UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Teoria di scattering per NLS

11 aprile 2014

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Candidato
Felice Iandoli
iandoli@mail.dm.unipi.it

Relatore
Dott. Nicola Visciglia
Università di Pisa

Controrelatore
Prof. Vladimir Georgiev
Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Indice

Notazioni

$\Re(z)$	la parte reale del numero complesso z;
$\Im(z)$	la parte immaginaria del numero complesso z;
$\mathbb{1}_E$	la funzione definita da $\mathbb{1}_E(x) = 1$ se $x \in E$ e $\mathbb{1}_E(x) = 0$ altrimenti;
$C(E,F)$	lo spazio delle funzioni continue da uno spazio topologi E ad uno spazio topologico F;
$C_c(E,F)$	lo spazio delle funzioni continue $E \to F$ aventi supporto compatto in E;
$\mathscr{L}(E,F)$	lo spazio di Banach degli operatori lineari e continui dallo spazio di Banach E allo spazio di Banach F, dotato della topologia indotta dalla norma;
$\mathscr{L}(E)$	lo spazio $\mathscr{L}(E,E)$;
X'	il duale topologico dello spazio X;
$X \hookrightarrow Y$	se $X \subset Y$ e la mappa di immersione è continua;
$\overline{E}$	la chiusura dell'insieme E;
$\partial_t u$	la derivata temporale $\partial_t u = u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt}$;
$\frac{\partial u}{\partial x_i}$	la derivata spaziale $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{du}{dx_i}$;
∇u	il gradiente $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$
Δ	il laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
$\mathscr{F}$	la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^N$, definita da $\mathscr{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx$;
$\widehat{u} = \mathscr{F}u$;	
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$	lo spazio di Schwartz, cioè lo spazio delle funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ tali che per ogni intero non negativo m ed ogni multiindice α $$p_{m,\alpha}(u) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+\|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \left|D^\alpha u(x)\right| < \infty;$$
$L^p(\Omega)$	lo spazio di Banach delle funzioni misurabili $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che $\int_\Omega \|u(x)\|^p\, dx < \infty$ se $1 \le p < \infty$, oppure $\sup\mathrm{ess}_\Omega \|u\| < \infty$ se $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ è dotato della norma $$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega \|u(x)\|^p\, dx\right)^{1/p} & \text{se } p < \infty \\ \sup\mathrm{ess}_\Omega \|u\| & \text{se } p = \infty; \end{cases}$$

p' l'esponente coniugato di Hölder, ossia tale che $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$;

$W^{m,p}(\Omega)$ lo spazio di Banach delle funzioni misurabili $u:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che $D^\alpha u\in L^p(\Omega)$ nel senso delle distribuzioni per ogni multiindice $|\alpha|\le m$;

$W^{m,p}(\Omega)$ è munito della norma $\|u\|_{W^{m,p}}=\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha u\|_{L^p}$;

$H^s(\mathbb{R}^N)$ lo spazio di Banach $\left\{f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}\,\middle|\,\|f\|^2_{H^s}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi<+\infty\right\}$, ove $s\in\mathbb{R}$;

$\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ lo spazio di Banach $\left\{f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}\,\middle|\,\|f\|^2_{H^s}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\xi|^2\right)^s|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi<+\infty\right\}$, ove $s\in\mathbb{R}$;

$L^p(I,X)$ lo spazio di Banach delle funzioni misurabili $u:I\mapsto X$ tali che $\int_I\|u(t)\|^p_X\,dt<\infty$ se $1\le p<\infty$, oppure $\sup\mathrm{ess}_I\|u\|_X<\infty$ se $p=\infty$, $L^p(I,X)$ è dotato della norma

$$\|u\|_{L^p=}\begin{cases}\left(\int_I\|u(t)\|^p_X\,dx\right)^{1/p} & \text{se } p<\infty\\ \sup\mathrm{ess}_I\|u(t)\|_X & \text{se } p=\infty;\end{cases}$$

Introduzione.

L'equazione di Schrödinger non lineare ha ricevuto un notevole interesse da parte dei matematici negli ultimi trenta anni grazie alle sue applicazioni in ottica non lineare ed al suo ruolo centrale in meccanica quantistica.

Nella tesi ci occuperemo dell'equazione di Schrödinger nonlineare (NLS) posta sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^N$, con condizione iniziale nello spazio di Sobolev H^1 e nonlinearità di tipo potenza pura. Più precisamente studieremo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u \pm u|u|^\alpha = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}, \tag{0.0.1}$$

dove u_t indica la derivata rispetto al tempo, Δ il laplaciano rispetto alle variabili spaziali, $N \geq 1$ e $\alpha > 0$ è un numero reale su cui saranno imposte delle limitazioni in dipendenza dalla dimensione N.
Tre questioni fondamentali sono collegate al problema di Cauchy (0.0.1):
1) buona positura locale (esistenza ed unicità della soluzione per intervalli di tempi piccoli $(-T,T)$ dove $T = T(\|\varphi\|_{H^1}) > 0$);
2) buona positura globale (esistenza ed unicità della soluzione per tutti i tempi);
3) comportamento asintotico della soluzione per $t \to \pm\infty$ (ovviamente ciò presuppone che la soluzione sia definita per tutti i tempi).

Riguardo il punto 1) mostreremo che se $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ per $N \geq 3$ ed $0 < \alpha < \infty$ per $N = 1,2$ allora il problema (0.0.1) è ben posto localmente.
Il punto 2) è intimamente connesso al punto 1) ed alla conservazione della massa e dell'energia:

$$M(u(t)) = \int |u(t)|^2 dx = \int |\varphi|^2 dx;$$

$$E_\pm(u(t)) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx \mp \frac{1}{\alpha+2}\int |u|^{\alpha+2} dx = E_\pm(\varphi).$$

Notiamo che l'energia dipende dal segno della nonlinearità, e risulta definita positiva nel caso in cui il segno della nonlinearità sia negativo. In tal caso si dice che l'equazione è *defocalizzante*, in caso contrario diremo che è *focalizzante*. Quindi per NLS defocalizzante la norma H^1 della soluzione non può esplodere in tempo finito, e quindi dalla buona positura locale segue la buona positura globale. Nel caso focalizzante la situazione è complicata dal fatto che l'energia preservata non è più definita positiva e quindi si apre uno scenario più complesso: se $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ allora le soluzioni di NLS focalizzante sono globali; se $\frac{4}{N} \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$

per $N \geq 3$ e $\frac{4}{N} \leq \alpha < \infty$ per $N = 1,2$, allora esistono soluzioni di NLS focalizzante la cui norma H^1 scoppia in tempo finito; se la norma del dato iniziale φ è piccola in H^1 allora le soluzioni di NLS focalizzante sono globali se $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ per $N \geq 3$ ed $0 < \alpha < \infty$ per $N = 1,2$.

Riguardo il punto 3) ci concentreremo sulla proprietà seguente:

$$\exists \varphi_\pm \text{ s.t. } \| u(t,x) - e^{it\Delta}\varphi_\pm \|_{H^1} \to 0 \text{ per } t \to \infty. \tag{0.0.2}$$

Sostanzialmente la suddetta proprietà indica che l'effetto nonlineare è trascurabile rispetto all'effetto lineare per grandi tempi. Ricordiamo che (0.0.2) è stata provata per NLS defocalizzante nei lavori classici di Ginibre e Velo per $N \geq 3$ sotto l'ipotesi $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ e da Nakanishi per $N = 1,2$ sotto l'ipotesi $\frac{4}{N} < \alpha < \infty$.
È facile provare che i risultati di Ginibre-Velo e di Nakanishi appena citati possono essere estesi ad NLS focalizzante sotto l'ipotesi di piccolezza del dato iniziale in H^1. D'altra parte nel caso focalizzante esistono soluzioni globali e periodiche in tempo della forma $e^{it}Q(x)$, dove $Q(x)$ è l'unica soluzione del problema ellittico

$$-\Delta Q + Q = Q^{1+\alpha}, \quad Q \in H^1, \quad Q > 0. \tag{0.0.3}$$

Ovviamente per tali soluzioni periodiche la proprietà (0.0.2) non è valida.
Il lavoro principale della tesi consiste nel dare condizioni concrete (che non si riducano alla sola ipotesi di piccolezza) sul dato iniziale che garantiscano l'esistenza globale e la validità della proprietà (0.0.2) per NLS focalizzante. Più precisamente esibiremo una regione aperta in H^1 (che contenga un intorno della soluzione nulla), descritta con l'ausilio della soluzione fondamentale $Q(x)$ data da (0.0.3), in cui si abbia esistenza globale e sia soddisfatta la proprietà (0.0.2).
La tecnica utilizzata è completamente diversa rispetto a quella di Ginibre-Velo e di Nakanishi nel caso defocalizzante. Infatti il segno della nonlinearità nel caso focalizzante rende poco utili le classiche stime di Morawetz che giocano un ruolo fondamentale nel caso defocalizzante. Pertanto sarà seguita una strategia diversa .
Più precisamente un punto di vista assolutamente nuovo su questo tipo di problemi è stato introdotto da Kenig-Merle tramite il metodo di concentrazione-compattezza/rigidità. Questa tecnica può essere interpretata come un'implementare a livello dei problemi di evoluzioni della celebre tecnica di concentrazione-compattezza introdotta da P.L. Lions per studiare la mancanza di compattezza nell'immersione di Sobolev $H^1 \subset L^p$.

La tesi è divisa in due capitoli. Nel primo ci occupiamo di stabilire la buona positura locale del problema. Studiamo inoltre la buona positura globale ed il comportamento asintotico per l'equazione focalizzante sotto l'ipotesi di piccolezza del dato iniziale. Nel secondo ci occupiamo esclusivamente dell'equazione focalizzante. Nelle prime due sezioni enunciamo e dimostriamo il teorema principale della tesi supponendo veri tutti i risultati tecnici che sono dimostrati nel dettaglio nelle successive cinque sezioni.

Capitolo 1

Risultati classici.

1.1 Equazione lineare.

In questa sezione ci occupiamo del problema

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}. \tag{LS}$$

Una semplice applicazione della trasformata di Fourier permette di provare il seguente teorema.

Teorema 1.1.1. *Per ogni $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $s \geq 0$, esiste un'unica soluzione $u(t,x)$ di* (LS) *tale che $u(t,x) \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{s-2}(\mathbb{R}^N))$. Inoltre vale*

$$u(t,x) = \mathscr{F}^{-1}(\hat{u}(t,\xi)) = \mathscr{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{\varphi}\right). \tag{1.1.1}$$

Definizione 1.1.2. *Definiamo il gruppo di Schrödinger $\left\{e^{it\Delta}\right\}_{t\in\mathbb{R}} : H^s(\mathbb{R}^N) \mapsto H^s(\mathbb{R}^N)$ come*

$$e^{it\Delta}\varphi = \mathscr{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{\varphi}\right). \tag{1.1.2}$$

La notazione sopra è giustificata dal fatto che

- $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$ con $\left(e^{it\Delta}\right)^{-1} = e^{-it\Delta}$
- $e^{i0\Delta} = 1$.

Osserviamo inoltre che $\left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{H^s} = \|\varphi\|_{H^s}$, infatti

$$\begin{aligned} \left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|e^{-it|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Lemma 1.1.3. *Se $t \neq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e $p' \in [1,2]$, allora $e^{it\Delta}: L^{p'}(\mathbb{R}^N) \mapsto L^p(\mathbb{R}^N)$ è un operatore continuo e*

$$\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^p} \leq C(N,p)\,|t|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)} \left\|\varphi\right\|_{L^{p'}}. \tag{1.1.3}$$

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato precedentemente che $e^{it\Delta}: L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\mathbb{R}^N)$ è un'isometria. D'altra parte

$$\begin{aligned}\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^\infty} &= \left\| C_N \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{\sqrt{(it)^N}} \star \varphi \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \left\| C_N \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{\sqrt{(it)^N}} \right\|_{L^\infty} \left\|\varphi\right\|_{L^1} \leq C|t|^{-\frac{N}{2}} \left\|\varphi\right\|_{L^1},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\mathscr{F}^{-1}\left(e^{it|\xi|^2}\right) = C_N \frac{e^{i|x|^2/4t}}{\sqrt{(it)^N}}$. Usando il Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin otteniamo

$$e^{it\Delta}: L^{p'}(\mathbb{R}^N) \mapsto L^p(\mathbb{R}^N) \text{ con } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

e

$$\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^p} \leq \left(C|t|^{-\frac{N}{2}}\right)^{1-\theta} \left\|\varphi\right\|_{L^{p'}} = C|t|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)} \left\|\varphi\right\|_{L^{p'}},$$

dove

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} \text{ e } 1-\theta = 1-\frac{2}{p} = \frac{1}{p'}-\frac{1}{p}.$$

□

Corollario 1.1.4. *Sia $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $r \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right)$ se $N \geq 3$, $r \in (2,\infty)$ se $N=2$ e $r \in (2,\infty]$ se $N=1$. Allora si ha*

$$\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^r} \xrightarrow{t\to\pm\infty} 0. \tag{1.1.4}$$

Dimostrazione. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora si ha $\left\|e^{it\Delta} f\right\|_{L^r} \leq C|t|^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{2}{r}\right)} \left\|f\right\|_{L^{r'}}$. Sia $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ una successione di funzioni tale che $\varphi_n \to \varphi$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\left\|\varphi_{\bar{n}} - \varphi\right\|_{H^1} < \varepsilon$. Ricordando il teorema di immersione di Sobolev e che $e^{it\Delta}$ è un'isometria di $H^1(\mathbb{R}^N)$ abbiamo:

$$\left\| e^{it\Delta}\varphi - e^{it\Delta}\varphi_{\bar{n}} \right\|_{L^r} \leq C \left\|\varphi - \varphi_{\bar{n}}\right\|_{H^1} < \varepsilon.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^r} &\leq C\left\|\varphi_{\bar{n}} - \varphi\right\|_{H^1} + \left\| e^{it\Delta}\varphi_n \right\|_{L^r} \\ &\leq \varepsilon + C|t|^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{2}{r}\right)} \left\|\varphi_{\bar{n}}\right\|_{L^{r'}},\end{aligned}$$

concludiamo per l'aribitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

I risultati appena mostrati, fondamentali per i problemi di buona positura, mettono in risalto le proprietà dispersive dell'equazione lineare. Tuttavia non sono bastevoli, enunciamo quindi di seguito un teorema che fornisce delle stime spazio-tempo che prendono il nome di stime di Strichartz. Cominciamo con una definizione.

Definizione 1.1.5. *Diciamo che una coppia (q, r) è una coppia di Strichartz ammissibile se*

$$\frac{2}{q} = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{1.1.5}$$

e

$$\begin{cases} 2 \le r \le \frac{2N}{N-2} \text{ se } N \ge 3 \\ 2 \le r \le \infty \text{ se } N = 1 \\ 2 \le r < \infty \text{ se } N = 2 \end{cases} . \tag{1.1.6}$$

Per una dimostrazione del teorema seguente e del successivo corollario facciamo riferimento a [9].

Teorema 1.1.6 (Stime di Strichartz)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e per ogni coppia ammissibile (q, r)*
$$\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r)} \le C \left\|\varphi\right\|_{L^2} \text{ per ogni } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N). \tag{1.1.7}$$
2. *Se (γ, ρ) è una coppia ammissibile, allora esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni coppia ammissibile (q, r) e per ogni $F \in L^{\gamma'}([0, t], L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$*
$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s, x)\, ds \right\|_{L^q(I, L^r)} \le C \left\|F\right\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})}. \tag{1.1.8}$$
3. *Se (γ, ρ) è una coppia ammissibile, allora esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni coppia ammissibile (q, r) e per ogni $F \in L^{\gamma'}([t, \infty), L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$*
$$\left\| \int_t^\infty e^{i(t-s)\Delta} F(s, x)\, ds \right\|_{L^q(I, L^r)} \le C \left\|F\right\|_{L^{\gamma'}([t,\infty), L^{\rho'})}. \tag{1.1.9}$$

1.2 Equazione non lineare. Teoria locale.

In questo capitolo studiamo la buona positura locale del problema

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u \pm u|u|^\alpha = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} , \tag{NLS}$$

dove $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ e $N \ge 3$. Con dei conti formali si può dimostrare che se $u(t, x)$ è una soluzione del problema (NLS), allora per ogni $t \in [0, T]$ si ha

$$M(u(t)) := \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \left\|\varphi\right\|_{L^2}^2 := M(\varphi), \tag{massa}$$

$$\begin{aligned} E(u(t)) :=& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(x, t)|^2 \mp \frac{1}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x)|^{\alpha+2}\, dx \\ =& \frac{1}{2}\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}^2 \mp \frac{1}{\alpha+2}\left\|\varphi\right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} := E(\varphi), \end{aligned} \tag{energia}$$

$$P(u(t)) := \Im \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u(t,x)} \nabla u(t,x)\, dx = \Im \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi(x) \overline{\varphi(x)}\, dx := P(\varphi). \tag{momento}$$

Diciamo che l'equazione (NLS) è focalizzante quando in (NLS) compare il segno +, defocalizzante altrimenti.

Consideriamo l'equazione integrale associata a (NLS)

$$u(t) = e^{it\Delta}\varphi \pm i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^{\alpha}(s)\, ds. \tag{1.2.1}$$

Diciamo che il problema (1.2.1) è localmente ben posto su uno spazio di funzioni X, se per ogni $\varphi \in X$ esiste $T = T(\|\varphi\|_X) > 0$ ed un'unica soluzione $u \in C([0,T), X)$ di (1.2.1). Da ora in poi ci concentriamo sull'equazione (1.2.1). Nel teorema seguente dimostriamo l'unicità dell'eventuale soluzione se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.2.1 (Unicità)**.** *Sia* $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ *e* $N \geq 3$*. Se* u_1 *e* $u_2 \in C([0,T], H^1)$*, ove* $T > 0$*, sono due soluzioni di* (1.2.1) *allora* $u_1(t) - u_2(t) = 0$ *per ogni* $t \in [0,T]$.

