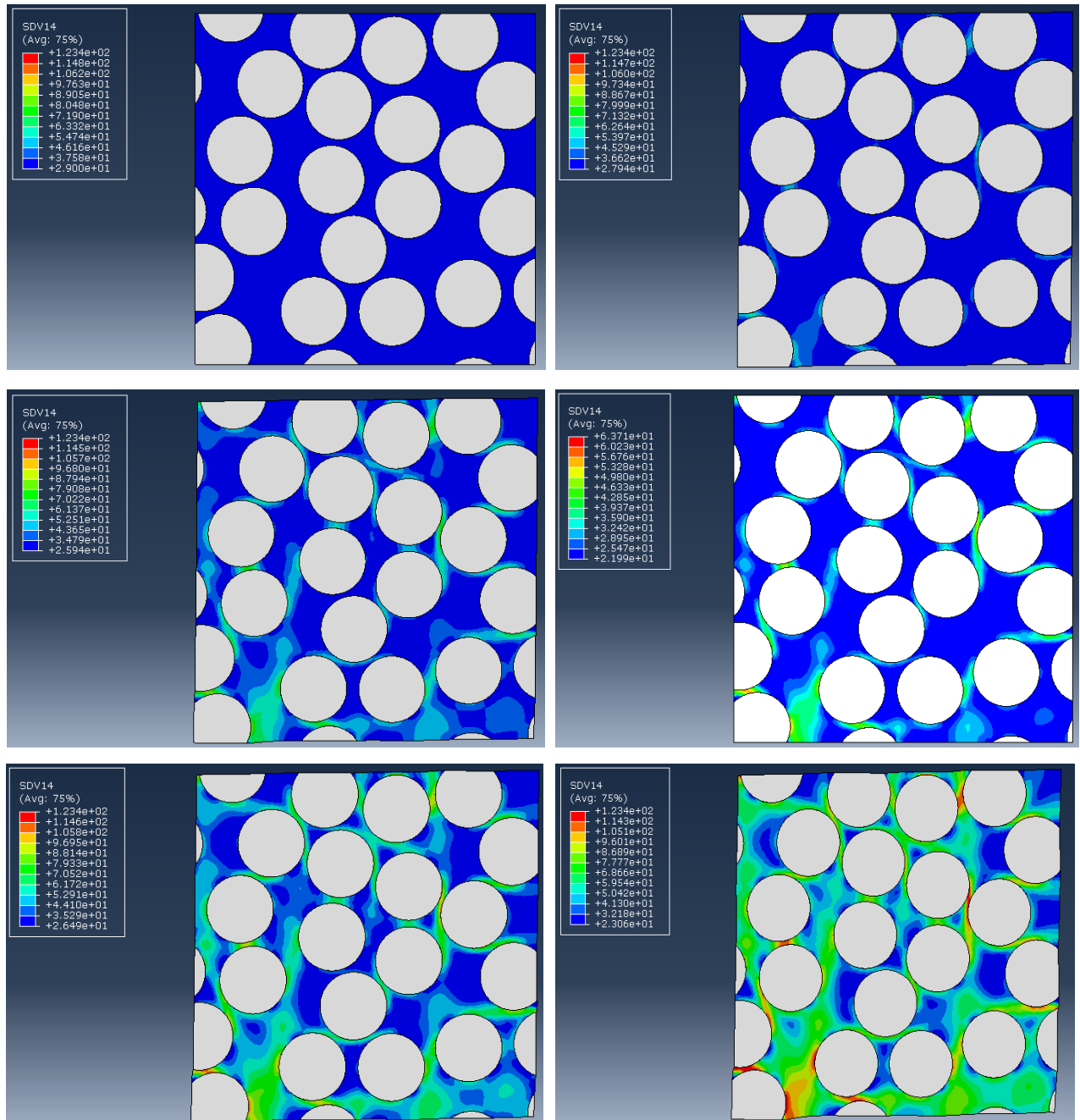


Fig. 8.9: Evoluzione temporale della superficie di snervamento durante la plasticizzazione