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni del problema (1.2.1). Esse sono della forma

$$u_i(x,t) = e^{it\Delta}\varphi(x) \pm \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u_i|u_i|^{\alpha}(x,s)\, ds,\ i = 1,2.$$

Vogliamo provare che $u_1 - u_2 = 0$ facendo vedere che la sua norma L^p è nulla per qualche p. Sia dunque $p > 2$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \left\| e^{i(t-s)\Delta} \left(u_1|u_1|^{\alpha}(s) - u_2|u_2|^{\alpha}(s) \right) \right\|_{L^p} ds \\
&\overset{(1.1.3)}{\leq} C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\theta(p)}} \left\| u_1|u_1|^{\alpha}(s) - u_2|u_2|^{\alpha}(s) \right\|_{L^{p'}} ds \\
&\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\theta(p)}} \left\| |u_1 - u_2| \left(|u_1|^{\alpha} + |u_2|^{\alpha} \right) \right\|_{L^{p'}} ds.
\end{aligned}$$

A questo punto usiamo la disuguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ e continuiamo la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}
\cdots &\leq C \int_0^t \frac{1}{|t-s|^{\theta(p)}} \|u_1 - u_2\|_{L^p} \left(\left\| |u_1|^{\alpha} \right\|_{L^r} + \left\| |u_2|^{\alpha} \right\|_{L^r} \right) ds \\
&\leq C \sup_{s \in [0,t]} \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^p} \sup_{s \in [0,t]} \left(\|u_1\|^{\alpha}_{L^{\frac{\alpha p}{p-2}}} + \|u_2\|^{\alpha}_{L^{\frac{\alpha p}{p-2}}} \right) \int_0^t \frac{1}{|t-s|^{\theta(p)}} ds.
\end{aligned}$$

Imponendo che $\theta(p) = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{2}{p}\right) < 1$ si ottiene $\frac{N}{2} < \frac{p}{p-2}$ e dunque $\frac{\alpha p}{p-2} < 2^*$. Usando il fatto che H^1 si immerge in $L^{\frac{\alpha p}{p-2}}$ e che l'ultimo fattore può essere reso piccolo a piacere, otteniamo la tesi. □

Proviamo ora l'esistenza della soluzione.

Teorema 1.2.2 (Esistenza)**.** *Se* $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$*, allora per ogni* $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$*,* $N \geq 3$*, esiste* $T = T\left(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha\right) > 0$ *ed un'unica soluzione* u *dell'equazione integrale* (1.2.1) *sull'intervallo* $[-T, T]$ *tale che*

$$u \in C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^p([-T, T], W^{1,q}(\mathbb{R}^N)),$$

dove $(p, q) = \left(\frac{4(\alpha+2)}{(N-2)\alpha}, \frac{N(\alpha+2)}{N+\alpha}\right)$.

Ci serviremo del seguente lemma.

Lemma 1.2.3. *Consideriamo due spazi di Banach* $X \hookrightarrow Y$ *e* $1 < p, q \leq \infty$*. Siano* I *un intervallo,* $(f_n)_{n\geq 0}$ *una successione limitata in* $L^q(I, Y)$ *e* $f : I \mapsto Y$ *tale che* $f_n(t) \rightharpoonup f$ *in* Y *quasi ovunque in* I *per* $n \to \infty$*. Se* $(f_n)_{n\geq 0}$ *è limitata in* $L^p(I, X)$ *e* X *è riflessivo, allora* $f \in L^p(I, X)$ *ed inoltre*

$$\|f\|_{L^p(I,X)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p(I,X)}.$$

Dimostrazione del Teorema 1.2.2. Consideriamo lo spazio

$$E(T, a) = \{v \in C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^p([-T, T], W^{1,q}(\mathbb{R}^N)) : \sup_{[-T,T]} \|v(t)\|_{H^1} \leq a, \\ \|v\|_{L^p([-T,T],W^{1,q})} \leq a\}$$

con T ed a da determinare successivamente e con la distanza

$$d(u, v) = \|u - v\|_{C([-T,T],L^2)} + \|u - v\|_{L^p([-T,T],L^q)}.$$

Osserviamo che $(E(T, a), d)$ è uno spazio metrico completo. Per provarlo basta dimostrare che $E(T, a)$ è un sottospazio chiuso di $L^p([-T, T], W^{1,q}(\mathbb{R}^N))$. Sia $(u_n)_{n\geq 0}$ una successione di Cauchy in $E(T, a)$, allora $u_n \to u$ in $L^p([-T, T], L^q(\mathbb{R}^N))$. In particolare esiste una sottosuccessione, che denotiamo ancora con u_n, tale che $u_n(t) \to u(t)$ in L^q per quasi ogni $t \in [-T, T]$. Osservando che $2 < q < 2^*$ possiamo applicare due volte il Lemma 1.2.3 e dedurre che

$$u \in L^\infty((-T, T), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^p((-T, T), W^{1,q})$$

e che

$$\|u\|_{L^\infty([-T,T],H^1)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^\infty([-T,T],H^1)} \leq a$$

$$\|u\|_{L^p([-T,T],W^{1,q})} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p([-T,T],W^{1,q})} \leq a$$

e dunque $u \in E(T, a)$.

Dimostriamo che l'operatore

$$T_\varphi(u) = e^{it\Delta}\varphi \pm i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s) ds \tag{1.2.2}$$

definisce una contrazione su $E(T, a)$ per un'opportuna scelta di T ed a.

Osserviamo, anzitutto, che (p, q) è una coppia ammissibile di Strichartz. Fissato t si ha

$$\left\|u|u|^\alpha\right\|_{W^{1,q'}} = \left\|\nabla u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}} + \left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}} \overset{Hölder}{\leq} \|\nabla u\|_{L^q} \left\||u|^\alpha\right\|_{L^{\frac{q}{q-2}}} + \|u\|_{L^q} \left\||u|^\alpha\right\|_{L^{\frac{q}{q-2}}} \\ = \|\nabla u\|_{L^q} \|u\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha q}{q-2}}} + \|u\|_{L^q} \|u\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha q}{q-2}}} \overset{Sobolev}{\leq} C \|u\|^{\alpha+1}_{W^{1,q}}.$$

Notiamo che abbiamo potuto usare la disuguaglianza di Sobolev in quanto, per ipotesi, $q = \frac{N(\alpha+2)}{N+\alpha}$ e dunque $q^* = \frac{Nq}{N-q} = \frac{\alpha q}{q-2}$. Allora abbiamo

$$\left\| u|u|^\alpha \right\|_{L^{p'}([0,T],W^{1,q'})} \leq C \|u\|^{\alpha+1}_{L^{(1+\alpha)p'}([0,T],W^{1,q})}. \tag{1.2.3}$$

Inoltre, essendo $(1+\alpha)p' \leq p$, si ha che

$$\left\| u|u|^\alpha \right\|_{L^{p'}([0,T],W^{1,q'})} \leq C \|u\|^{1+\alpha}_{L^{p}([0,T],W^{1,q})} T^\theta, \tag{1.2.4}$$

ove $\theta = \theta(N,\alpha,p) > 0$. Usando quanto fatto otteniamo

$$\left\| T_\varphi(u) \right\|_{L^\infty([-T,T],H^1)} + \left\| T_\varphi(u) \right\|_{L^p((-T,T),W^{1,q})} \leq C \left\|\varphi\right\|_{H^1} + CT^\theta \|u\|^{1+\alpha}_{L^p([0,T],W^{1,q})}. \tag{1.2.5}$$

Scegliendo $a = 2C\left\|\varphi\right\|_{H^1}$ otteniamo che, affinché l'operatore T_φ mappi $E(T,a)$ in se stesso, basta che sia verificata la disuguaglianza

$$\frac{a}{2} + CT^\theta a^{\alpha+1} \leq a.$$

È evidente che basta scegliere T abbastanza piccolo e la disuguaglianza risulta vera. Quindi sappiamo che l'operatore $T_\varphi : E(T,a) \mapsto E(T,a)$ è ben definito, con lo stesso tipo di conti si può provare che è effettivamente una contrazione. $\square$

1.3 Esistenza globale.

Consideriamo il problema (NLS) con $\alpha \in \left(0, \frac{4}{N-2}\right)$. Abbiamo provato che esiste un'unica soluzione $u(t,x)$ definita in un intervallo di tempo $[0,T]$ con $T = T\left(\left\|\varphi\right\|_{H^1}\right)$. Vogliamo trovare delle condizioni tali per cui si abbia $T = \infty$. Si ha la dicotomia

- $T = +\infty$
- $T < \infty$ e $\lim_{t\to T^-} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$.

Nel caso defocalizzante dalla conservazione dell'energia si vede subito che:

$$\|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2} \leq E(\varphi).$$

Poiché $\varphi \in H^1$, grazie al teorema di immersione di Sobolev, si ha che $E(\varphi) < \infty$. Combinando, dunque, l'ultima disuguaglianza con la conservazione della norma L^2 si ha che esiste una costante M tale che:

$$\|u(t)\|_{H^1} = \|u(t)\|_{L^2} + \|\nabla_x u(t)\|_{L^2} \leq M,$$

dunque la soluzione $u(x,t)$ risulta essere globale per la dicotomia di sopra.
Il caso dell'equazione focalizzante è, invece, molto più complesso ed articolato. Infatti esistono delle soluzioni che hanno un intervallo di esistenza limitato, inoltre non si conoscono condizioni necessarie e sufficienti sul dato iniziale φ che assicurino che la rispettiva soluzione di (NLS) sia globale. In questa sezione dimostreremo che se la norma H^1 del dato iniziale

φ è abbastanza piccola allora la soluzione di (NLS) è globale. Forniremo nel capitolo successivo una condizione sufficiente più debole.
Usando la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg abbiamo:

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} &\leq C\,\|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^{\vartheta}\,\|u(t)\|_{L^2}^{1-\vartheta} \leq \\ &\leq C\,\|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^{\vartheta}\,\|\varphi\|_{L^2}^{1-\vartheta},\end{aligned}$$

dove $\vartheta = \frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}$. Quindi:

$$\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C\,\|u(t)\|_{L^2}^{\left[(\alpha+2)-\frac{N\alpha}{2}\right]}\,\|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}}. \tag{1.3.1}$$

Usando quest'ultima disuguaglianza, la conservazione dell'energia e della massa troviamo la stima:

$$\|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^2 \leq \left|E(\varphi)\right| + C\,\left\|\varphi\right\|_{L^2}^{\left[(\alpha+2)-\frac{N\alpha}{2}\right]}\,\|\nabla_x u(t)\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}}. \tag{1.3.2}$$

Esaminiamo ora diversi casi. Supponiamo dapprima che sia $\frac{N\alpha}{2} < 2$, vale a dire $\alpha < \frac{4}{N}$, ed introduciamo la funzione $y(t) := \|\nabla_x u(t)\|_{L^2}$. Abbiamo la seguente:

$$y^2 \leq \left|E(\varphi)\right| + C\,\left\|\varphi\right\|_{L^2}^{\left[(\alpha+2)-\frac{N\alpha}{2}\right]}\,y^{2-\gamma}, \tag{1.3.3}$$

con $\gamma \in (0,2)$. Quindi esiste M indipendente da T tale che:

$$\sup_{[0,T]} \|\nabla_x u\|_{L^2} \leq M, \tag{1.3.4}$$

dunque $\|u(t)\|_{H^1}$ è limitata e possiamo concludere che la soluzione è globale.
Nel caso in cui $\alpha = \frac{4}{N}$ la disuguaglianza (1.3.3) diventa:

$$y^2 \leq \left|E(\varphi)\right| + C\,\left\|\varphi\right\|_{L^2}^{\frac{4}{N}}\,y^2. \tag{1.3.5}$$

Pertanto abbiamo $\|\nabla u(t,x)\|_{L^2}$ sta nell'insieme

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^+ : y^2 - \left|E(\varphi)\right| - C\,\left\|\varphi\right\|_{L^2}^{\frac{4}{N}}\,y^2 \leq 0 \right\},$$

che è limitato se $\left\|\varphi\right\|_{L^2}$ è abbastanza piccola. Studiamo infine il caso $\alpha \in \left(\frac{4}{N}, \frac{4}{N-2}\right)$. Poniamo $\delta = \left\|\varphi\right\|_{L^2}$ e (1.3.3) diventa:

$$y^2 \leq \left|E(\varphi)\right| + C\delta^{\left[(\alpha+2)-\frac{N\alpha}{2}\right]}\,y^{2+\eta}, \tag{1.3.6}$$

ove $\eta > 0$. A questo punto osserviamo che $\|\nabla u(t,x)\|_{L^2}$ sta nell'insieme

$$\left\{ y \in \mathbb{R} : y^2 - \left|E(\varphi)\right| - C\delta^{\left[(\alpha+2)-\frac{N\alpha}{2}\right]}\,y^{2+\eta} \leq 0 \right\}$$

che, se scegliamo $\left\|\varphi\right\|_{H^1}$ abbastanza piccola, consta di due componenti connesse, una limitata vicino all'origine ed una illimitata. Per continuità si deve avere che $\|u(t,x)\|_{H^1}$ appartiene alla componente connessa limitata e dunque esiste $M > 0$ tale che $\|u(t,x)\|_{H^1} \leq M$ per ogni $t > 0$. Riassumiamo dunque quanto detto finora nel seguente:

Teorema 1.3.1. *La soluzione locale di (NLS) con dato iniziale $\varphi \in H^1$ si estende ad una soluzione globale se vale una delle seguenti condizioni:*

1. *l'equazione è defocalizzante,*
2. *l'equazione è focalizzante e $\alpha \in \left(0, \frac{4}{N}\right)$,*
3. *l'equazione è focalizzante, $\alpha = \frac{4}{N}$ e $\|\varphi\|_{L^2}$ è abbastanza piccola,*
4. *l'equazione è focalizzante, $\alpha \in \left(\frac{4}{N}, \frac{4}{N-2}\right)$ e $\|\varphi\|_{H^1}$ è abbastanza piccola.*

1.4 Comportamento asintotico per dati piccoli in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Una volta stabilita l'esistenza globale delle soluzioni di (NLS) ci proponiamo di studiare il comportamento di quest'ultime quando $t \to \pm\infty$. In letteratura questo tipo di studio prende il nome di *teoria di scattering.* Diamo pertanto la seguente

Definizione 1.4.1. *Sia $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tale che la rispettiva soluzione $u(t,x)$ di (NLS) è globale. Diciamo che $u(t,x)$ ha la proprietà $Sc(\varphi)$ se esistono $\varphi_\pm \in H^1$ tali che:*

$$\left\| u(t,x) - e^{it\Delta}\varphi_\pm \right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to\pm\infty} 0.$$

Mentre per l'equazione defocalizzante è noto che (si veda [8]) tutte le soluzioni hanno la proprietà $Sc(\varphi)$, lo scenario per l'equazione focalizzante è molto più ricco. Dimostreremo a breve che soluzioni con dati iniziali abbastanza piccoli hanno la proprietà $Sc(\varphi)$, ma ci sono alcune soluzioni che non sono globali ed anche delle soluzioni che sono globali per le quali $Sc(\varphi)$ non vale. Un tipico esempio sono le soluzioni della forma $u(t,x) = e^{it}Q(x)$, dove Q è l'unica soluzione in $H^1(\mathbb{R}^N)$ positiva e radiale del problema ellittico

$$-\Delta Q + Q = Q|Q|^\alpha. \tag{1.4.1}$$

Queste soluzioni prendono il nome di *ground states* e sono peraltro funzioni ottimali nella disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg

$$\|f\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C_{GN} \|f\|_{L^2}^{\frac{4-(N-2)\alpha}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}}. \tag{1.4.2}$$

Lemma 1.4.2. *Sia Q il ground state definito prima, allora nell'equazione* (1.4.2) *la costante ottimale è*

$$C_{GN} = \frac{2(\alpha+2)}{N\alpha} \left[\|\nabla Q\|_{L^2} \|Q\|_{L^2}^{\sigma}\right]^{-\frac{N\alpha-4}{2}}, \tag{1.4.3}$$

dove $\sigma = \frac{4-(N-2)\alpha}{N\alpha-4}$.

Dimostrazione. Posto $\frac{x}{2} = \frac{4-(N-2)\alpha}{2}$ e $\frac{y}{2} = \frac{N\alpha}{2}$, siccome la funzione Q è ottimale per (1.4.2) si ha:

$$\frac{d}{dt}\left[\left\|Q+t\varphi\right\|_{L^{\alpha+2}} - C_{GN}\left\|Q+t\varphi\right\|_{L^2}^{\frac{x}{2}} \left\|\nabla\left(Q+t\varphi\right)\right\|_{L^2}^{\frac{y}{2}}\right]_{|t=0} = 0$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Esplicitando i calcoli si ottiene

$$(\alpha+2)\int_{\mathbb{R}^N} Q^{\alpha+1}\cdot\varphi dx - C_{GN}\left[\frac{x}{2}\|Q\|_{L^2}^{\frac{x-4}{2}}\|\nabla Q\|_{L^2}^{\frac{y}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} Q\cdot\varphi dx - \frac{y}{2}\|Q\|_{L^2}^{\frac{x}{2}}\|\nabla Q\|_{L^2}^{\frac{y-4}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Delta Q\cdot\varphi dx\right] = 0.$$

Posto $A_1 = \alpha+2$, $A_2 = C_{GN}\frac{x}{2}\|Q\|_{L^2}^{\frac{x-4}{2}}\|\nabla Q\|_{L^2}^{\frac{y}{2}}$ ed $A_3 = C_{GN}\frac{y}{2}\|Q\|_{L^2}^{\frac{x}{2}}\|\nabla Q\|_{L^2}^{\frac{y-4}{2}}$ otteniamo che Q è soluzione del problema

$$A_1 Q^{\alpha+1} - A_2 Q + A_3\Delta Q = 0.$$

Allora imponendo che $A_1 = A_2 = A_3$ si ottiene la costante C_{GN} cercata. □

Dal fatto che le funzioni Q verificano l'uguaglianza in (1.4.2) e dall'espressione esplicita della costante C_{GN} ricaviamo che $\|Q\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} = \frac{2(\alpha+2)}{N\alpha}\|\nabla Q\|_{L^2}^2$. Dividendo per $-(\alpha+2)$ e sommando $\frac{1}{2}\|\nabla Q\|_{L^2}^2$ ad ambo i membri otteniamo

$$E(Q) = \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\|\nabla Q\|_{L^2}^2. \tag{1.4.4}$$

Questa identità ci sarà utile in seguito.

Dimostriamo che se $\|\varphi\|_{H^1}$ è abbastanza piccola allora la rispettiva soluzione di (NLS) focalizzante ha la proprietà $Sc(\varphi)$.

Teorema 1.4.3. *Sia $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ e $N \geq 3$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $\|\varphi\|_{H_x^1} \leq \varepsilon$ ed $u(t,x)$ è la rispettiva soluzione di* (NLS) *allora esiste $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\left\|u(t) - e^{it\Delta}u^+\right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Ci serviremo del seguente lemma.

Lemma 1.4.4. *Una soluzione $u(t,x)$ di* (NLS) *ha la proprietà $Sc(\varphi)$ se e solo se per ogni successione $t_n \to \pm\infty$ la successione $e^{-it_n\Delta}u(t_n)$ è di Cauchy in H^1.*

Dimostrazione. Se per ogni successione $t_n \to \pm\infty$ la successione $e^{it_n\Delta}u(t_n)$ di Cauchy in H_x^1 allora esiste $\psi \in H^1$ tale che

$$\left\|e^{-it\Delta}u(t) - \psi\right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Siccome $e^{it\Delta}$ è un'isometria di H^1 otteniamo $\|u(t) - e^{it\Delta}\psi\|_{H^1} \to 0$. E dunque la tesi. Viceversa se $u(t,x)$ ha la proprietà $Sc(\varphi)$ allora esistono $\varphi_\pm$ tali che

$$\left\|u(t,x) - e^{it\Delta}\varphi_\pm\right\|_{H^1} \xrightarrow{\to\pm\infty} 0.$$

La tesi segue come prima applicando $e^{-it\Delta}$. □

Dimostrazione del Teorema 1.4.3. Sia $u(t,x)$ una soluzione di (NLS), allora sappiamo che essa si scrive nella forma:

$$u(t,x) = e^{it\Delta}\varphi(x) + i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u|u|^\alpha(x,s)ds,$$

Applicando l'operatore $e^{-it\Delta}$ ad ambo i membri si trova:

$$e^{-it\Delta}u(t,x) = \varphi(x) + i\int_0^t e^{-is\Delta}u|u|^\alpha(x,s)ds.$$

Dunque posto $v(t) \doteq e^{-it\Delta}u(t)$, usando la disuguaglianza di Strichartz si ha:

$$\begin{aligned}\|v(t_1)-v(t_2)\|_{H^1_x} = \left\|\int_{t_2}^{t_1} e^{-is\Delta}u|u|^\alpha ds\right\|_{H^1_x} \leq \\ \leq C\left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}\left([t_1,t_2];W^{1,r'}\right)},\end{aligned}$$

ove (r,q) è una coppia ammissibile di Strichartz con $r = \alpha+2$. Quello che ci proponiamo di dimostrare dunque è che se assumiamo $\|\varphi\|_{H^1}$ abbastanza piccola allora si ha che $\|u|u|^\alpha\|_{L^{q'}\left([t_1,t_2];W^{1,r'}\right)}$ tende a 0 quando t_1, t_2 tendono a ∞. Dimostriamo che esiste una costante M tale che

$$\left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}\left([-S,S];W^{1,r'}\right)} < M \qquad \forall S>0 \tag{1.4.5}$$

che ci permette di concludere. Abbiamo

$$\begin{aligned}\left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}\left([-S,S];W^{1,r'}\right)} &= \left\|\left\|u|u|^\alpha\right\|_{W^{1,r'}}\right\|_{L^{q'}[-S,S]} \leq \left\|\|u\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha r}{r-2}}}\|u\|_{W^{1,r}}\right\|_{L^{q'}[-S,S]} \\ &= \left(\int_{-S}^S \|u\|^{\alpha q'}_{L^r}\|u\|^{q'}_{W^{1,r}}ds\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \left(\int_{-S}^S \|u\|^{(\alpha+1)q'-q}_{L^r}\|u\|^{q-q'}_{L^r}\|u\|^{q'}_{W^{1,r}}ds\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \sup_s\{\|u(s)\|_{L^r}\}^{\alpha+1-\frac{q}{q'}}\|u\|^{\frac{q}{q'}}_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)} \\ &\leq \|u\|^{\alpha+1-\frac{q}{q'}}_{H^1}\|u\|^{q-1}_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)},\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

dove abbiamo usato il teorema di immersione di Sobolev. Osserviamo che $\alpha+1-\frac{q}{q'}>0$ se $\alpha > \frac{4}{n}$. Ricordiamo ora di aver dimostrato precedentemente che se $\|\varphi\|_{H^1_x}$ è abbastanza piccola allora $\|u(t)\|_{H^1_x}$ è uniformemente limitata. Di conseguenza:

$$\left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}\left([-S,S];W^{1,r'}\right)} \leq C\|u\|^{q-1}_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)}, \tag{1.4.7}$$

con $C = C\left(\|\varphi\|_{H^1_x}\right)$. Consideriamo ora l'equazione integrale, si ha:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)} &\leq C\left\|e^{it\Delta}\phi\right\|_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u|u|^\alpha\right)(s)ds\right\|_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)} \leq \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^1} + C\left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{q'}\left([-S,S];W^{1,r'}\right)} \leq \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^1} + C\|u\|^{q-1}_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)}.\end{aligned}$$

Con un argomento di continuità analogo a quello usato per provare l'esistenza globale, proviamo che $\|u\|_{L^q\left([-S,S];W^{1,r}\right)}$ è uniformemente limitata. □

Ci occupiamo ora del problema inverso. Data una qualsiasi funzione $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ proviamo che esiste una soluzione $u \in C([S,\infty), H^1)$ dell'equazione focalizzante tale che u e $e^{it\Delta}u^+$ abbiano lo stesso comportamento per $t \to +\infty$. Ovviamente niente ci può assicurare che tale soluzione sia globale, il tempo S dipende fortemente dalla funzione u^+. Una situazione del tutto speculare si ha per $t \to -\infty$.

Teorema 1.4.5. *Se $N \geq 3$ allora vale:*

1. *per ogni $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ esiste $S \in \mathbb{R}$ ed un'unica soluzione $u \in C((S,\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$ dell'equazione focalizzante tale per cui $\left\| e^{it\Delta}u(t) - u^+ \right\|_{H^1} \to 0$ per $t \to \infty$;*

2. *per ogni $u^- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ esiste $S \in \mathbb{R}$ ed un'unica soluzione $u \in C((-\infty,S), H^1(\mathbb{R}^N))$ dell'equazione focalizzante tale per cui $\left\| e^{it\Delta}u(t) - u^- \right\|_{H^1} \to 0$ per $t \to -\infty$.;*

Dimostrazione. Dimostriamo il primo enunciato, la dimostrazione del secondo è del tutto analoga. Vogliamo risolvere l'equazione

$$u(t) = e^{it\Delta}u^+ - i\int_t^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta}u|u|^\alpha(s)ds. \tag{1.4.8}$$

con un argomento di punto fisso. Definiamo $\omega(t) = e^{it\Delta}u^+$. Sia (q,r) la coppia di Strichartz ammissibile tale che $r = \alpha+2$. Dal Teorema 1.1.6 e dal Corollario 1.1.4 abbiamo che $\omega \in L^q(\mathbb{R}, W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ e $\|\omega(t)\|_{L^r} \to 0$ per $t \to \infty$. Fissiamo $S > 0$ e consideriamo

$$K_S = \|\omega\|_{L^q((S,\infty),W^{1,r})} + \sup_{t\geq S}\|\omega(t)\|_{L^r}. \tag{1.4.9}$$

Osserviamo che per quanto detto sopra si ha

$$K_S \to 0 \text{ per } S \to \infty. \tag{1.4.10}$$

Sia

$$X = \left\{ u \in L^q((S,\infty), W^{1,r}(\mathbb{R}^N)) : \|u\|_{L^q((S,\infty),W^{1,r})} + \sup_{t\geq S}\|\omega(t)\|_{L^r} \leq 2K_S \right\},$$

e

$$d(u,v) = \|u - v\|_{L^q((S,\infty),L^r)} \text{ per } u,\, v \in X.$$

Si dimostra che lo spazio metrico (X,d) è completo in modo analogo a come fatto nel Teorema 1.2.2.

Con lo stesso conto di (1.4.6) si ha

$$\left\| u|u|^\alpha \right\|_{L^{q'}((S,\infty),W^{1,r'})} \leq C(2K_S)^{q-1}.$$

Per il Corollario 1.1.7 la funzione

$$\mathscr{B}(u) = -i\int_t^\infty e^{i(t-s)\Delta}u|u|^\alpha(s)ds \tag{1.4.11}$$

è ben definita ed inoltre

$$\mathscr{B}(u) \in C([S,\infty), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^q([S,\infty), W^{1,r}(\mathbb{R}^N)), \tag{1.4.12}$$

e

$$\|\mathscr{B}(u)\|_{L^q([S,\infty),W^{1,r})} + \|\mathscr{B}(u)\|_{L^\infty((S,\infty),H^1)} \le C(2K_S)^{q-1}. \tag{1.4.13}$$

Quest'ultima disuguaglianza, insieme a (1.4.10) e la disuguaglianza di Sobolev ci assicurano che per S abbastanza grande

$$\|\mathscr{B}(u)\|_{L^q([S,\infty),W^{1,r})} + \|\mathscr{B}(u)\|_{L^\infty((S,\infty),L^r)} \le K_S. \tag{1.4.14}$$

Definiamo

$$\mathscr{A}(u) = \mathscr{B}(u) + \omega(t)$$

per $t \ge S$. Si ha che $\mathscr{A}(u)$ mappa X in se stesso, infatti

$$\begin{aligned} &\|\mathscr{A}(u)\|_{L^q((S,\infty),W^{1,r})} + \sup_{t\ge S} \|\omega(t)\|_{L^r} \\ &\qquad \le \|\mathscr{B}(u)\|_{L^q((S,\infty),W^{1,r})} + \|\omega(t)\|_{L^q((S,\infty),W^{1,r})} + \sup_{t\ge S}\|\omega(t)\|_{L^r} \le 2K_s. \end{aligned}$$

Con lo stesso tipo di stime si può dimostrare che per S abbastanza grande la mappa $\mathscr{A}(u)$ è effettivamente una contrazione, quindi esiste $u \in X$ che soddisfa l'equazione (1.4.8), inoltre $u \in C([S,\infty), H^1)$ per (1.4.12). Inoltre posto $\psi = u(S)$ abbiamo

$$u(t+S) = e^{it\Delta}\psi + i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha (s+S)\,ds,$$

e dunque u è soluzione del problema

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + u|u|^\alpha = 0 \\ u(S) = \psi \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

come volevamo dimostrare. □

1.5 Soluzioni a decadimento rapido.

In questa sezione definiremo cosa significa per una soluzione globale di (NLS) avere un decadimento rapido e dimostreremo che le soluzioni aventi questa caratteristica hanno anche la proprietà $Sc(\varphi)$. Questo risultato è dovuto a Cazenave e Weissler, si veda [12].

Definizione 1.5.1. *Supponiamo* $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ *se* $N = 1, 2$). *Una soluzione globale u di* (NLS) *si dice avere decadimento rapido se vale*

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^a_{L^{\alpha+2}}\,dt < \infty, \tag{1.5.1}$$

dove $a = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{4-\alpha(N-2)}$.

Facciamo un piccolo commento sulla scelta del parametro a. Se u è una soluzione di (NLS) allora anche $u_\gamma(t,x) = \gamma^{\frac{2}{\alpha}}(\gamma^2 t, \gamma x)$ è una soluzione di (NLS). Il parametro a è dunque scelto in modo tale che l'integrale (1.5.1) sia invariante per il riscalamento $u \mapsto u_\gamma$.

Lemma 1.5.2. *Sia $r = \alpha + 2$ e (q, r) la corrispondente coppia di Strichartz. Definiamo b tramite l'equazione*

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2}{q}.$$

Se $T > 0$ e $f \in L^{b'}((0,T), L^{r'}(\mathbb{R}^N))$, allora $\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \in L^a((0,T), L^r(\mathbb{R}^N))$, più precisamente esiste una costante C dipendente solo da N, r ed a tale che

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \right\|_{L^a((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))} \le C \|f\|_{L^{b'}((0,T),L^{r'}(\mathbb{R}^N))}. \tag{1.5.2}$$

Dimostrazione. Avevamo dimostrato precedentemente che

$$\left\| e^{it\Delta} \right\|_{\mathscr{L}(L^{r'},L^r)} \le C|t|^{-\frac{N}{2}+\frac{N}{r}},$$

quindi

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \right\|_{L^r} \le \int_0^t C|t-s|^{-2/q} \|f(s)\|_{L^{r'}}\,ds.$$

Pertanto la tesi segue dalla disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev. □

Lemma 1.5.3. *Sia $r = \alpha + 2$ e (q, r) la corrispondente coppia di Strichartz. Sono veri i seguenti fatti.*

1. *Se $u \in L^a((0,T), L^r(\mathbb{R}^N))$ allora $\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s)\,ds \in L^a((0,T), L^r(\mathbb{R}^N))$, più precisamente esiste una costante dipendente da N ed α tale che*

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s)\,ds \right\|_{L^a((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))} \le C \|u\|^{\alpha+1}_{L^a((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))} \tag{1.5.3}$$

2. *Se $u \in L^a((0,T), L^r(\mathbb{R}^N)) \cap L^q((0,T), W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ e se (γ, ρ) è una qualsiasi coppia di Strichartz allora $\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s)\,ds \in L^\gamma((0,T), W^{1,\rho}(\mathbb{R}^N))$, inoltre esiste una costante C dipendente da N, α e ρ tale che*

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s)\,ds \right\|_{L^\gamma((0,T),W^{1,\rho})} \le C \|u\|^{\alpha}_{L^a((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))} \|u\|_{L^q((0,T),W^{1,r})}, \tag{1.5.4}$$

per ogni $u \in L^a((0,T), L^r(\mathbb{R}^N)) \cap L^q((0,T), W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$.

Dimostrazione. Si ha che $(\alpha+1)r' = r$ e $(\alpha+1)b' = a$. Siccome, inoltre si ha $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{a}$ è facile osservare che

$$\left\| u|u|^\alpha \right\|_{L^{b'}((0,T),L^{r'})} = \|u\|_{L^a((0,T),L^r)},$$

applicando due volte la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\left\| u|u|^\alpha \right\|_{L^{q'}((0,T),W^{1,r'})} \le C \|u\|^\alpha_{L^a((0,T),L^r)} \|u\|_{L^q((0,T),W^{1,r})}.$$

I due risultati seguono allora rispettivamente da (1.5.2) e dalle stime di Strichartz. □

Proposizione 1.5.4. *Sia $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ed u la corrispondente soluzione di (NLS). Se u è globale e $u \in L^a((0,\infty), L^r)$ allora u ha la proprietà $Sc(\varphi)$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $u \in L^\eta((0,\infty), W^{1,\nu})$ per ogni coppia di Strichartz (η,ν). Forti di questo fatto si può procedere analogamente a come abbiamo fatto nel caso di dati iniziali piccoli in norma H^1. È noto che (si veda ad esempio [10]) $u \in L^\eta((0,T), W^{1,\nu})$ per ogni $T > 0$ e ogni coppia di Strichartz (η,ν). Sia come al solito $r = \alpha + 2$ e (q,r) la rispettiva coppia di Strichartz. Fissato $T > 0$ definisco $v(t) = u(t+T)$, ossia

$$v(t) = e^{it\Delta}u(T) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} v|v|^\alpha(s)ds.$$

Grazie al Lemma 1.5.3 ed alle stime di Strichartz si ha

$$\|v\|_{L^\eta((0,\tau),W^{1,\nu})} \leq C_1 \|u(T)\|_{H^1} + C_2 \|u\|_{L^a((T,T+\tau),L^r)} \|v\|_{L^q((0,\tau),W^{1,r})}, \tag{1.5.5}$$

per ogni $\tau > 0$. Scegliendo T abbastanza grande in modo che $C_2 \|u\|_{L^a((T,T+\tau),L^r)} \leq 1/2$ e $(\eta,\nu) = (q,r)$ si ha

$$\|v\|_{L^q((0,\tau)W^{1,r})} \leq 2C_1 \|u(T)\|_{H^1}$$

per ogni $\tau > 0$. Dunque $u \in L^q((0,\infty), W^{1,r})$. A questo punto il fatto che $u \in L^\eta((0,\infty), W^{1,\nu})$ per ogni coppia ammissibile (η,ν) segue da (1.5.5). □

Dimostriamo ora un teorema di esistenza globale per soluzioni con dati iniziali piccoli.

Proposizione 1.5.5. *Esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \leq \varepsilon$, allora la soluzione u di (NLS) con dato iniziale φ è globale.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e $r = \alpha + 2$; sia $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \leq \varepsilon$ e u la soluzione massimale di (NLS) con condizione iniziale φ. Sia infine $[0,T^*)$, con $T^* \in (0,\infty]$, il suo intervallo massimale di esistenza. Consideriamo q tale per cui (q,r) sia una coppia di Strichartz. Grazie a (1.5.3), (1.5.4) ed alle stime di Strichartz si ha

$$\|u\|_{L^a((0,T),L^r)} \leq \varepsilon + K\|u\|^{\alpha+1}_{L^a((0,T),L^r)} \tag{1.5.6}$$

e

$$\|u\|_{L^q((0,T),W^{1,r})} \leq K\left\|\varphi\right\|_{H^1} + K\|u\|^\alpha_{L^a((0,T),L^r)} \|u\|_{L^q((0,T),W^{1,r})}, \tag{1.5.7}$$

per ogni $T < T^*$. Con il solito argomento di continuità otteniamo

$$\|u\|_{L^q((0,T^*),W^{1,r})} \leq 2K\left\|\varphi\right\|_{H^1}. \tag{1.5.8}$$

Pertanto usando le stime di Strichartz e la disuguaglianza (1.5.4) con $(\gamma,\rho) = (2,\infty)$ insieme a (1.5.8) ci assicuriamo che

$$\|u\|_{L^\infty((0,T^*),H^1)} < \infty.$$

Quindi $T^* = \infty$ ed in conclusione la soluzione è globale. □

Capitolo 2

Scattering per l'equazione focalizzante.

2.1 Introduzione al risultato centrale.

In questo capitolo ci concentriamo sull'equazione di Schrödinger focalizzante in $\mathbb{R}^N$, ossia

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + u|u|^\alpha = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{NLS $_f$}$$

dove

$$\frac{4}{N} < \alpha < \begin{cases} \frac{4}{N-2} & se\ N \geq 3 \\ \infty & se\ N = 1, 2 \end{cases} . \tag{2.1.1}$$

Fino ad oggi non si conoscono delle condizioni necessarie e sufficienti da imporre sul dato iniziale φ che garantiscano che la rispettiva soluzione u di (NLS $_f$) sia globale. Forniremo una condizione sufficiente, esibita per la prima volta da Holmer e Roudenko in [7], che gode di alcune proprietà di ottimalità sulle quali saremo più precisi in seguito. Definiamo

$$\sigma = \frac{4-(N-2)\alpha}{N\alpha - 4} > 0 \tag{2.1.2}$$

e l'insieme

$$\mathcal{K} = \left\{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) :\ E(\varphi)M(\varphi)^\sigma < E(Q)M(Q)^\sigma \ \ e\ \ \left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}\left\|\varphi\right\|_{L^2}^\sigma < \|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^\sigma\right\}, \tag{2.1.3}$$

dove Q è il $ground\ state$ definito nella sezione 1.4. Dimostreremo che ogni funzione $\varphi \in \mathcal{K}$ produce una soluzione globale di (NLS $_f$). Questa condizione è peraltro ottimale, nel senso che se $E(\varphi)M(\varphi)^\sigma < E(Q)M(Q)^\sigma$ e $\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2}\left\|\varphi\right\|_{L^2}^\sigma > \|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^\sigma$ allora la rispettiva soluzione di (NLS $_f$) non è globale.