Dai risultati in Fig. 8.9 è possibile notare come, a seguito della deformazione di taglio trasverso, le porzioni di matrice che tendono a plasticizzare per prime e in modo più marcato sono quelle addensate nell'intorno della diagonale in trazione. Tale comportamento, data l'assenza di una

differenziazione nel criterio di snervamento tra il caso di trazione e quello di compressione, è da attribuire presumibilmente al fatto che, lungo tale diagonale, sono posizionati meati particolarmente sottili in cui si ha un fattore di intensificazione delle tensioni più elevato. La plasticizzazione in tali zone particolarmente “sfortunate” dà luogo ad una redistribuzione delle tensioni, che provoca una rapida propagazione dei meccanismi di plasticità lungo la diagonale.

8.5 Confronto dei risultati del modello elasto-plastico per il materiale composito

La fase finale del lavoro è stata dedicata all’extrapolazione delle curve sforzo-deformazione mediate sia per l’intero composito che per la sola matrice. In particolare è stata extrapolata una sola curva di riferimento rappresentativa dell’andamento delle curve sforzo-deformazione proposte nell’articolo [9] per il modello scelto. Ottenuta tale curva, si è passati all’extrapolazione di quella realizzata nell’ambito della simulazione; in particolare è stato attuato, per ogni incremento temporale della simulazione, un processo di omogeneizzazione volumetrica della tensione di interesse $\bar{\tau}_{23}$ attraverso la relazione:

$$\bar{\tau}_{23} = \frac{1}{V} \int_V \tau_{23_i}(x_1, x_2, x_3) dV = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \tau_{23_{i_{el}}} V_{el}$$

Analogo processo di omogeneizzazione è stato messo in atto per la deformazione associata $\bar{\gamma}_{23}$, attraverso la relazione:

$$\bar{\gamma}_{23} = \frac{1}{V} \int_V \gamma_{23_i}(x_1, x_2, x_3) dV = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{el}} \gamma_{23_{i_{el}}} V_{el}$$

Eseguiti tali calcoli, le curve ottenute per l’intero modello sono mostrate in Fig. 8.10.

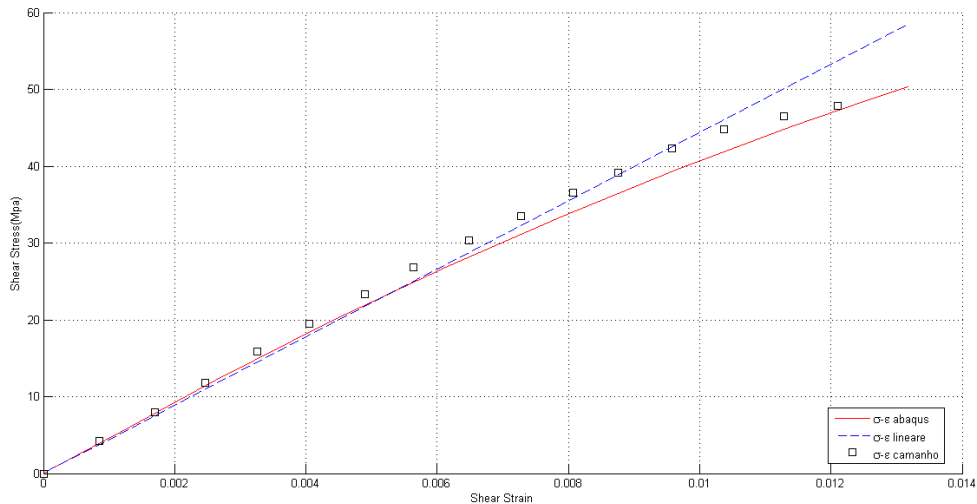


Fig. 8.10: Confronto tra le curve sforzo-deformazione medie del modello creato e di letteratura

Nel grafico sono rappresentate le curve sforzo-deformazione, relative alla deformazione a taglio imposta, del modello creato e di quello di letteratura, inoltre è stata rappresentata la curva sforzo deformazione relativa ad una risposta puramente lineare del modello. Dall'analisi del grafico si evince come sia il modello elasto-plastico proposto (curva rossa) che quello di letteratura presentino la risposta elasto-plastica attesa, in quanto si distanziano in maniera più o meno evidente dal comportamento lineare preso a riferimento. Le differenze fondamentali che si evincono tra la curva calcolata e quella di letteratura risiedono nel fatto che quest'ultima, nel tratto lineare, presenta una rigidità più elevata, mentre in campo plastico mostra una non linearità più pronunciata. Quest'ultima discrepanza è presumibilmente da attribuire all'insorgere, a seguito della completa plasticizzazione di alcuni elementi, di meccanismi di danneggiamento che tendono ad abbattere drasticamente e in maniera rapida la rigidità di questi elementi, il che si ripercuote in termini di risposta globale in un abbattimento sensibile della rigidità media del modello. Poiché il modello, attualmente, non prevede alcun meccanismo di danneggiamento, tale comportamento rimane presumibilmente non riproducibile.

A conferma di queste considerazioni si osservi cosa accade alla sola matrice durante l'applicazione della deformazione a taglio. Anche in questa circostanza, la curva sforzo-deformazione per la sola matrice [26] viene ottenuta attraverso il processo di omogeneizzazione prima citato, applicato però ai soli elementi di questa.

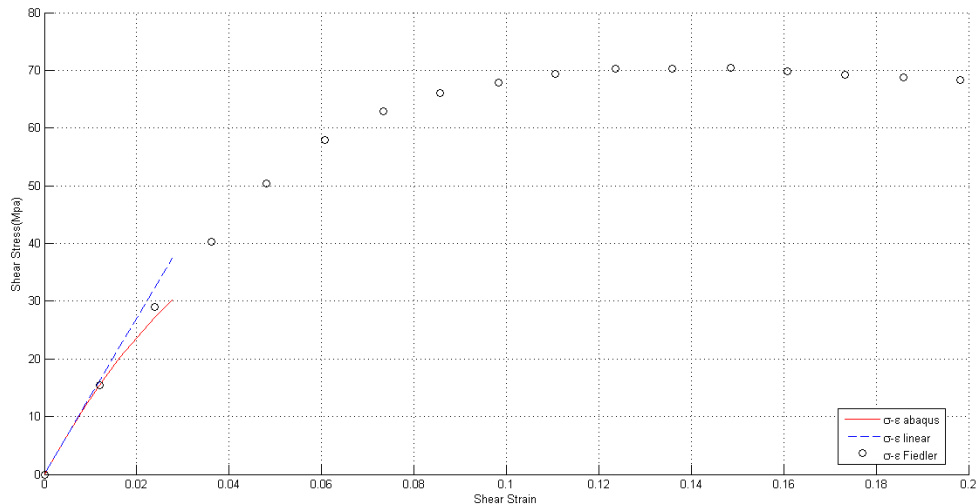


Fig. 8.11: Confronto tra le curve sforzo-deformazione della matrice nel modello creato e in quello di letteratura

In quest'ultimo caso la curva sforzo-deformazione della matrice è stata confrontata sia con quella associata al comportamento lineare a taglio, che con i dati sperimentali del comportamento a taglio puro (Fig. 8.11). Si noti come le non linearità della matrice siano più marcate rispetto a quelle del composito; ciò è ovvio in quanto la matrice è l'unica responsabile delle non linearità dell'intero modello. Si osserva infine che l'andamento della curva sforzo-deformazione a taglio tende a riprodurre, in modo abbastanza accettabile, l'evoluzione di quella sperimentale per un test di taglio puro.

8.6 Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti, è possibile affermare che il modello elasto-plastico realizzato per la sola matrice è capace di riprodurre una componente non lineare nelle curve sforzo-deformazione del composito, che risulta essere in accordo con la natura dei costituenti.

Aspetto positivo di tale modello è che il comportamento medio della matrice non si discosta molto da quello osservato sperimentalmente per la sola matrice; ciò è una prima verifica della correttezza della UMAT introdotta.