Siccome $\mathcal{K}$ contiene un intorno di 0 e sappiamo che per tutte le soluzioni con dati iniziali abbastanza piccoli vale $Sc(\varphi)$ ci chiediamo se accade la stessa cosa per tutte le soluzioni con condizioni iniziali $\varphi \in \mathcal{K}$. La risposta è positiva ed è il teorema centrale di questo capitolo, che pertanto enunciamo:

Teorema 2.1.1. *Sia $N \geq 1$ ed assumiamo (2.1.1). Sia $\mathcal{K}$ definito in (2.1.3). Allora per ogni soluzione di (NLS $_f$) con condizione iniziale in $\mathcal{K}$ vale $Sc(\varphi)$.*

Per semplificare le notazioni e non appesantire eccessivamente le formule definiamo i seguenti indici che useremo per tutto il resto del capitolo:

$$a = \frac{2(\alpha+2)\alpha}{4-(N-2)\alpha}, \qquad b = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{N\alpha^2+(N-2)\alpha-4}, \qquad \gamma = \frac{2(N+2)}{N}$$
$$q = \frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}, \qquad r = \alpha+2, \qquad s = \frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha} \in \left(0, \min\left\{1, \frac{N}{2}\right\}\right),$$

ed osserviamo che valgono le utili identità

$$(\alpha+1)r' = r, \qquad (\alpha+1)b' = a. \tag{2.1.4}$$

2.2 Idea della dimostrazione del Teorema 2.1.1.

Come da titolo in questa breve sezione forniremo l'idea della dimostrazione del Teorema 2.1.1 assumendo veri tutti i risultati tecnici di cui ci occuperemo successivamente. Definiamo

$$\mathscr{L} = \left\{\psi \in \mathscr{K} : u \in L^a((0,\infty), L^r(\mathbb{R}^N))\right\} \tag{2.2.1}$$

dove u è la soluzione di (NLS $_f$) con valore iniziale ψ. Come abbiamo dimostrato nella Proposizione 1.5.4 è vero che se $\psi \in \mathscr{L}$ allora u ha la proprietà $Sc(\varphi)$. Quello che vogliamo provare, pertanto, è che $\mathscr{K} = \mathscr{L}$.

Dato $0 < \omega < 1$ poniamo

$$\mathscr{K}_\omega = \left\{\varphi \in \mathscr{K} : E(\varphi)M(\varphi)^\sigma \leq \omega E(Q)M(Q)^\sigma\right\}. \tag{2.2.2}$$

In particolare osserviamo che $\mathscr{K} = \cup_{0<\omega<1}\mathscr{K}_\omega$.

Siccome grazie a (2.3.2) si ha che $\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2} \left\|\varphi\right\|_{L^2}^\sigma \leq \omega^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla Q\right\|_{L^2} \left\|Q\right\|_{L^2}^\sigma$ per ogni $\varphi \in \mathscr{K}_\omega$, deduciamo, grazie alla disuguaglianza ottenuta per interpolazione $\left\|\varphi\right\|_{\dot{H}^s}^{1+\sigma} \leq \left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2} \left\|\varphi\right\|_{L^2}^\sigma$, che $\left\|\varphi\right\|_{\dot{H}^s}^{1+\sigma} \leq \omega^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla Q\right\|_{L^2} \left\|Q\right\|_{L^2}^\sigma$ per ogni $\varphi \in \mathscr{K}_\omega$. Pertanto, grazie alla Proposizione 2.4.3, esiste $\omega > 0$ abbastanza piccolo tale che $\mathscr{K}_\omega \subset \mathscr{L}$. È lecito definire allora la quantità

$$\omega_0 = \sup\{\omega \in (0,1) : \mathscr{K}_\omega \subset \mathscr{L}\}, \tag{2.2.3}$$

il nostro scopo è dunque provare che $\omega_0 = 1$.

Procediamo per assurdo, supponiamo quindi $0 < \omega_0 < 1$. Il primo passo cruciale della dimostrazione è esibire un dato iniziale $\varphi_{crit} \in \mathscr{K}_{\omega_0}$ che non sia in $\mathscr{L}$. (Si veda il Teorema 2.6.4.) A questo punto usiamo il fatto che che la corrispondente soluzione di (NLS $_f$) u_{crit} ha la seguente proprietà: esiste una funzione $x \in C([0,\infty),\mathbb{R}^N)$ tale che $\cup_{t\geq 0}\{u_{crit}(t,\cdot - x(t))\}$ è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$. (Vale a dire che la sua chiusura è un sottoinsieme compatto.) Segue allora dal Lemma 2.4.2 che

$$\sup_{t\geq 0} \int_{\{|x+x(t)|>R\}} \left\{|\nabla u_{crit}(t,x)|^2 + |u_{crit}(t,x)|^{\alpha+2} + |u_{crit}(t,x)|^2\right\} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Il secondo passo consiste nel dimostrare che la condizione sopra implica necessariamente che $\varphi_{crit} = 0$. (Si veda il Teorema 2.7.1). Siccome avevamo supposto $\varphi_{crit} \notin \mathscr{L}$ abbiamo ottenuto un assurdo. Dunque nessessariamente $\omega_0 = 1$ e pertanto il teorema è provato.

2.3 Stime dell'energia.

In questa sezione collezioneremo una serie di disuguaglianze riguardanti l'energia delle funzioni appartenenti all' insieme $\mathcal{K}$.

Lemma 2.3.1. *Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\sigma} \le \|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^{\sigma}$ allora si hanno le seguenti disuguaglianze:*

$$E(u) \ge \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\|\nabla u\|_{L^2}^2, \tag{2.3.1}$$

$$\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\sigma} \le \left(\frac{E(u)M(u)^{\sigma}}{E(Q)M(Q)^{\sigma}}\right)^{1/2}\|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^{\sigma}, \tag{2.3.2}$$

$$8\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{4N\alpha}{\alpha+2}\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \ge 8\left[1-\left(\frac{E(u)M(u)^{\sigma}}{E(Q)M(Q)^{\sigma}}\right)^{\frac{N\alpha-4}{4}}\right]\|\nabla u\|_{L^2}^2. \tag{2.3.3}$$

In particolare tutte queste stime valgono per $u \in \mathcal{K}$.

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg (1.4.2) si ha:

$$\begin{aligned} E(u)M(u)^{\sigma} &= \tfrac{1}{2}\left[\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\sigma}\right]^2 - \tfrac{1}{\alpha+2}\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\|u\|_{L^2}^{2\sigma} \ge \\ &\ge f(\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\sigma}), \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

dove

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{C_{GN}}{\alpha+2}x^{\frac{N\alpha}{2}}, \tag{2.3.5}$$

per $x \ge 0$. Poiché in (1.4.2) si ha l'uguaglianza quando $f = Q$ abbiamo anche

$$E(Q)M(Q)^{\sigma} = f(\|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^{\sigma}). \tag{2.3.6}$$

Osserviamo ora che f è crescente su $(0, x_1)$ e decrescente su $(x_1, +\infty)$ ove

$$x_1 = \left(\frac{C_{GN}}{\alpha+2}\frac{N\alpha}{2}\right)^{-\frac{2}{N\alpha-4}} = \|Q\|_{L^2}\|\nabla Q\|_{L^2}^{\sigma}, \tag{2.3.7}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato (1.4.3). Con dei conti elementari si può mostrare che

$$f(x) \ge \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}x^2, \tag{2.3.8}$$

per $0 \le x \le x_1$, con l'uguaglianza quando $x = x_1$, cioè

$$f(\|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^{\sigma}) = \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\left(\|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^{\sigma}\right)^2. \tag{2.3.9}$$

Possiamo finalmente dimostrare (2.3.1):

$$\begin{aligned} E(u)M(u)^{\sigma} &\overset{(2.3.4)}{\ge} f(\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\sigma}) \\ &\overset{(2.3.8)}{\ge} \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\left(\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

semplificando $M(u)^\sigma$ si conclude. Passiamo a (2.3.2). Sappiamo che:

$$E(u)M(u)^\sigma \overset{(2.3.4)}{\geq} f(\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^\sigma) \overset{(2.3.8)}{\geq} \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\left(\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^\sigma\right)^2,$$

dividiamo tutto per $E(Q)M(Q)^\sigma = \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\left(\|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^\sigma\right)^2$ e si ottiene la tesi. Consideriamo ora

$$R(u) = 8\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{4N\alpha}{\alpha+2}\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}.$$

Posto $x = \|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^\sigma$, da Gagliardo-Nirenberg e (2.3.7) segue che

$$\frac{1}{8}M(u)^\sigma R(u) \geq x^2 - \frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}C_{GN}x^{\frac{N\alpha}{2}} = x^2 - x_1^{-\frac{N\alpha-4}{2}}x^{\frac{N\alpha}{2}} =$$
$$x^2\left(1-(x/x_1)^{\frac{N\alpha-4}{2}}\right).$$

D'altra parte per (2.3.2) si ha

$$\frac{1}{8}M(u)^\sigma R(u) \geq x^2\left[1-\left(\frac{E(u)M(u)^\sigma}{E(Q)M(Q)^\sigma}\right)^{\frac{N\alpha-4}{2}}\right],$$

da cui semplificando si ottiene (2.3.3). □

2.4 Alcune proprietà dell'insieme $\mathcal{K}$.

Proposizione 2.4.1. *Sia $\varphi \in \mathcal{K}$ allora la rispettiva soluzione u di (NLS $_f$) è globale.*

Dimostrazione. Riconsideriamo la disuguaglianza (2.3.4) e la funzione (2.3.5). Avevamo dimostrato che quest'ultima funzione è nulla in 0 ed ha un unico punto di massimo in $x_1 = \|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^\sigma$ il cui valore è $E(Q)M(Q)^\sigma$. Se $\varphi \in \mathcal{K}$ allora la soluzione u verifica per definizione $E(u)M(u)^\sigma < E(Q)M(Q)^\sigma$, quindi si ha

$$f(\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^\sigma) - E(Q)M(Q)^\sigma < 0.$$

Quindi la quantità $y = \|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^\sigma$ è nell'insieme $X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$. Questo insieme è formato da due componenti connesse, una limitata ed una illimitata. Ma siccome $\varphi \in \mathcal{K}$ si ha che

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}^\sigma < \|\nabla Q\|_{L^2}\|Q\|_{L^2}^\sigma,$$

e quindi y, per continuità, appartiene alla componente connessa limitata di X. Pertanto la norma H^1 della soluzione u è uniformemente limitata e di conseguenza la soluzione u risulta essere globale. □

La proposizione sopra ci permette di definire il flusso $(\mathbf{S}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ tramite

$$\mathbf{S}(t)\varphi = u(t), \tag{2.4.1}$$

per $\varphi \in \mathcal{K}$, $t \in \mathbb{R}$ e u è la corrispondente soluzione di (NLS $_f$). La mappa $(t,\varphi) \mapsto \mathbf{S}(t)\varphi$ è continua da $\mathbb{R}\times\mathcal{K}$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$, dove abbiamo posto su $\mathcal{K}$ la topologia H^1. Osserviamo inoltre che

$$\mathbf{S}(-t)\varphi = \overline{\mathbf{S}(t)\overline{\varphi}}, \tag{2.4.2}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{K}$ e $t \in \mathbb{R}$.

I lemmi successivi servono a costruire dei particolari sottoinsiemi di $H^1(\mathbb{R}^N)$ tali che l'evoluzione libera di funzioni appartenenti ad essi sia asintotica a soluzioni di (NLS $_f$) con dati iniziali in opportuni sottoinsiemi di $\mathcal{K}$. Enunciamo ora un lemma che useremo spesso in seguito, non solo all'interno di questa sezione.

Lemma 2.4.2. *Sia $N \geq 1$, $1 \leq q < \infty$ e sia E un sottoinsieme relativamente compatto di $L^q(\mathbb{R}^N)$. Allora si ha*

$$\sup_{u\in E}\int_{|x|>R}|u|^q \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Di conseguenza, se $(y_n^1)_{n\geq1}$, $(y_n^2)_{n\geq1} \subset \mathbb{R}^N$ e $\left|y_n^1 - y_n^2\right| \to \infty$ quando $n \to \infty$, allora

$$\sup_{u,v\in E}\int_{\mathbb{R}^N}\left|u(\cdot - y_n^1)\right|^{\frac{q}{2}}\left|v(\cdot - y_n^2)\right|^{\frac{q}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dimostrazione. Se E fosse un insieme finito allora la tesi è ovvia notando che $\lim_{R\to\infty}\int_{|x|>R}\left|g(x)\right| dx \to 0$ se g è una funzione integrabile.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, per relativa compattezza si ha che esistono $u_1,\cdots,u_n \in E$ tali che $E \subset \cup_{j=1}^n B_{L^q}(u_j,\varepsilon)$. Ove con $B_{L^q}(u_j,\varepsilon)$ abbiamo indicato la palla di L^q di centro u_j e raggio ε. Quindi per ogni $u \in E$ si ha

$$\int_{|x|>R}|u(x)|^q\,dx \leq \varepsilon^q + \max_{1\leq j\leq n}\int_{|x|>R}\left|u_j(x)\right|^q dx$$

quindi

$$\sup_{u\in E}\int_{|x|>R}|u(x)|^q\,dx \leq \varepsilon^q + \max_{1\leq j\leq n}\int_{|x|>R}\left|u_j(x)\right|^q dx.$$

Siccome n è fissato, usando l'osservazione fatta all'inizio si ha

$$\limsup_{R\to\infty}\sup_{u\in E}\int_{|x|>R}|u(x)|^q\,dx \leq \varepsilon^q,$$

per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude. La seconda parte è un'immediata conseguenza. □

Proposizione 2.4.3. *Esiste $0 < \delta_{sd} \leq 1$ ed una costante C tale che se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\left\|\varphi\right\|_{\dot{H}^s} \leq \delta_{sd}$, allora la corrispondente soluzione u di (NLS) è globale ed inoltre*

$$\|u\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^{N+1})} + \|u\|_{L^a(\mathbb{R},L^r)} + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^1)} \leq C_{sd}\left\|\varphi\right\|_{H^1}. \tag{2.4.3}$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.5.5 segue che se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{L^a(\mathbb{R},L^r)}$ è abbastanza piccola allora la soluzione è globale. La tesi segue allora dalle stime di Strichartz e dalla stima

$$\left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{L^a(\mathbb{R},L^r)} \leq C\left\|\varphi\right\|_{\dot{H}^s}. \tag{2.4.4}$$

Quest'ultima si ottiene dalle stime di Strichartz standard applicando $(-\Delta)^{s/2}$ ed usando il teorema di immersione di Sobolev. □

Si ha subito una conseguenza della Proposizione 2.4.3 e del Lemma 2.4.2.

Corollario 2.4.4. *Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tali che $\|\varphi_1\|_{H^1}, \|\varphi_2\|_{H^1} \leq \delta_{sd}$, dove δ_{sd} è dato dalla Proposizione 2.4.3. Siano u_1 ed u_2 le corrispondenti soluzioni di (NLS $_f$). Se $(t_n^1)_{n\geq 1}, (t_n^2)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ e $(x_n^1)_{n\geq 1}, (x_n^2)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ soddisfano $|t_n^1 - t_n^2| + |x_n^1 - x_n^2| \to \infty$ quando $n \to \infty$, allora*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\langle u_1(t - t_n^1, \cdot - x_n^1), u_2(t - t_n^2, \cdot - x_n^2)\rangle_{H^1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.4.5}$$

Dimostrazione. Per le Proposizioni 1.5.4 e 2.4.3 u_1 e u_2 hanno la proprietà $Sc(\varphi)$.
Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ ed una successione $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tale che $\left|\langle u_1(t_n - t_n^1, \cdot - x_n^1), u_2(t_n - t_n^2, \cdot - x_n^2)\rangle_{H^1}\right| \geq \varepsilon$. Senza perdita di generalità possiamo sostituire t_n^j con $t_n - t_n^j$ per $j = 1, 2$ ed otteniamo

$$\left|\langle u_1(t_n^1, \cdot - x_n^1 + x_n^2), u_2(t_n^2, \cdot)\rangle_{H^1}\right| \geq \varepsilon. \tag{2.4.6}$$

A meno di estrarre sottosuccessioni non è restrittivo supporre che valga una delle tre

- $|t_n^1| + |t_n^2|$ è limitata
- $|t_n^1| \to \infty$ e $|t_n^2| \to \infty$
- $|t_n^1| \to \infty$ e $|t_n^2|$ è limitata.