Per quanto concerne il confronto diretto con il modello di letteratura [9], si nota subito che il primo limite del codice sviluppato risiede nell'assenza di un modello di danneggiamento nella matrice che permetta di definire una

condizione di collasso del materiale. Un altro limite riguarda la scelta della superficie di snervamento che, come già accennato, non tiene conto, per definizione, della componente idrostatica del tensore degli sforzi. Tale limite, oltre a non permettere un'affidabile riproduzione dei risultati per i materiali polimerici (in cui la componente idrostatica non è trascurabile), non consente di estrapolare le curve sforzo-deformazione nei casi in cui le condizioni al bordo periodiche diano luogo ad una variazione volumetrica del volume di riferimento. Ciò rende inapplicabile il modello al calcolo delle curve sforzo-deformazione legate ai campi di deformazione estensionale; tuttavia esso conserva la sua applicabilità a tutti quei casi in cui i campi di deformazione portano a variazioni volumetriche intrinsecamente nulle, quali tutti i modelli di taglio.

Conclusioni e sviluppi futuri

A conclusione del lavoro presentato e in seguito all'analisi e all'interpretazione dei risultati delle simulazioni effettuate, è possibile trarre delle considerazioni finali in merito, evidenziando caratteristiche positive e limitazioni del modello costitutivo elasto-plastico non lineare sviluppato.

E' stata ampiamente dimostrata, grazie al confronto con una delle più note teorie di letteratura [6,7] per il calcolo delle costanti elastiche di un composito unidirezionale, la capacità del modello puramente elastico di riprodurre perfettamente il comportamento elastico lineare di un materiale composito in resina epossidica e fibre unidirezionali.

Risulta inoltre evidente che, al fine di riprodurre nella loro totalità le curve sforzo-deformazione dei materiali in esame, è necessario definire un modello di comportamento meccanico non lineare dei costituenti; nel caso di proprietà dominate dalla matrice, in particolare, è sufficiente introdurre il comportamento elasto-plastico della sola resina epossidica.

Il comportamento non lineare della matrice è stato descritto attraverso la costruzione di un modello elasto-plastico che avesse come superficie di snervamento quella di Von Mises e, come legge di incrudimento, una legge esponenziale. E' noto che la scelta del criterio di Von Mises non è particolarmente idonea alla modellazione di materiali polimerici, poiché non tiene conto della componente idrostatica del tensore degli sforzi, componente non trascurabile per tali materiali. Si prevede pertanto un futuro ampliamento dell'attuale modello, mediante l'introduzione e l'impiego di superfici di snervamento più consone al materiale in esame, quali la superficie di Tschoeg.

Realizzato e validato il suddetto modello numerico di plasticità, si è passati all'implementazione di una subroutine che permettesse di riprodurre tale comportamento in un software agli elementi finiti (ABAQUS). Dall'analisi FEM condotta sulla sola matrice si è dimostrato come questa rispetti abbastanza fedelmente i dati sperimentali, almeno per quanto concerne il suo comportamento elasto-plastico a taglio e a compressione.

L'inserimento del modello non lineare della sola matrice in un modello FEM di materiale composito unidirezionale, ha permesso la generazione di un modello complessivo geometricamente identico ad uno di letteratura [], ma differente nel modello di plasticità adottato e nel meccanismo di

danneggiamento. Dal confronto fra i due modelli, effettuato nell'ambito di uno stato di sollecitazione di taglio puro, si è dedotto che, sebbene entrambi forniscano per l'intero composito una risposta non lineare, sono comunque presenti delle differenze nella risposta complessiva. La causa di tale discrepanza è da attribuirsi alla presenza di un modello di danneggiamento nel caso di letteratura attualmente non implementato; infatti se si analizzano le curve sforzo-deformazione medie per la sola matrice nel modello complessivo, si ottengono dei risultati in accordo con quelli sperimentali. L'incertezza inerente la ragione dei due diversi comportamenti, ha richiesto la pianificazione di future modifiche che permettano di inglobare un opportuno modello di danneggiamento. Una volta ottenuta la struttura del modello elasto-plastico definitivo sia per la matrice che per l'intero composito, si dovrà provvedere alla validazione dello stesso su tutti i possibili campi di deformazione al fine di garantirne la versatilità di impiego necessaria.