Nel primo caso $u_1(t_n^1)$ e $u_2(t_n^2)$ appartengono ad un sottoinsieme relativamente compatto di $H^1(\mathbb{R}^N)$ e dunque siccome $|x_n^1 - x_n^2| \to \infty$ otteniamo una contraddizione grazie al Lemma 2.4.2. Supponiamo di essere nel secondo caso. Siccome per u_1 ed u_2 vale $Sc(\varphi_1)$ e $Sc(\varphi_2)$, possiamo approssimare $u_j(t_n^j)$ con $e^{it_n^j\Delta}\psi^j$ per $j = 1, 2$ per qualche $\psi^j \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Deduciamo da (2.4.6) che per n abbastanza grande si ha

$$\left|\langle e^{i(t_n^1 - t_n^2)\Delta}\psi^1(\cdot - x_n^1 + x_n^2), \psi^2\rangle_{H^1}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siccome $|t_n^1 - t_n^2| + |x_n^1 - x_n^2| \to \infty$, si ha che $e^{i(t_n^1 - t_n^2)\Delta}\psi^1(\cdot - x_n^1 + x_n^2) \rightharpoonup 0$ e dunque una contradizione. Per l'ultimo caso si trova l'assurdo allo stesso modo di come fatto ora. □

Proposizione 2.4.5. *Sia $0 < \omega < 1$ e $\mathcal{K}_\omega$ definito in (2.2.2). Se $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ soddisfa*

$$\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 M(\psi)^\sigma \leq \omega E(Q) M(Q)^\sigma, \tag{2.4.7}$$

allora esiste $\varphi \in \mathcal{K}_\omega$ tale che

$$\left\|\mathbf{S}(-t)\varphi - e^{-it\Delta}\psi\right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

Dimostrazione. Dal Teorema 1.4.5 sappiamo che per ogni $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ esiste $T \in \mathbb{R}$ ed una soluzione $u \in C((-\infty, T], H^1(\mathbb{R}^N))$ di (NLS $_f$) tale che

$$\left\|u(-t) - e^{-it\Delta}\psi\right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to\infty} 0. \tag{2.4.8}$$

Grazie a (2.4.8), (2.4.7) e (1.4.4) si ha

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \|\nabla u(-t)\|_{L^2}^2 \|u(-t)\|_{L^2}^{2\sigma} = \left\|\nabla\psi\right\|_{L^2}^2 \left\|\psi\right\|_{L^2}^{2\sigma} &\leq 2\omega E(Q)M(Q)^\sigma \\ &= \omega\frac{N\alpha-4}{N\alpha}\|\nabla Q\|_{L^2}^2 \|Q\|_{L^2}^{2\sigma}.\end{aligned}$$

Quindi se t è abbastanza grande abbiamo

$$\|\nabla u(-t)\|_{L^2} \|u(-t)\|_{L^2}^{\sigma} < \|\nabla Q\|_{L^2} \|Q\|_{L^2}^{\sigma}. \tag{2.4.9}$$

Dal teorema di immersione di Sobolev e (2.4.8) deduciamo che $\left\|u(-t)-e^{-it\Delta}\psi\right\|_{L^r} \to 0$. Siccome sappiamo dal Corollario 1.1.4 che $\left\|e^{-it\Delta}\psi\right\|_{L^r} \to 0$, possiamo affermare che $\|u(-t)\|_{L^r} \to 0$ e dunque

$$E(u(-t)) \to \frac{1}{2}\left\|\nabla\psi\right\|_{L^2}^2, \qquad t\to\infty.$$

Siccome $M(u(-t)) \to \left\|\psi\right\|_{L^2}^2$ otteniamo

$$E(u(-t))M(u(-t))^\sigma \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{2}\left\|\nabla\psi\right\|_{L^2}\left\|\psi\right\|_{L^2}^{2\sigma} \overset{(2.4.7)}{\leq} \omega E(Q)M(Q)^\sigma. \tag{2.4.10}$$

A questo punto (2.4.9) e (2.4.10), insieme alla conservazione della massa e dell'energia, ci assicurano che $u(-t)\in\mathcal{K}_\omega$ per ogni $t\leq T$. In particolare la soluzione u è globale e, siccome $\mathcal{K}_\omega$ è invariante per il flusso $\mathbf{S}(t)$, $u(t)\in\mathcal{K}_\omega$ per ogni $t\in\mathbb{R}$. Allora basta prendere $\varphi = u(0)$. □

2.5 Decomposizione in profili.

Teorema 2.5.1. *Sia $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Esiste una sua sottosuccessione, che denotiamo ancora con $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e successioni*

- $\left(\psi^j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$
- $\left(W_n^j\right)_{n,j\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$
- $\left(t_n^j\right)_{n,j\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$
- $\left(\bar{t}^j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)\cup\{\infty\}$
- $\left(x_n^j\right)_{n,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$

tali per cui per ogni $l\geq 1$ si ha

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{l} e^{-it_n^j\Delta}\psi^j\left(\cdot - x_n^j\right) + W_n^l \tag{2.5.1}$$

e

$$t_n^l \xrightarrow{n\to\infty} \bar{t}^l, \tag{2.5.2}$$

$$\|\varphi_n\|^2_{H^\lambda} - \sum_{j=1}^{l} \left\|\psi^j\right\|^2_{H^\lambda} - \left\|W_n^l\right\|^2_{H^\lambda} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \forall 0\le\lambda\le 1, \tag{2.5.3}$$

$$E(\varphi_n) - \sum_{j=1}^{l} E\left(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j\left(\cdot - x_n^j\right)\right) - E\left(W_n^l\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.5.4}$$

Inoltre se esiste $j\ge 1$ tale che $\psi^j = 0$ allora $\psi^l = 0$ per ogni $l \ge j$. In altre parole esiste $J \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tale che $\psi^j \ne 0$ per ogni $j < J$ e $\psi^j = 0$ per ogni $j \ge J$, e

$$\lim_{n\to\infty} \left|t_n^j - t_n^i\right| + \left|x_n^i - x_n^j\right| = \infty, \tag{2.5.5}$$

per ogni $l \ge 1$ e $1 \le i \ne j < J$. Infine

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|e^{it\Delta}W_n^l\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \xrightarrow{l\to\infty} 0. \tag{2.5.6}$$

Il Teorema 2.5.1 si dimostra con un'applicazione iterativa del seguente lemma.

Lemma 2.5.2. *Sia $\{u_n\}_{n\ge1}$ una successione limitata in $H^1(\mathbb{R}^N)$. A meno di passare a sottosuccessioni esistono $\{t_n\}\subset\mathbb{R}^+$, $\{x_n\}_{n\ge1}\subset\mathbb{R}^N$ e $\psi\in H^1(\mathbb{R}^N)$ tali che*

1. *dove $u_n = W_n + e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n)$,*

2.
$$e^{it_n\Delta}u_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup \psi \text{ in } H^1, \tag{2.5.7}$$

3. *esitono $\delta = \delta(N,\alpha) \in (0,1)$ e $M = M(N,\alpha) > 0$ tali che*
$$\left\|e^{it\Delta}u_n\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^{\alpha+2})} \le M\|\psi\|^\delta_{H^1} \text{ per ogni } n\ge 1, \tag{2.5.8}$$

4.
$$\|u_n\|^2_{\dot H^\lambda} - \|\psi\|^2_{\dot H^\lambda} - \|W_n\|^2_{\dot H^\lambda} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ per ogni } 0\le\lambda\le 1, \tag{2.5.9}$$

5.
$$\|u_n\|^{\alpha+2}_{L^{\alpha+2}} - \left\|e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n)\right\|^{\alpha+2}_{L^{\alpha+2}} - \|W_n\|^{\alpha+2}_{L^{\alpha+2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.5.10}$$

Dimostrazione. Sia $C>0$ tale che $\|u_n\|_{H^1}\le C$, allora abbiamo anche $\left\|e^{it\Delta}u_n(x)\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^{\alpha+2})} \le C$. Scegliamo $\{t_n\}_{n\ge1}\subset\mathbb{R}^+$ una successione tale che

$$\left\|e^{it_n\Delta}u_n(x)\right\|_{L_x^{\alpha+2}} \ge \frac{1}{2}\left\|e^{it\Delta}u_n(x)\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^{\alpha+2})}. \tag{2.5.11}$$

Poniamo $v_n(x) = e^{it_n\Delta}u_n(x)$ ed introduciamo l'insieme

$$\Gamma(v_n) = \left\{v\in H^1(\mathbb{R}^N) : v_n(x+y_n) \rightharpoonup v \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N),\ \left\{y_n\right\}_{n\ge1}\subset\mathbb{R}^N\right\}. \tag{2.5.12}$$

Sia

$$\gamma(v_n) = \sup_{v\in\Gamma(v_n)} \|v\|_{H^1}, \tag{2.5.13}$$

allora esiste una successione $\{x_n\}_{n\ge1}\subset\mathbb{R}^N$ tale che

$$v_n(x+x_n) \rightharpoonup \psi \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } \left\|\psi\right\|_{H^1} \ge \frac{1}{2}\gamma(v_n). \tag{2.5.14}$$

Proviamo che vale (2.5.8). Introduciamo i moltiplicatori di Fourier

- $\widetilde{\chi}_R(|D|)u = \mathscr{F}^{-1}\left(\left(1-\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\widehat{u}(\xi)\right)$
- $\chi_R(|D|)u = \mathscr{F}^{-1}\left(\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\widehat{u}(\xi)\right)$,

dove $R > 0$ e $\zeta(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è radiale a valori reali tale che $\zeta(\xi) = 1$ se $|\xi| \le 1$ e $\zeta(\xi) = 0$ se $|\xi| \ge 2$. Grazie al teorema di immersione di Sobolev si ha

$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{\chi}_R(|D|)v_n\right\|^2_{L^{\alpha+2}} &\le \beta\left\|\widetilde{\chi}_R(|D|)v_n\right\|^2_{\dot{H}^\lambda} \\ &\le \beta\int_{\mathbb{R}^N}|\xi|^{2\lambda}\left(1-\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)^2\widehat{u_n}(\xi)^2 d\xi \\ &\le \beta\int_{|\xi|>R}|\xi|^{2\lambda}\,\widehat{u_n}(\xi)^2 \le \beta R^{-2(1-\lambda)}\|v_n\|^2_{H^1}, \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

dove

$$\beta = \beta(N,\alpha) \text{ e } \lambda = \frac{N}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2}. \tag{2.5.16}$$

Per stimare $\left\|\chi_R(|D|)v_n\right\|_{L_x^{\alpha+2}}$ procediamo per interpolazione, cerchiamo, quindi, prima un controllo sulla norma-L^∞ e poi sulla norma-L^2. Sia $\{y_n\}_{n\ge1} \subset \mathbb{R}^N$ una successione tale che

$$\left|\chi_R(|D|)v_n(x+x_n)_{|x=y_n}\right| \ge \frac{1}{2}\left\|\chi_R(|D|)v_n(x+x_n)\right\|_{L^\infty}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \left|\chi_R(|D|)v_n(x+x_n)_{|x=y_n}\right| &= \left|\mathscr{F}^{-1}\left(\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\star v_n(x+x_n)_{|x=y_n}\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\mathscr{F}^{-1}\left(\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)(y)\,v_n(y-x-x_n)dy_{|x=y_n}\right|. \end{aligned}$$

Siccome esiste $W(y) \in \Gamma(v_n)$ tale che $v_n(y-y_n-x_n) \rightharpoonup W(y)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \left|\chi_R(|D|)v_n(x+x_n)_{|x=y_n}\right| &\xrightarrow{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^N}\mathscr{F}^{-1}\left(\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)W(y)dy\right| \\ &\le \|W\|_{L^2}\left\|\mathscr{F}^{-1}\left(\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)\right\|_{L^2} \le \gamma(v_n)\left\|\zeta\left(\frac{\xi}{R}\right)\right\|_{L^2} \\ &\le (2R)^{\frac{N}{2}}\,2\left\|\psi\right\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\left\|\chi_R(|D|)\,v_n(x+x_n)\right\|_{L^\infty} \le 4\,(2R)^{\frac{N}{2}}\left\|\psi\right\|_{H^1}. \tag{2.5.17}$$

D'altra parte abbiamo

$$\left\|\chi_R(|D|)\,v_n(x+x_n)\right\|^2_{L^2} \le \left\|\chi_R(|D|)v_n(x+x_n)\right\|^2_{H^1} \le \|u_n\|_{H^1} \le C. \tag{2.5.18}$$

Allora interpolando otteniamo

$$\begin{aligned} \left\|\chi_R(|D|)\,v_n(x+x_n)\right\|_{L^r} &\le \left\|\chi_R(|D|)\,v_n(x+x_n)\right\|^{\frac{2}{\alpha+2}}_{L^2}\left\|\chi_R(|D|)\,v_n(x+x_n)\right\|^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}_{L^\infty} \\ &\le C^{\frac{2}{\alpha+2}}(4(2R)^{\frac{N}{2}})^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}\left\|\psi\right\|^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}_{H^1}. \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

Ricordando che vale (2.5.16) ed usando (2.5.15) e (2.5.19) otteniamo che esiste $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\alpha, N)$ tale che

$$\left\| e^{it\Delta} u_n \right\|_{L^\infty((0,\infty),L^{\alpha+2})} \le \widetilde{C} \left(R^\lambda \|\psi\|_{H^1}^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} + R^{-(1-\lambda)} \right). \tag{2.5.20}$$

Scegliendo $R = \|\psi\|_{H^1}^{-\frac{\alpha}{\alpha+2}}$ la (2.5.20) diventa

$$\left\| e^{it\Delta} u_n \right\|_{L^\infty((0,\infty),L^{\alpha+2})} \le 2\widetilde{C} \|\psi\|_{H^1}^{(1-\lambda)\frac{\alpha}{\alpha+2}},$$

allora (2.5.8) segue prendendo $M = 2\widetilde{C}$ e $\delta = (1-\lambda)\frac{\alpha}{\alpha+2}$.

Dimostriamo (2.5.9). Per ogni $0 \le \lambda \le 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{\dot{H}^\lambda}^2 &= \left\| e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n) \right\|_{\dot{H}^\lambda}^2 + \|W_n\|_{\dot{H}^\lambda}^2 + 2\langle e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n), W_n \rangle_{\dot{H}^\lambda} \\
&= \|\psi\|_{\dot{H}^\lambda}^2 + \|W_n\|_{\dot{H}^\lambda}^2 + 2\langle e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n), u_n - e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n) \rangle_{\dot{H}^\lambda},
\end{aligned}$$

l'ultimo addendo tende a 0 per convergenza debole.

Per provare (2.5.10) definiamo la successione

$$f_n = \left| \|v_n\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} - \left\| e^{-it_n\Delta}\psi(\cdot - x_n) \right\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} - \|W_n\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right|.$$

Dalla disuguaglianza (A.0.14) in appendice si ha che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\left| |z_1 + z_2|^{\alpha+2} - |z_1|^{\alpha+2} - |z_2|^{\alpha+2} \right| \le C|z_1||z_2| \left(|z_1|^\alpha + |z_2|^\alpha \right). \tag{2.5.21}$$

Deduciamo da (2.5.21) che

$$f_n \le C \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{it\Delta}\psi \right| |W_n(\cdot + x_n)| \, h_n$$

ove

$$h_n = \left| e^{it_n\Delta}\psi \right|^\alpha + |W_n(\cdot + x_n)|^\alpha.$$

Osserviamo che, usando la disuguaglianza di Minkowski ed il fatto che $a^\alpha + b^\alpha \le (a+b)^\alpha$ se $a, b \ge 0$, si ha

$$\|h_n\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}} \le C \left(\|\psi\|_{H^1} + \|W_n\|_{H^1} \right)^\alpha \le C.$$

Supponiamo, per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ ed una successione $n_k \to \infty$ tale che $f_{n_k} \ge \varepsilon$. A meno di passare a sottosuccessioni possiamo assumere che $\left| t_{n_k} \right| \to \infty$ oppure $t_{n_k} \to \overline{t} \in \mathbb{R}$. Nel primo caso, usando la disuguaglianza di Young, si ha

$$f_{n_k} \le C \left\| e^{it_{n_k}\Delta}\psi \right\|_{L^{\alpha+2}} \left\| W_{n_k} \right\|_{L^{\alpha+2}} \left\| h_{n_k} \right\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}} \le C \left\| e^{it_{n_k}\Delta}\psi \right\|_{L^{\alpha+2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

per il Corollario 1.1.4. Dunque un assurdo.

Supponiamo allora che $t_{n_k} \to \overline{t}$. Sappiamo che $W_{n_k}(\cdot + x_n) \rightharpoonup 0$ quando $k \to \infty$. Grazie al teorema di immersione di Sobolev possiamo affermare che $W_{n_k}(\cdot + x_n) \to 0$ forte in $L^r(B_R)$ per ogni $R > 0$, ove B_R è la palla di $\mathbb{R}^N$ centrata in 0 e di raggio R. Inoltre per l'ipotesi fatta sulla successione t_{n_k} si ha che $e^{it_{n_k}\Delta}\psi$ appartiene ad un sottoinsieme compatto di $H^1(\mathbb{R}^N)$ e dunque di $L^r(\mathbb{R}^N)$. Pertanto per ogni $\delta > 0$ esiste $R > 0$ tale che $\|e^{it_{n_k}\Delta}\psi\|_{L^r(\{|x|>R\})} < \delta$. Usando la limitatezza di $e^{it_{n_k}}\psi$ e W_{n_k} in $L^r(\mathbb{R}^N)$ e di h_{n_k} in $L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}(\mathbb{R}^N)$ si ottiene la stima

$$f_{n_k} \leq C \left\| e^{it_{n_k}}\psi \right\|_{L^r(\{|x|>R\})} + C \left\| W_{n_k}(\cdot + x_{n_k}) \right\|_{L^r(\{|x|<R\})}.$$

A questo punto scegliamo simultaneamente $R > 0$ abbastanza grande in modo che il primo addendo a destra della disuguaglianza sia più piccolo di $\varepsilon/4$ e k_0 tale che il secondo addendo sia più piccolo di $\varepsilon/4$ per ogni $k \geq k_0$. Ma allora $f_{n_k} \leq \varepsilon/2$ il che è assurdo. Quindi abbiamo provato (2.5.10). $\square$

Osservazione 2.5.3. *Se* $\|e^{it_n\Delta}u_n\|_{L^r} \to 0$ *si ha* $\psi = 0$ *per (2.5.7).*

Prima di procedere con la dimostrazione del Teorema 2.5.1 dimostriamo la proprietà seguente.

Lemma 2.5.4. *Siano* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ *successioni soddisfacenti*

$$|t_n| + |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \tag{2.5.22}$$

Allora si ha

$$e^{it_n\Delta}\psi(\cdot + x_n) \rightharpoonup 0 \tag{2.5.23}$$

in $H^1(\mathbb{R}^N)$ *per ogni* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. *Inoltre se* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *soddisfano*

$$z_n \rightharpoonup 0, \qquad e^{it_n\Delta}z_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup \psi, \tag{2.5.24}$$

in $H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\psi \neq 0$, *allora necessariamente deve valere (2.5.22).*

Dimostrazione. Assumiamo che valga (2.5.22). Grazie alla densità di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ è sufficiente provare che per ogni coppia di funzioni ζ, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ vale $\langle e^{it_n\Delta}\psi(\cdot + x_n), \zeta\rangle_{H^1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Supponiamo per assurdo che esistano due funzioni ψ, $\zeta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ e successioni $\left(t_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soddisfacenti (2.5.22) tali per cui $\left|\langle e^{it_{n_k}\Delta}\psi(\cdot + x_{n_k}), \zeta\rangle_{H^1}\right| \geq \varepsilon$. A meno di passare a sottosuccessioni possiamo supporre che $t_{n_k} \to \infty$ oppure che t_{n_k} sia una successione limitata. Nel primo caso si ha

$$\begin{aligned} \left|\langle e^{it_{n_k}\Delta}\psi(\cdot + x_{n_k}), \zeta\rangle_{H^1}\right| &= \left|\langle \psi, e^{-it_{n_k}\Delta}\zeta(\cdot - x_{n_k})\rangle_{H^1}\right| \leq \\ &\leq \left|t_{n_k}\right|^{-\frac{N}{2}} \left\|\psi\right\|_{W^{1,1}} \|\zeta\|_{W^{1,1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0, \end{aligned}$$

cioè un assurdo. Nel secondo caso, siccome (2.5.22) deve valere, si ha che $\left|x_{n_k}\right| \to \infty$ e dunque $\zeta(\cdot - x_{n_k}) \rightharpoonup 0$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Siccome $e^{it_{n_k}\Delta}\psi$ è una successione contenuta in un sottoinsieme compatto di $H^1(\mathbb{R}^N)$, segue dal Lemma 2.4.2 che

$$\left|\langle e^{it_{n_k}\Delta}\psi(\cdot + x_{n_k}), \zeta\rangle_{H^1}\right| = \left|\langle e^{it_{n_k}\Delta}\psi, \zeta(\cdot - x_{n_k})\rangle_{H^1}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

che è un altro assurdo. Proviamo la seconda affermazione, assumiamo allora che valga (2.5.24). Procediamo, nuovamente, per assurdo supponendo che $\psi \neq 0$ e che esista una successione $n_k \to \infty$ tale che $\left|t_{n_k}\right| + \left|x_{n_k}\right|$ sia limitata. A meno di passare a sottosuccessioni possiamo supporre che $t_{n_k} \to \overline{t}$ e $x_{n_k} \to \overline{x}$. Siccome $z_n \rightharpoonup 0$ si ha, immediatamente, che $e^{it_n\Delta}z_n(\cdot + x_n) \to 0$ che è ancora una volta assurdo. $\square$

Passiamo finalmente alla dimostrazione del Teorema 2.5.1.