Nell'ambito degli sviluppi futuri del modello di materiale composito, un passo fondamentale verso la completezza dello stesso sarà inoltre la modellizzazione dell'interfase tra fibra e matrice mediante l'introduzione di elementi.

Bibliografia

- [1] E. J. Barbero, *Introduction to Composite Materials Design*, CRC Press, 2011
- [2] J. Llorca, C. Ganzalez, J. M. Molina-Aldareguia, J. Segurado, R. Seltzer, F. Sket, M. Rodriguez, S. Sadaba, R. Munoz, L.P. Canal, *Multiscale Modelling of Composite Materials: a roadmap towards virtual testing*, Advanced Materials, 2011
- [3] E. J. Barbero, *Finite Elements Analysis of Composite Materials*, CRC Press, 2007
- [4] R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor and Francis, 1975
- [5] S. W. Tsai, H. T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Technomic, 1980
- [6] R. Luciano, E. J. Barbero, *Formulas for the Stiffness of Composites with Periodic Microstructure*, International Journal of Solids and Structures, 1995
- [7] R. Luciano, E. J. Barbero, *Analytical Expressions for the Relaxation Moduli of Linear Viscoelastic Composites with Periodic Microstructure*, Journal of Applied Mechanics, 1995
- [8] A. R. Melro, P. P. Camanho, F. M. Andrade Pires, S. T. Pinho, *Micromechanics Analysis of Polymer Composites Reinforced by Unidirectional Fibres: Part 1 – Constitutive Modelling*, International Journal of Solids and Structures, 2013
- [9] A. R. Melro, P. P. Camanho, F. M. Andrade Pires, S. T. Pinho, *Micromechanics Analysis of polymer Composites Reinforced by Unidirectional Fibres: Part 2 – Micromechanical Analysis*, International Journal of Solids and Structures, 2013
- [10] R. Luciano, E. Sacco, *Variational Methods for Homogenization of Periodic Media*, European Journal of Mechanics – A/Solids, 1998
- [11] E. J. Barbero, *Computed Aided Design for Composites*, <http://www.mae.wvu.edu/barbero/cadec.html>

- [12] E. J. Barbero, <http://www.mae.wvu.edu/barbero/feacm/>
- [13] G. Longo, *Models and Methods to Simulate Low Energy Impact Damage on Composite Aerospace Structures*, PhD Thesis in Aerospace Engineering, 2011
- [14] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc. 1969
- [15] J. Lemaitre, J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990
- [16] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, 1997
- [17] V. Fiorante, *Dispense di geotecnica 2*, 2013
- [18] A. S. Khan, S. Huang, *Continuum Theory of Plasticity*, Wiley, 1995
- [19] E. Voce, *A Practical Strain-Hardening Function*, *Metallurgia*, 1955
- [20] H. Tresca, *Memoire sur l'ecoulement des corps solides soumis à de fortes pressions*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1864
- [21] D. Banabic, *Sheet Metal Forming Processes*, Springer, 2010
- [22] R. Von Mises, *Mechanik der festen Korper im plastisch deformablen Zustand*, *Gottin. Nachr. Math. Phys.*, 1913
- [23] N. S. Ottosen, M. Ristinmaa, *The Mechanics of Constitutive Modeling*, Elsevier, 2005
- [24] D. C. Drucker, W. Prager, *Soil Mechanics and Plastic Analysis for Limit Design*, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952
- [25] N. W. Tschoegl, *Failure Surface in Principal Stress Space*, *Journal Of Polymer Science*, 1971
- [26] B. Fiedler, M. Hojo, S. Ochiai, K. Schulte, M. Ando, *Failure Behavior of an Epoxy Matrix under Different Kinds Of Static Loading*, *Composites Science and Technology*, 2001
- [27] W. Ramberg, W. R. Osgoood, *Description of Stress – Strain Curves by three Parameters*, National Advisory Committee for Aeronautics, 1943