Dimostrazione del Teorema 2.5.1. Poniamo

$$a = \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{H^1}$$

e $W_n^0 = \varphi_n$, costruiamo per induzione su l le varie successioni in modo tale che per ogni $1 \le j \le l$

$$W_n^{j-1} = e^{-it_n^j\Delta}\psi^j(\cdot - x_n^j) + W_n^j, \tag{2.5.25}$$

per ogni $n \ge 1$,

$$t_n^j \xrightarrow{n\to\infty} \bar{t}^j \tag{2.5.26}$$

$$e^{it_n^j\Delta}W_n^{j-1}(\cdot + x_n^j) \rightharpoonup \psi^j, \qquad e^{it_n^j\Delta}W_n^j(\cdot + x_n^j) \rightharpoonup 0 \tag{2.5.27}$$

in $H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\left\|W_n^{j-1}\right\|_{\dot{H}^\lambda}^2 - \left\|\psi^j\right\|_{\dot{H}^\lambda}^2 - \left\|W_n^j\right\|_{\dot{H}^\lambda}^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{2.5.28}$$

per ogni $0 \le \lambda \le 1$,

$$\left\|W_n^{j-1}\right\|_{L^r}^{\alpha+2} - \left\|e^{-it_n^j\Delta}\psi^j(\cdot - x_n^j)\right\|_{L^r}^{\alpha+2} - \left\|W_n^j\right\|_{L^r}^{\alpha+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{2.5.29}$$

e

$$\left\|e^{it\Delta}W_n^{j-1}\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^r)} \xrightarrow{n\to\infty} A_j, \tag{2.5.30}$$

$$\left\|\psi^j\right\|_{H^1} \ge \left(MA_j\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{2.5.31}$$

dove M e γ sono dati dal Lemma 2.5.2.

Per $l = 1$ poniamo

$$A_1 = \limsup_{n\to\infty} \left\|e^{it\Delta}\varphi_n\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^r)}.$$

Estraiamo una sottosuccessione in modo tale che si abbia

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \left\|e^{it\Delta}\varphi_n\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^r)},$$

ed applichiamo il Lemma 2.5.2 con la successione $u_n = \varphi_n = W_n^0$. La proprietà (2.5.30) è vera per costruzione e tutte le altre poprietà sopra elencate, tranne (2.5.26), sono vere per il Lemma 2.5.2. Inoltre, a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che valga anche (2.5.26) con $0 \le \bar{t}^j \le \infty$. Dato $l \ge 2$, supponiamo di aver costruito t_n^j, $\bar{t}^j$, x_n^j, ψ^j, W_n^j per ogni $n \ge 1$ e $j \le l-1$ e poniamo

$$A_l = \limsup_{n\to\infty} \left\|e^{it\Delta}W_n^{l-1}\right\|_{(L^\infty(0,\infty),L^r)}.$$

Estraiamo una sottosuccessione in modo tale che valga (2.5.30) per $j = l$ ed applichiamo il Lemma 2.5.2 alla successione $u_n = W_n^{j-1}$. A meno di passare ad eventuali sottosuccessioni otteniamo $(t_n^l)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, $0 \leq \overline{t}^l \leq \infty$, $(x_n^l)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$, $\psi^l \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(W_n^l)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tali che valgono le proprietà da (2.5.25) a (2.5.29) con $j = l$ e

$$\left\|\psi^l\right\|_{H^1} \geq (MA_l)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.5.32}$$

Dimostriamo che le successioni costruite soddisfano le condizioni del Teorema 2.5.1. Notiamo che (2.5.3) segue da (2.5.28) sommando su j, in modo analogo (2.5.1) segue da (2.5.25). Grazie a (2.5.3) possiamo asserire che $\sum_{j=1}^{l} \|\psi^j\|_{H^1}^2 \leq a$, quindi passando al limite per $l \to \infty$ si ha $\sum_{j=1}^{\infty} \|\psi^j\|_{H^1}^2 \leq a$. Dunque $\|\psi^l\|_{H^1} \to 0$ quando $l \to \infty$ e per (2.5.31) si ha che $A_l \to 0$ per $l \to \infty$.

Osserviamo ora che $\|f\|_{L^a} \leq \|f\|_{L^q}^{\theta} \|f\|_{L^\infty}^{1-\theta}$, dove $\theta = \frac{2[4-(N-2)\alpha]}{N\alpha^2} \in (0,1)$ e q è definito in (2.1.4); dunque

$$\begin{aligned}\left\|e^{it\Delta}W_n^l\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} &\leq \left\|e^{it\Delta}W_n^l\right\|_{L^q((0,\infty),L^r)}^{\theta} \left\|e^{it\Delta}W_n^l\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^r)}^{1-\theta} \leq \\ &\leq C\left\|W_n^l\right\|_{H^1}^{\theta} \left\|e^{it\Delta}W_n^l\right\|_{L^\infty((0,\infty),L^r)}^{1-\theta},\end{aligned} \tag{2.5.33}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che (q,r) è una coppia di Strichartz. Poiché $\limsup_{n\to\infty} \|W_n^l\|_{H^1} \leq a$ per (2.5.3), deduciamo dalla stima (2.5.33) e dal fatto che $A_j \to 0$ per $j \to 0$ che (2.5.6) vale.

L'osservazione 2.5.3 ci dice che se $\psi^j = 0$ per qualche $j \geq 1$, allora $\psi^l = 0$ per ogni $l \geq j$; dunque esiste un indice $J \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tale che $\psi^j \neq 0$ per ogni $j < J$ e $\psi^j = 0$ per ogni $j \geq J$.

Dimostriamo, ora, la proprietà (2.5.5). Chiaramente possiamo supporre che $J \geq 3$, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. Procediamo per induzione su J. Per (2.5.27) si ha

$$e^{it_n^1\Delta}W_n^1(\cdot + x_n^1) \rightharpoonup 0, \qquad e^{it_n^2\Delta}W_n^1(\cdot + x_n^2) \rightharpoonup \psi^2.$$

Applicando il secondo risultato del Lemma 2.5.3, con $z_n = e^{it_n^1\Delta}W_n^1(\cdot + x_n^1)$, deduciamo che $\left|t_n^1 - t_n^2\right| + \left|x_n^1 - x_n^2\right| \to \infty$. Supponiamo allora che $J \geq 4$ e che (2.5.5) sia stata provata per ogni $1 \leq j \neq k \leq l-1$ per qualche $l < J$. Dato $1 \leq j \leq l-1$ segue da (2.5.25) che

$$W_n^{l-1} - W_n^{j-1} = -\sum_{k=j}^{l-1} e^{-it_n^k\Delta}\psi^k(\cdot - x_n^k),$$

quindi

$$e^{it_n^j\Delta}W_n^{l-1}(\cdot + x_n^j) - e^{it_n^j\Delta}W_n^{j-1}(\cdot + x_n^j) = -\psi^j - \sum_{k=j+1}^{l-1} e^{i(t_n^j - t_n^k)\Delta}\psi^k(\cdot + x_n^j - x_n^k). \tag{2.5.34}$$

Usando (2.5.5) segue dalla prima conseguenza del Lemma 2.5.4 che il secondo membro di (2.5.34) converge debolmente a $-\psi^j$. Ma allora usando (2.5.27) deduciamo da (2.5.34) che

$$e^{it_n^j\Delta}W_n^{l-1}(\cdot + x_n^j) \rightharpoonup 0.$$

D'altra parte segue da (2.5.27) con $j = l$ che

$$e^{it_n^l\Delta}W^{l-1}(\cdot + x_n^l) \rightharpoonup \psi^l.$$

Applicando la seconda parte del Lemma 2.5.4 otteniamo che $\left|t_n^l - t_n^j\right| + \left|x_n^l - x_n^j\right| \to \infty$, e quindi che (2.5.5) vale per ogni $1 \le j \ne k \le l$. Infine sommando (2.5.28) (con $\lambda = 1$) e (2.5.29) otteniamo

$$E(W_n^{j-1}) - E(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j(\cdot - x_n^j)) - E(W_n^j) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

e quindi otteniamo (2.5.4) sommando quest'ultima disequazione per j da 1 a l. □

2.6 Esistenza di una soluzione critica.

Lemma 2.6.1. *Siano* $0 < \omega < 1$ *e* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$. *Se* $e^{-it_n\Delta}\psi \in \mathcal{K}_\omega$ *per ogni* $n \ge 1$ *e* $t_n \to \overline{t} \in [0,\infty]$, *allora esiste un profilo non lineare* $\widetilde{\psi}$ *tale che*

$$\left\|\widetilde{\psi}\right\|_{L^2} = \left\|\psi\right\|_{L^2}, \tag{2.6.1}$$

$$E(\widetilde{\psi}) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-it_n\Delta}\psi), \tag{2.6.2}$$

$$\left\|\mathbf{S}(-t)\widetilde{\psi} - e^{-it\Delta}\psi\right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to\overline{t}} 0. \tag{2.6.3}$$

Dimostrazione. Se $\overline{t} = \infty$ allora sappiamo che $\left\|e^{-it_n\Delta}\psi\right\|_{L^r} \to 0$ quando $n \to \infty$, dunque

$$E(e^{-it_n\Delta}\psi) - \frac{1}{2}\left\|\nabla\psi\right\|_{L^2}^2 = E(e^{-it_n\Delta}\psi) - \frac{1}{2}\left\|\nabla e^{-it_n\Delta}\psi\right\|_{L^2}^2 = \left\|e^{-it_n\Delta}\right\|_{L^{\alpha+2}} \to 0.$$

Siccome $\psi \in \mathcal{K}_\omega$ abbiamo che

$$\frac{1}{2}\left\|\nabla\psi\right\|_{L^2}^2 M(\psi)^\sigma \le \omega E(Q)M(Q)^\sigma. \tag{2.6.4}$$

Quindi possiamo usare la Proposizione 2.4.5 ed ottenere $\widetilde{\psi} \in \mathcal{K}_\omega$ tale che valga (2.6.3).

Se $\overline{t} < \infty$, poniamo $\widetilde{\psi} = \mathbf{S}(\overline{t})\left(e^{-i\overline{t}\Delta}\psi\right)$. Siccome $e^{-i\overline{t}\Delta}\psi \in \mathcal{K}_\omega$ abbiamo anche che $\widetilde{\psi} \in \mathcal{K}_\omega$. Infine (2.6.1) e (2.6.2) seguono da (2.6.3) insieme alla conservazione dell'energia e della massa. □

Lemma 2.6.2. *Supponiamo* $\omega_0 < 1$. *Sia* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ *una successione tale che* $\omega_n \to \omega_0$ *per* $n \to \infty$. *Supponiamo inoltre di avere una successione di funzioni* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *tale che* $\varphi_n \in \mathcal{K}_{\omega_n}$, $M(\varphi_n) = 1$ *e* $\varphi_n \notin \mathcal{L}$ *per ogni* $n \ge 1$. *Allora esiste una sua sottosuccessione, che denoteremo ancora con* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *una funzione* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, *successioni* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$, $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ *e* $\overline{\tau} \in [0,\infty]$ *tali che* $M(\psi) = 1$ *ed inoltre*

$$\varphi_n = e^{-i\tau_n\Delta}\psi(\cdot - x_n) + W_n, \qquad n \ge 1 \tag{2.6.5}$$

$$\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} \overline{\tau}, \tag{2.6.6}$$

$$\left\|W_n\right\|_{H^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.6.7}$$

Dimostrazione. Poiché $\varphi_n \in \mathcal{K}_{\omega_n}$ e $M(\varphi_n) = 1$ per (2.3.2) si ha che

$$\left\|\nabla\varphi_n\right\|_{L^2} \le \omega_n^{\frac{1}{2}} \|\nabla Q\|_{L^2} \|Q\|_{L^2}^{\sigma}. \tag{2.6.8}$$

Possiamo, dunque, applicare il Teorema 2.5.1 alla successione φ_n. Otteniamo che esiste una sua sottosuccessione, denotata ancora con φ_n, tale che

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{l} e^{-it_n^j\Delta}\psi^j(\cdot - x_n) + W_n^l, \tag{2.6.9}$$

con le varie successioni che soddisfano le condizioni da (2.5.2) a (2.5.6). Siccome per ipotesi abbiamo che $M(\varphi_n) = 1$ dalla proprietà (2.5.3) della decomposizione in profili si deduce che per ogni $l \ge 1$ si deve avere $\sum_{j=1}^{l} M(\psi^j) \le 1$, passando al limite

$$\sum_{j=1}^{\infty} M(\psi^j) \le 1. \tag{2.6.10}$$

Poniamo

$$\widetilde{M} = \sup_{j\ge 1} M(\psi^j) \le 1. \tag{2.6.11}$$

Similmente, sempre da (2.5.3) con $\lambda = 1$ si ha

$$\sum_{j=1}^{l} \left\|\nabla\psi^j\right\|_{L^2}^2 \le \limsup_{n\to\infty} \left\|\nabla\varphi_n\right\|_{L^2}^2 \overset{(2.6.8)}{\le} \omega_0 \|\nabla Q\|_{L^2}^2 \|Q\|_{L^2}^{2\sigma},$$

pertanto

$$\sum_{j=1}^{l} \left\|\nabla\psi^j\right\|_{L^2}^2 \le \omega_0 \|\nabla Q\|_{L^2}^2 \|Q\|_{L^2}^{2\sigma}. \tag{2.6.12}$$

Ma allora per ogni $j, n \ge 1$ si ha

$$\left\|\nabla e^{-it_n^j\Delta}\psi^j\right\|_{L^2} \left\|e^{-it_n^j\Delta}\psi^j\right\|_{L^2} = \left\|\nabla\psi^j\right\|_{L^2} \left\|\psi^j\right\|_{L^2} \overset{(2.6.10)}{\le} \left\|\nabla\psi^j\right\|_{L^2} \overset{(2.6.12)}{\le} \omega_0^{\frac{1}{2}} \|\nabla Q\|_{L^2} \|Q\|_{L^2}^{\sigma}. \tag{2.6.13}$$

Da (2.6.13) e (2.3.1) si ha

$$E(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j) \ge \frac{N\alpha - 4}{2N\alpha} \left\|\nabla\psi^j\right\|_{L^2}^2 \ge 0, \tag{2.6.14}$$

per ogni $n, j \ge 1$. Similmente a come fatto sopra, sempre dalla proprietà (2.5.3), applicata prima con $\lambda = 0$ e poi con $\lambda = 1$, otteniamo che dato un qualsiasi $l \ge 1$

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|W_n^l\right\|_{L^2} \le 1, \qquad \limsup_{n\to\infty} \left\|\nabla W_n^l\right\|_{L^2}^2 \le \omega_0 \|\nabla Q\|_{L^2}^2 \|Q\|_{L^2}^{2\sigma},$$

e quindi

$$E(W_n^l) \overset{(2.3.1)}{\ge} \frac{N\alpha - 4}{2N\alpha} \ge 0, \tag{2.6.15}$$

per $n(l)$ abbastanza grande. Dalla proprietà (2.5.4), tenendo conto di (2.6.14) e (2.6.15), ricaviamo

$$\limsup_{n\to\infty} E(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j) \le \limsup_{n\to\infty} E(\varphi_n),$$

e, siccome $\varphi_n \in \mathcal{K}_{\omega_n}$ e $M(\varphi_n) = 1$, la stima

$$\limsup_{n\to\infty} E(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j) \le \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma. \tag{2.6.16}$$

Definiamo la quantintà

$$\widetilde{E} = \sup_{j\ge 1}\left[\limsup_{n\to\infty} E(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j)\right] \le \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma. \tag{2.6.17}$$

Dato qualsiasi $\omega_0 < \omega < 1$ da (2.6.11) e (2.6.17) si ha che per ogni $j \ge 1$ ed n abbastanza grande $e^{-it_n^j\Delta}\psi^j \in \mathcal{K}_\omega$. Allora siamo nelle ipotesi del Lemma 2.6.1, otteniamo pertanto un profilo non lineare

$$\widetilde{\psi}^j \in \mathcal{K}_\omega, \tag{2.6.18}$$

tale che

$$\left\| \mathbf{S}(-t)\widetilde{\psi}^j - e^{-it\Delta}\psi^j \right\|_{H^1} \xrightarrow{t\to\overline{t}^j} 0. \tag{2.6.19}$$

Poniamo

$$\widetilde{\omega} = \frac{\widetilde{E}\widetilde{M}^\sigma}{E(Q)M(Q)^\sigma} \le \omega_0. \tag{2.6.20}$$

Osserviamo, allora, che

$$\widetilde{\psi}^j \in \mathcal{K}_{\widetilde{\omega}}, \qquad j \ge 1, \tag{2.6.21}$$

infatti

$$\begin{aligned} E(\widetilde{\psi}^j)M(\widetilde{\psi}^j)^\sigma &\overset{(2.6.1)}{=} E(\widetilde{\psi}^j)M(\psi^j)^\sigma \overset{(2.6.2)}{=} \lim_{n\to\infty} E(e^{-it_n^j\Delta}\widetilde{\psi}^j)M(\psi^j)^\sigma \\ &\overset{(2.6.11+2.6.17)}{\le} \widetilde{E}\widetilde{M}^\sigma = \widetilde{\omega}E(Q)M(Q)^\sigma. \end{aligned}$$

A questo punto vorremmo dimostrare che

$$\widetilde{\omega} = \omega_0. \tag{2.6.22}$$

La dimostrazione di questo fatto è piuttosto laboriosa. Per non appesantire ulteriormente la dimostrazione del teorema supponiamo questo fatto vero, rimandandone la dimostrazione. Sia, dunque, $\widetilde{\omega} = \omega_0$. Da (2.6.20) e (2.6.17) deduciamo facilmente che $\widetilde{M} = 1$ e di conseguenza $\widetilde{E} = \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma$. Siccome $\widetilde{M} = 1$ osserviamo che tutti gli addendi di (2.6.10) sono nulli tanne il primo, ossia $\psi^j = 0$ per ogni $j \ge 2$. Allora poniamo $\psi = \psi^1$, $W_n = W_n^1$, $\tau_n = t_n^1$, $\overline{\tau} = \overline{\tau}^1$ e $x_n = x_n^1$. Con queste imposizioni si ha $M(\psi) = 1$, (2.6.6) vale per definizione e (2.6.5) segue da (2.6.9). Ci resta da dimostrare che $\|W_n\|_{H^1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Siccome $M(\varphi_n) = M(\psi) = 1$, segue da (2.5.3) con $\lambda = 0$ che $\|W_n\|_{L^2} \to 0$ quando $n \to \infty$. Siccome $\widetilde{E} = \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma$ per (2.6.17) abbiamo che $\limsup E(e^{-i\tau_n\Delta}\psi) = \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma$ per $n \to \infty$. Ma per (2.6.2) il lim sup è effettivamente un limite e dunque $E(e^{-i\tau_n\Delta}\psi) \to \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma$. Ma allora ricordando (2.6.16)

$$\limsup_{n\to\infty} E(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j) \le \limsup_{n\to\infty} E(\varphi_n) \le \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma$$

deduciamo che $E(\varphi_n) \to \omega_0 E(Q)M(Q)^\sigma$ per il teorema dei carabinieri. Ma allora da (2.5.4) ricaviamo che $\limsup E(W_n) = 0$ e dunque possiamo, finalmente, concludere, grazie alla disuguaglianza (2.6.15), che $\|\nabla W_n\|_{L^2} \to 0$ e quindi che $\|W_n\|_{H^1} \to 0$.

Dimostriamo ora che $\widetilde{\omega} = \omega_0$. Procediamo per assurdo supponendo che $\widetilde{\omega} < \omega_0$. Intuitivamente quello che vogliamo fare è approssimare

$$\mathbf{S}(t)\varphi_n \approx \sum_{j=1}^{l} \mathbf{S}(t-t_n^j)\widetilde{\psi}^j(\cdot - x_n) \tag{2.6.23}$$

e dimostrare che tutti i termini a destra dell'uguale in (2.6.23) hanno la proprietà $Sc(\varphi)$. Quindi per l ed n abbstanza grandi e per la proprietà di divergenza (2.5.5) vorremmo, euristicamente parlando, provare che $\mathbf{S}(t)\varphi_n$ ha la proprietà $Sc(\varphi)$, il che ci darebbe l'assurdo cercato.

Entriamo nel dettaglio, sia dunque $\widetilde{\omega} < \omega_0$. Siccome $\mathcal{K}_{\widetilde{\omega}}$ è invariante per passaggio al coniugio, deduciamo da (2.6.21) che $\widetilde{\psi}^j$ e $\overline{\widetilde{\psi}^j} \in \mathcal{K}_{\widetilde{\omega}}$, quindi per (2.4.2) e per definizione di ω_0

$$\left\| \mathbf{S}(\cdot)\widetilde{\psi}^j \right\|_{L^a(\mathbb{R},L^r)} < \infty, \tag{2.6.24}$$

per ogni $j \geq 1$. Definiamo le suguenti quantità:

$$u_n(t) = \mathbf{S}(t)\varphi_n, \tag{2.6.25}$$

$$v_n^j(t) = \mathbf{S}(t-t_n^j)\widetilde{\psi}^j(\cdot - x_n^j), \tag{2.6.26}$$

$$u_n^l(t) = \sum_{j=1}^{l} v_n^j(t) \tag{2.6.27}$$

$$\widetilde{W}_n^l = \sum_{j=1}^{l} \left(e^{-it_n^j\Delta}\psi^j(\cdot - x_n^j) - \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j(\cdot - x_n^j) \right) + W_n^l. \tag{2.6.28}$$

Mettendo insieme (2.6.9) e tutte le equazioni da (2.6.25) a (2.6.28) otteniamo

$$i\partial_t u_n^l + \Delta u_n^l + u_n^l \left| u_n^l \right|^\alpha = e_n^l \tag{2.6.29}$$

dove

$$e_n^l = u_n^l \left| u_n^l \right|^\alpha - \sum_{j=1}^{l} v_n^l \left| v_n^l \right|^\alpha \tag{2.6.30}$$

e

$$u_n(0) - u_n^l(0) = \widetilde{W}_n^l. \tag{2.6.31}$$

Vogliamo applicare la Proposizione A.0.4, cominciamo pertanto a stimare $\left\| u_n^l \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)}$. Non è conveniente stimare direttamente questa quantità, quindi stimiamo $\|u\|_{L^\infty((0,\infty),H^1)}$ e $\|u\|_{L^\gamma((0,\infty),L^r)}$ ed usiamo (A.0.13) per ottenere il controllo desiderato. Notiamo che per (2.6.10) e (2.6.12) si ha

$$\sum_{j\geq 1} \left\| \psi^j \right\|_{H^1}^2 =: C_1 < \infty. \tag{2.6.32}$$

In particolare esiste $l_0 \geq 1$ tale che

$$\left\| \psi^j \right\|_{H^1} \leq \frac{\delta_{sd}}{2} \tag{2.6.33}$$

per ogni $j \geq l_0$, ove δ_{sd} è dato dalla Proposizione 2.4.3. Usando (2.6.19) deduciamo da (2.6.33) che per ogni $l \geq l_0$ esiste $n_1(l) \geq 1$ tale che

$$\left\| \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j \right\|_{H^1} \leq \delta_{sd} \leq 1, \qquad l_0 \leq j \leq l,\ n \geq n_1(l). \tag{2.6.34}$$

Inoltre segue da (2.6.32) e (2.6.19) che dato un qualsiasi $l \geq 1$ esiste $n_2(l) \geq 1$ tale che

$$\sum_{j=1}^{l} \left\| \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j \right\|_{H^1}^2 \leq 2C_1, \qquad n \geq n_2(l). \tag{2.6.35}$$

Per la disuguaglianza numerica (A.0.14) si ha che per ogni $l \geq l_0$

$$\left\| \sum_{l_0}^{l} v_n^j \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+^{N+1})} \leq \sum_{l_0}^{l} \left\| v_n^j \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+^{N+1})}^\gamma + C_l \sum_{l_0 \leq j \neq k \leq l} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left| v_n^j \right| \left| v_n^k \right| \left| v_n^k \right|^{\gamma-2}, \tag{2.6.36}$$

con $\mathbb{R}_+^{N+1} = (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$. Per (2.6.26) e (2.4.3) si ha

$$\sum_{l_0}^{l} \left\| v_n^j \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+^{N+1})}^\gamma \leq C_{sd} \sum_{l_0}^{l} \left\| \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j \right\|_{H^1}^\gamma,$$

siccome tutti gli addendi al secondo membro sono minori di 1 e $\gamma > 2$ si ha

$$\sum_{l_0}^{l} \left\| v_n^j \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+^{N+1})}^\gamma \leq C_{sd} \sum_{l_0}^{l} \left\| \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j \right\|_{H^1}^2 \overset{(2.6.35)}{\leq} 2C_1C_{sd}, \tag{2.6.37}$$

per $n \geq \max\{n_1(l), n_2(l)\}$. Usando ora la disuguagliaza di Hölder (con $p = \frac{\gamma}{2}$ e $q = \frac{\gamma}{\gamma-2}$) otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left| v_n^j \right| \left| v_n^k \right| \left| v_n^k \right|^{\gamma-2} \leq \left\| v_n^k \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+^{N+1})}^{\gamma-2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left| v_n^j \right|^{\frac{\gamma}{2}} \left| v_n^k \right|^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{\frac{2}{\gamma}}.$$

Applicando (2.4.3) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left| v_n^j \right| \left| v_n^k \right| \left| v_n^k \right|^{\gamma-2} \leq{}& \left\| \mathbf{S}(-t_n^k)\widetilde{\psi}^k \right\|_{H^1}^{\gamma-2} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \left| \mathbf{S}(t-t_n^j)\widetilde{\psi}^j(x-x_n^j) \right|^{\frac{\gamma}{2}} \left| \mathbf{S}(t-t_n^k)\widetilde{\psi}^j(x-x_n^k) \right|^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{\frac{2}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbf{S}(t)\widetilde{\psi}^j$ e $\mathbf{S}(t)\widetilde{\psi}^k$ sono due funzioni in $L^\gamma(\mathbb{R}^{N+1})$ e per (2.5.5) $\left| t_n^j - t_n^k \right| + \left| x_n^j - x_n^k \right| \to \infty$ per $n \to \infty$, se $\widetilde{\psi}^j$ e $\widetilde{\psi}^k$ sono entrambe non nulle deduciamo dal Lemma 2.4.2 che il secondo membro della disuguaglianza sopra tende a 0 quando $n \to \infty$, pertanto

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left| v_n^j \right| \left| v_n^k \right| \left| v_n^k \right|^{\gamma-2} \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{2.6.38}$$

Mettendo insieme (2.6.36), (2.6.37) e (2.6.38) troviamo che, dato $l \geq l_0$ esiste $n_3(l)$ tale che vale la stima cercata

$$\left\| \sum_{l_0}^{l} v_n^j \right\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+^{N+1})}^{\gamma} \leq 4C_1 C_{sd}, \qquad l \geq l_0,\, n \geq n_3(l). \tag{2.6.39}$$

Passiamo a stimare la norma H^1. Abbiamo

$$\left\| \sum_{j=l_0}^{l} v_n^j(t) \right\|_{H^1}^2 = \sum_{j=l_0}^{l} \left\| v_n^j(t) \right\|_{H^1}^2 + 2 \sum_{l_0 \leq j \neq k \leq l} \langle v_n^j(t), v_n^k(t) \rangle_{H^1}. \tag{2.6.40}$$

Scrivendo per esteso v_n^j attraverso (2.6.26), forti di (2.6.34) possiamo maggiorare

$$\sum_{j=l_0}^{l} \left\| v_n^j(t) \right\|_{H^1}^2 \overset{(2.4.3)}{\leq} C_{sd} \sum_{l_0}^{l} \left\| \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j \right\|_{H^1}^2 \overset{(2.6.35)}{\leq} 2C_1 C_{sd}, \tag{2.6.41}$$

per $n \geq \max\{n_1(l), n_2(l)\}$. Ora, dato un qualsiasi $j \neq k \geq l_0$, segue da (2.6.34), dal Corollario (A.0.13) e dalla proprietà di divergenza (2.5.5) che

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \langle v_n^j(t), v_n^k(t) \rangle_{H^1} \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{2.6.42}$$

Allora mettendo insieme (2.6.40), (2.6.41) e (2.6.42), abbiamo che dato $l \geq$ _0 esiste $n_4(l) \geq 1$ tale che

$$\left\| \sum_{l_0}^{l} v_n^j \right\|_{L^\infty(0,\infty), H^1}^2 \leq 4C_1 C_{sd}, \qquad l \geq l_0,\, n \geq n_4(l). \tag{2.6.43}$$

Scegliendo $n_5(l) \geq \max\{n_3(l), n_4(l)\}$ possiamo finalmente usare le stime (A.0.13), (2.6.39) e (2.6.43) ed ottenere che esiste una costante A_1 indipendente da $l \geq l_0$ tale che

$$\left\| \sum_{l_0}^{l} v_n^j \right\|_{L^a((0,\infty), L^r)} \leq A_1, \qquad l \geq l_0,\, n \geq n_5(l). \tag{2.6.44}$$

D'altra parte per (2.6.24) esiste una costante A_2 tale che

$$\left\| \sum_{j=1}^{l_0} v_n^j \right\|_{L^a((0,\infty), L^r)} \leq A_2, \tag{2.6.45}$$

per ogni $n \geq 1$. Ponendo $A = A_1 + A_2$ deduciamo da (2.6.44) e (2.6.45) che

$$\left\| u_n^l \right\|_{L^a((0,\infty), L^r)} \leq A, \qquad n \geq n_5(l). \tag{2.6.46}$$

Ora fissiamo l_1 abbastanza grande in modo tale che

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| e^{it\Delta} W_n^{l_1} \right\|_{L^a((0,\infty), L^r)} \leq \frac{\varepsilon(A)}{2}, \tag{2.6.47}$$

ove A è dato da (2.6.46) e $\varepsilon(A)$ è dato dalla Proposizione A.0.4. (Ricordiamo che tale l_1 esiste per (2.5.6)). Usando l'equazione (2.6.28) otteniamo

$$\begin{aligned}\left\| e^{it\Delta}\widetilde{W}_n^{l_1}\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \le \sum_{j=1}^{l_1}\left\| e^{-it_n^j\Delta}\psi^j - \mathbf{S}(-t_n^j)\widetilde{\psi}^j\right\|_{H^1} \\ + \left\| e^{it\Delta}W_n^{l_1}\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)},\end{aligned}$$

così, applicando (2.6.19) e (2.6.47), scopriamo che esiste $n_6 \ge 1$ tale che

$$\left\| e^{it\Delta}\widetilde{W}_n^{l_1}\right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \le \varepsilon(A), \qquad n \ge n_6. \tag{2.6.48}$$

Segue dalla disuguaglianza numerica in appendice (A.0.15) che

$$\left\| e_n^{l_1}\right\|_{L^{b'}((0,\infty),L^{r'})} \le C_{l_1}\sum_{1\le i\ne k\le l}\left\| \left|v_n^j\right|^\alpha \left|v_n^k\right|\right\|_{L^{b'}((0,\infty),L^{r'})}. \tag{2.6.49}$$

Fissiamo $1 \le j \ne k \le l_1$ ed osserviamo che per (2.6.24) si ha $\mathbf{S}(\cdot)\widetilde{\psi}^j$, $\mathbf{S}(\cdot)\widetilde{\psi}^k \in L^a((0,\infty),L^r)$. Ricordiamo che per (2.1.4) si ha $(\alpha+1)b' = a$ e $(\alpha+1)r' = r$. Allora approssimando $\mathbf{S}(\cdot)\widetilde{\psi}^k$ in $L^a((0,\infty),L^r)$ con funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ ed usando (2.5.5) si ha

$$\left\| \left|v_n^j\right|^\alpha \left|v_n^k\right|\right\|_{L^{b'}((0,\infty),L^{r'})} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.6.50}$$

Quindi $\left\| e_n^{l_1}\right\|_{L^{b'}((0,\infty),L^{r'})} \le \varepsilon(A)$ per ogni $n \ge n_7$. Quindi siamo nelle ipotesi della Proposizione A.0.4 e possiamo concludere che $\varphi_n \in \mathscr{L}$, ossia l'assurdo cercato. □

Lemma 2.6.3. *Sia* $0<\omega<1$ *e* $F \subset \mathscr{K}_\omega$ *un sottoinsieme relativamente compatto di* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Si ha che per ogni* R, $T>0$,

$$E = \left\{\mathbf{S}(t)\varphi(\cdot - y) : \varphi \in F, 0 \le t \le T, \left|y\right| < R\right\}$$

è un sottoinsieme relativamente compatto di $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Siano $(\varphi_n)_{n\ge1} \subset F$, $(t_n)_{n\ge1} \subset [0,T]$ e $(y_n)_{n\ge1} \subset \left\{\left|y\right| \le R\right\}$. Siccome per (2.3.2) $\mathscr{K}_\omega$ è chiuso in $H^1(\mathbb{R}^N)$ a meno di estrarre delle sottosuccessioni esistono $\varphi \in \mathscr{K}_\omega$, $t \in [0,T]$ e $y \in \mathbb{R}^N$ tali che $\varphi_n \to \varphi$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$, $t_n \to t$ e $y_n \to y$ per $n \to \infty$. Dunque si ha $\mathbf{S}(t_n)\varphi(\cdot - y_n) \to \mathbf{S}(t)\varphi(\cdot - y)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$, ossia la tesi. □

Teorema 2.6.4. *Siano* $\mathscr{L}$ *definito in (2.2.1),* $\mathscr{K}_\omega$ *definito in (2.2.2) e* $\omega_0 \in (0,1]$ *definito in (2.2.3). Se* $\omega_0 < 1$ *allora esiste* $\varphi_{crit} \in \mathscr{K}$ *tale che* $\varphi_{crit} \notin \mathscr{L}$. *Inoltre, se* u_{crit} *è la corrispondente soluzione di (NLS* $_f$*), esiste una funzione* $x \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ *tale che* $\{u_{crit}(t,\cdot - x(t)) : t \ge 0\}$ *è relativamente compatto in* $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Cominciamo a dimostrare l'esistenza di una soluzione critica.

Per definizione di ω_0 esistono una successione di numeri $(\omega_n)_{n\ge1} \subset (0,1)$ ed una successione di funzioni $(\varphi_n)_{n\ge1} \in \mathscr{K}_{\omega_n}$ tali che $\varphi_n \in \mathscr{K}_{\omega_n}$ e $\varphi_n \notin \mathscr{L}$. Osserviamo che entrambe le quantità $E(u)M(u)^\sigma$ e $\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$ sono invarianti per il riscalamento $u \mapsto \lambda^{\frac{\alpha}{2}}u(\lambda\cdot)$. Siccome, come osservato nella Sezione 1.5, (NLS $_f$) è invariante per il riscalamento $u_\lambda = \lambda^{\frac{\alpha}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$, possiamo assumere che $M(\varphi_n) = 1$ ed applicare il Lemma 2.6.2. Dunque per (2.6.5) abbiamo $\varphi_n = e^{-i\tau_n\Delta}\psi(\cdot - x_n) + W_n$ per ogni $n \geq 1$. In aggiunta deduciamo da (2.6.7) e (2.4.4) che

$$\left\| e^{it\Delta} W_n \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.6.51}$$

Sia $\widetilde{\psi}$ il profilo non lineare associato a ψ fornitoci dal Lemma 2.6.1. Siccome $M(\psi) = 1$ per (2.6.3) si ha anche $M(\widetilde{\psi}) = 1$. Supponiamo che valga

$$\left\| \mathbf{S}(\cdot)\widetilde{\psi} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} < \infty. \tag{2.6.52}$$

Osserviamo che

$$\varphi_n - \mathbf{S}(-\tau_n)\widetilde{\psi}(\cdot - x_n) = e^{-i\tau_n\Delta}\psi(\cdot - x_n) - \mathbf{S}(-\tau_n)\widetilde{\psi}(\cdot - x_n) + W_n,$$

così applicando (2.6.3), (2.4.4) e (2.6.51) otteniamo

$$\left\| e^{it\Delta}\left(\varphi_n - \mathbf{S}(-\tau_n)\widetilde{\psi}(\cdot - x_n)\right) \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.6.53}$$

Ma allora la Proposizione A.0.4, considerate (2.6.52) e (2.6.53), ci dice che $\varphi_n \in \mathscr{L}$ per n abbastanza grande, in contraddizione con l'ipotesi che $\varphi_n \notin \mathscr{L}$. Quindi (2.6.52) deve essere falsa, ossia $\left\| \mathbf{S}(\cdot)\widetilde{\psi} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} = \infty$ oppure $\left\| \mathbf{S}(\cdot)\overline{\widetilde{\psi}} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} = \infty$. Nel primo caso poniamo $\varphi_{crit} = \widetilde{\psi}$ nel secondo $\varphi_{crit} = \overline{\widetilde{\psi}}$. In entrambe i casi le conclusioni seguono immediatamente. Osserviamo inoltre che $M(\varphi_{crit}) = 1$ per il Lemma 2.6.2.