- [28] A. Pandolfi, *An introduction to Nonlinear Solid Mechanics*, Doctoral School, Politecnico di Milano, 2012
- [29] L. L. Yaw, *Nonlinear Static 1D Plasticity – Various Forms Of Isotropic Hardening*, Walla Walla University, 2012
- [30] Hibbit, Karlsson, I. Sorensen, *ABAQUS 6.11 Standard Users Manual*
- [31] AAVV., *Writing Users Subroutines with ABAQUS*
- [32] A. Panteghini, *Appunti sull'implementazione tramite UMAT di un modello costitutivo elasto-plastico alla Von Mises con incrudimento lineare isotropo*, Brescia, 2012
- [33] D. Trias, J. Costa, J. A. Mayugo, J. E. Hurtado, *Random Models versus Periodic Models for Fiber Composites*, Computational Materials Science, 2006
- [34] A. R. Melro, P. P. Camanho, S. T. Pnho, *Generation of Random Distributions of Fibers in Long Fibre Reinforced Composites*, Composites Science and Tecnology, 2008
- [35] W. Prager, *Recent Developments in the Matheatical Theory of Plasticity*, Journal of Applied Phisics, 1949

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutti coloro che hanno partecipato alla stesura di questa tesi.

Innanzitutto desidero ringraziare il Prof. Daniele Fanteria per la sua disponibilità e cortesia mostratemi durante tutta la mia attività di tesi, e per l'aiuto e il confronto quotidiano indispensabili per la realizzazione di questo lavoro .

Desidero ringrazie il Dott. Enrico Panettieri per avermi fatto da guida durante tutti questi mesi condivisi insieme, per essere stato sempre disponibile ad aiutarmi nel risolvere ogn i problema e per essersi sempre rapportato con me in modo amichevole e confidenziale.

Ringrazio inoltre il mio Drago, Dali, colei che ha reso possibile che tutti i miei pensieri e i miei risultati accademici prendessero forma in questa tesi e che, più di ogni altra persona, mi ha supportato e sopportato in questi ultimi 4 anni e mezzo e che specialmente in quest'ultimo periodo, uno dei più difficili per entrambi, si è dedicata completamente a me e alla realizzazione di questo mio sogno. Grazie amore mio.

Vorrei poi ringraziare i miei nonni e mio padre, che hanno sempre creduto in me sostenendomi e rendendo lo studio la mia unica preoccupazione e senza la cui guida non avrei mai potuto raggiungere questo traguardo.

Un grazie è rivolto anche a mia madre e Pino per essersi riavvicinati in quest'ultimo periodo e avermi donato il sostegno di cui avevo bisogno.

Desidero ringraziare i miei zii e mia cugina Letizia che durante questi anni di università mi hanno permesso di riscoprire il loro affetto e la loro stima, confidando sempre nelle mie capacità e condividendo le mie gioie.

Ringrazio anche Cristina per il sostegno e l'affetto dimostrati in questi anni.

Vorrei poi ringraziare la mia seconda famiglia, la mia squadra, che mi ha insegnato a stare al mondo e a capire il significato delle parole amicizia e sacrificio .

Un ringraziamento particolare va a Fede e Leo per aver condiviso sogni, progetti ma anche grandi "boiate", e esserci sempre fatti da spalla l'un l'altro.

Vorrei infine ringraziare le persone che in questi anni universitari mi hanno sopportato, assecondando le mie stranezze e fisse quotidiane. Ringrazio i miei aerocoinquilini Capa, Paolo e, in particolare, Ale con cui ho trascorso ogni minuto di questa esperienza universitaria.

Un grazie di cuore anche a Dani e Frà, che si sono rivelati dei veri punti di riferimento durante il mio percorso universitario e con cui ho instaurato un sincero e forte rapporto di amicizia.

Grazie anche a tutti i nuovi amici e colleghi incontrati in questi anni, Orsone, Cartesio, Marta, Silvia M., Silvia G., Francesca e Yuri, Trobb e Chiara, Ianne, Gigi e Maddy, Mich, Becks, Tenaglia, i ragazzi del centro di calcolo e tutti coloro che mi hanno accompagnato in questa avventura.