Dimostriamo ora la proprietà di compattezza. Enunciamo un claim che proveremo alla fine della dimostrazione del teorema.

Claim 2.6.5. *Per ogni successione $(n_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ tale che $n_k \to \infty$ quando $n \to \infty$ esiste una sottosuccessione, che denoteremo ancora con $(n_k)_{k\geq 1}$, una successione $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tali che $u_{crit}(n_k, \cdot - x_k) \to v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Proviamo che esiste una successione $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ tale $(u_{crit}(n, \cdot - y_n))_{n\geq 1}$ è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Cominciamo ad osservare che esiste $R \leq \infty$ e $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ tale che

$$\int_{|x-y_n|<R} \left| u_{crit}(n, \cdot - y_n) \right|^2 \geq \frac{3}{4}. \tag{2.6.54}$$

Se così non fosse allora esisterebbero delle successioni $(n_k)_{k\geq 1}$ ed $R_k \to \infty$ tali che

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{|x-y|<R_k} \left| u_{crit}(n_k, \cdot - y) \right|^2 < \frac{3}{4}. \tag{2.6.55}$$

Se $(n_k)_{k\geq 1}$ fosse una successione limitata allora $u_{crit}(n_k)$ è contenuta in un sottoinsieme compatto di H^1 quindi applicando il Lemma 2.4.2 avremmo che

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{|x-y|>R_k} \left| u_{crit}(n_k, \cdot - y) \right|^2 \to 0,$$

ma quest'ultimo fatto e (2.6.55) sono in contrasto con $\|u_{crit}\|_{L^2} = 1$. Quindi possiamo assumere $(n_k)_{k\geq 1} \to \infty$. Per il Claim 2.6.5, a meno di passare a sottosuccessioni, abbiamo che esistono $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tali che $u_{crit}(n_k, \cdot - x_k) \to v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. In particolare si ha $\|v\|_{L^2} = 1$ e quindi esistono $\rho > 0$ e $z \in \mathbb{R}^N$ tali che

$$\int_{|x-z|<\rho} |v|^2 > \frac{3}{4}, \tag{2.6.56}$$

ma allora per k abbastanza grande

$$\int_{|x-z|<\rho} |u_{crit}(n_k, \cdot - x_k)|^2 > \frac{3}{4}, \tag{2.6.57}$$

che contraddice (2.6.55) e dunque prova (2.6.54). Affermiamo che la successione $(y_n)_{n\geq 1}$ è tale che $(u_{crit}(n, \cdot - y_n))_{n\geq 1}$ è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Sia $n_k \to \infty$, per il Claim 2.6.5, a meno di sottosuccessioni, abbiamo $u_{crit}(n_k, \cdot - x_k) \to v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Sappiamo, come abbiamo fatto vedere poc'anzi che esistono $\rho > 0$ e $z \in \mathbb{R}^N$ tali che (2.6.56) valga. Ma allora per (2.6.54) e (2.6.56) dobbiamo avere $\left|y_{n_k} - x_k\right| < R + \rho$, altrimenti otterremmo $\|u_{crit}\|_{L^2} > 1$, che sarebbe assurdo. Pertanto, a meno di estrarre un'ulteriore sottosuccessione, possiamo affermare che $y_{n_k} - x_k \to \overline{x} \in \mathbb{R}^N$ quando $k \to \infty$. Dunque abbiamo che $u_{crit}(n_k, \cdot - y_{n_k}) \to v(\cdot - \overline{x})$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Così ogni sottosuccessione di $(u_{crit}(n, \cdot - y_n))_{n\geq 1}$ ammette una sottosuccessione convergente, e pertanto $(u_{crit}(n, \cdot - y_n))_{n\geq 1}$ è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Tramite il Lemma 2.6.3 ci assicuriamo che anche $\mathbf{S}(1)(u_{crit}(n, \cdot - y_n))_{n\geq 1}$ è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dal momento che $\mathbf{S}(1)u_{crit}(n, \cdot - y_n) = u_{crit}(n+1, \cdot - y_n)$, abbiamo che entrambe le sucessioni $(u_{crit}(n, \cdot - y_n))_{n\geq 1}$ e $(u_{crit}(n, \cdot - y_{n-1}))_{n\geq 2}$ sono relativamente compatte. Se chiamiamo $v_n = u_{crit}(n, \cdot - y_n)$, allora $(v_n)_{n\geq 1}$ e $(v_n(\cdot - y_{n-1} + y_n))_{n\geq 2}$ sono relativamente compatte. Considerato che $\|v_n\|_{L^2} = \left\|\varphi_{crit}\right\|_{L^2} = 1$ si deve necessariamente avere

$$R := \sup_{n\geq 2} \left|y_n - y_{n-1}\right| < \infty,$$

altrimenti per il Lemma 2.4.2 avremmo che la norma L^2 sarebbe strettamente più piccola di 1. Sempre il Lemma 2.6.3 ci assicura che l'insieme

$$E = \left\{u_{crit}(n+\theta, \cdot - y_n + y) : n \geq 1, 0 \leq \theta, \left|y\right| \leq R\right\}$$

è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Infine definiamo la funzione

$$x(t) = \begin{cases} y_1 & 0 \leq t \leq 1 \\ y_n + (t-n)(y_{n+1} - y_n) & n \leq t < n+1. \end{cases} \tag{2.6.58}$$

Siccome $u_{crit}(\cdot - x(t)) \in E$ per ogni $t \geq 1$ abbiamo che $\cup_{t\geq 0}(u_{crit}(\cdot - x(t)))$ è relativamente compatto in $H^1(\mathbb{R}^N)$, e questo completa la dimostrazione del teorema.

Ci resta da dimostrare il Claim 2.6.5. Applichiamo il Lemma 2.6.3 alla successione $\varphi_k = u_{crit}(n_k)$, otteniamo:

$$u_{crit}(n_k) = e^{-i\tau_k\Delta}\psi(\cdot - x_k) + W_k, \qquad k \geq 1 \tag{2.6.59}$$

$$\tau_k \to \overline{\tau}, \qquad k \to \infty \tag{2.6.60}$$

$$\|W_k\|_{H^1} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{2.6.61}$$

Assumiamo $\overline{\tau} = \infty$. Osservando che $\overline{u_{crit}(n_k)} = e^{i\tau_k\Delta}\overline{\psi}(\cdot - x_k) + \overline{W}_k$, abbiamo

$$\left\| e^{it\Delta}\overline{u_{crit}(n_k)} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \le \left\| e^{it\Delta}\overline{\psi} \right\|_{L^a((\tau_k,\infty),L^r)} + C\|W_k\|_{H^1}. \tag{2.6.62}$$

Siccome $\tau_k \to \infty$ e $\|W_k\|_{H^1} \to 0$, deduciamo che $\left\| e^{it\Delta}\overline{u_{crit}(n_k)} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \to 0$. In particolare per k abbastanza grande si ha $\left\| e^{it\Delta}\overline{u_{crit}(n_k)} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \le \varepsilon(0)$, dove $\varepsilon(\cdot)$ è dato dalla Proposizione A.0.4. Applicando dunque la Proposizione A.0.4 con $\widetilde{u} = e = 0$ e $u = \mathbf{S}(\cdot)\overline{u_{crit}(n_k)}$ concludiamo che

$$\left\| \mathbf{S}(\cdot)\overline{u_{crit}(n_k} \right\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \le C(0)$$

per k abbastanza grande. Dal momento che $\mathbf{S}(t)\overline{u_{crit}(n_k)} = \overline{\mathbf{S}(-t+n_k)\varphi_{crit}}$, la disuguaglianza sopra ci dice anche che

$$\|u_{crit}\|_{L^a((-\infty,n_k),L^r)} \le C(0).$$

Passando al limite per $k \to \infty$ otteniamo $u_{crit} \in L^a(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N))$. Quindi per definizione $\varphi_{crit} \in \mathscr{L}$, che è assurdo. Necessariamente dobbiamo avere, quindi, $\overline{\tau} < \infty$ e deduciamo dalle equazioni (2.6.59), (2.6.60) e (2.6.61) che $u_{crit}(n_k, \cdot + x_k) \to e^{-i\overline{\tau}}\psi$, ossia la tesi del Claim. □

2.7 Rigidità.

Teorema 2.7.1. *Sia $\varphi \in \mathscr{K}$ e $u \in C([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$ la rispettiva soluzione di (NLS $_f$). Se esiste una funzione $x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$ tale che*

$$\sup_{t\ge 0} \int_{|x+x(t)|>R} \left\{ |\nabla u(t,x)|^2 + |u(t,x)|^{\alpha+2} + |u(t,x)|^2 \right\} \xrightarrow{r\to\infty} 0, \tag{2.7.1}$$

allora $\varphi = 0$.

Ci serviremo del seguente lemma, per la cui dimostrazione facciamo riferimento a [9].

Lemma 2.7.2. *Sia $\chi \in C_c^\infty([0,\infty))$ e $T > 0$. Se $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}^N))$ è una soluzione di (NLS $_f$), allora la funzione $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \chi(r)|u(t,x)|^2\,dx$ è di classe C^2 sull'intervallo $[0,T]$. Inoltre,*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \chi(r)|u(t,x)|^2\,dx = 2\Im\int_{\mathbb{R}^N} \chi'(r)\overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\,dx,$$

ed ancora

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^N} \chi(r)|u(t,x)|^2\,dx =& 8\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{4N\alpha}{\alpha+2}\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \\ &+ 4\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\chi'(r)}{r} - 2\right)|\nabla u|^2 + 4\int_{\mathbb{R}^N}\left(\chi''(r) - \frac{\chi'(r)}{r}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 \\ &+ \frac{2\alpha}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(2N - \Delta\chi\right)|u|^{\alpha+2} - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\Delta^2\chi,\end{aligned}$$

per ogni $0 \le T$. (Nelle formule, con abuso di notazione, la mappa χ è considerata sia come funzione di $r = |x|$ che di x).

Dimostrazione del Teorema 2.7.1. Procediamo per assurdo, supponiamo dunque $\varphi \neq 0$. La dimostrazione è articolata in vari passi. La prima osservazione è che possiamo supporre, senza perdita di generalità, che φ abbia momento nullo. Il secondo passo fondamentale è provare che $x(t) = o(t)$ per $t \to \infty$, ed infine sfruttare il fatto che $E(\varphi) > 0$ per trovare l'assurdo cercato. (Il fatto che si abbia $E(\varphi) > 0$ segue dalle ipotesi e dal Lemma 2.3.1).

Cominciamo a dimostrare che possiamo supporre $P(\varphi) = 0$. Consideriamo

$$y_0 = -\frac{P(\varphi)}{M(\varphi)} \tag{2.7.2}$$

e sia

$$\widetilde{\varphi}(x) = e^{ix\cdot y_0}\varphi(x). \tag{2.7.3}$$

Si ha $\widetilde{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$, $\|\widetilde{\varphi}\|_{L^{\alpha+2}} = \|\varphi\|_{L^{\alpha+2}}$ e $\|\nabla\widetilde{\varphi}\|^2_{L^2} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2} - 2\left|P(\varphi)\right| M(\varphi)^{-1} \leq \|\nabla\varphi\|^2_{L^2}$. In particolare, quindi, abbiamo che $\widetilde{\varphi} \neq 0$ e $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{K}$. Per l'invarianza Galileana sappiamo che la corrispondente soluzione di (NLS $_f$) è data da

$$\widetilde{u}(t,x) = e^{i\left(x\cdot y_0 - t|y_0|^2\right)} u(t, x - 2ty_0).$$

Si prova con facili conti che esiste una costante indipendente da x e t tale che

$$\left[|\nabla\widetilde{u}|^2 + |\widetilde{u}|^{\alpha+2} + |\widetilde{u}|^2\right] \leq C\left[|\nabla u|^2 + |u|^{\alpha+2} + |u|^2\right](t, x - 2ty_0),$$

quindi $\widetilde{u}$ soddisfa (2.7.1) con $x(t)$ rimpiazzato da $\widetilde{x}(t) = x(t) - 2y_0$. Pertanto $\widetilde{\varphi}$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema, ma ha momento nullo.

Dimostriamo che $x(t) = o(t)$ per $t \to \infty$. Se così non fosse, allora esisterebbe $\delta > 0$ e $t_n \to \infty$ tali che

$$|x(t_n)| \geq \delta t_n. \tag{2.7.4}$$

Senza perdere di generalità possiamo assumere che $x(0) = 0$. Definiamo

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq |x(t_n)|\}. \tag{2.7.5}$$

Si vede chiaramente da questa definizione che $0 < \tau_n \leq t_n$ e $|x(\tau_n)| = |x(t_n)|$, così che

$$\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty, \tag{2.7.6}$$

$$|x(t)| < |x(\tau_n)|, \qquad 0 \leq t < \tau_n, \tag{2.7.7}$$

$$|x(\tau_n)| \geq \delta\tau_n. \tag{2.7.8}$$

Fissiamo ora una funzione $\theta \in C^\infty([0,\infty))$ tale che $0 \leq \theta \leq 1$, $\left|\theta'\right| \leq 2$ e

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r \geq 2. \end{cases}$$

Dato $R > 0$ poniamo

$$\theta_R(r) = \theta\left(\frac{r}{R}\right).$$

È un conto immediato verificare che

$$|\theta_R(|x|)-1|+|x|\left|\theta_R'(|x|)\right| \leq 5\times \mathbb{1}_{\{|x|>R\}} \text{ e } |x|\theta_R(|x|)\leq 2R. \tag{2.7.9}$$

Definiamo la funzione

$$z_R(t)=\int_{\mathbb{R}^N} x\theta_R(|x|)\,|u(t,x)|^2\,dx.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione (NLS $_f$) per $x\theta_R\overline{u}$ ed usando che $P(u(t))=0$ otteniamo che

$$z_R'(t)=2\Im\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\theta_R\overline{u}\nabla u+x\theta_R'\overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}=2\Im\int_{\mathbb{R}^N}\left\{(\theta_R-1)\overline{u}\nabla u+x\theta_R'\overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}.$$

Usando la disuguaglianza (2.7.9) deduciamo che

$$\left|z_R'(t)\right|\leq 10\int_{\{|x|>R\}}|u|\,|\nabla u|\leq 5\int_{\{|x|>R\}}\left\{|\nabla u|^2+|u|^2\right\}. \tag{2.7.10}$$

D'altra parte per l'ipotesi (2.7.1) esiste $\rho>0$ tale che

$$\int_{\{|x+x(t)|>\rho\}}\left\{|\nabla u(t)|^2+|u(t)|^2\right\}\leq\frac{\delta M(\varphi)}{10(1+\delta)}, \tag{2.7.11}$$

per ogni $t\geq 0$. Poniamo

$$R_n=|x(\tau_n)|+\rho. \tag{2.7.12}$$

Dato $0\leq t\leq\tau_n$ e $|x|>R_n$, deduciamo da (2.7.7) e (2.7.12) che

$$|x+x(t)|\geq R_n-|x(t)|\geq R_n-|x(\tau_n)|=\rho. \tag{2.7.13}$$

Allora

$$\left|z_R'(t)\right|\overset{(2.7.10)}{\leq}5\int_{\{|x|>R_n\}}\left\{|\nabla u|^2+|u|^2\right\}\overset{(2.7.13)}{\leq}\int_{\{|x+x(t)|>\rho\}}\left\{|\nabla u|^2+|u|^2\right\}\overset{(2.7.11)}{\leq}\frac{\delta M(\varphi)}{2(1+\delta)} \tag{2.7.14}$$

per ogni $0\leq t\leq\tau_n$ e per ogni $n\geq 1$. Ora, siccome $R_n\geq\rho$, si ha che $\theta_{R_n}=1$ sull'insieme $\left\{|x|<\rho\right\}$ e ricordando che $x(0)=0$ troviamo

$$\begin{aligned}\left|z_{R_n}(0)\right| &\leq \int_{\{|x|<\rho\}}|x|\theta_{R_n}\left|\varphi\right|+\int_{\{|x|>\rho\}}|x|\theta_{R_n}\left|\varphi\right|^2\\ &=\int_{\{|x|<\rho\}}|x|\left|\varphi\right|^2+\int_{\{|x+x(0)|>\rho\}}|x|\theta_{R_n}\left|\varphi\right|^2\\ &\overset{(2.7.11+2.7.9)}{\leq}\rho M(\varphi)+\frac{\delta M(\varphi)}{5(1+\delta)}R_n.\end{aligned} \tag{2.7.15}$$

Troviamo ora una stima analoga per $z_{R_n}(\tau_n)$, procediamo come segue.

$$z_{R_n}(\tau_n)=\int_{\{|x+x(\tau_n)|>\rho\}}x\theta_{R_n}\,|u(\tau_n,x)|^2+\int_{\{|x+x(\tau_n)|<\rho\}}x\theta_{R_n}\,|u(\tau_n,x)|^2=I+II. \tag{2.7.16}$$

Per (2.7.9) e (2.7.11) si ha che

$$I \le \frac{\delta M(\varphi)}{5(1+\delta)} R_n. \tag{2.7.17}$$

Osserviamo poi che se $|x + x(\tau_n)| < \rho$, allora $|x| \le |x + x(\tau_n)| + |x(\tau_n)| \le \rho + |x(\tau_n)| = R_n$, pertanto $\theta_{R_n}(|x|) = 1$; e quindi

$$\begin{aligned} II &= \int_{\{|x+x(\tau_n)|<\rho\}} x\theta_{R_n} |u(\tau_n, x)|^2 \\ &= \int_{\{|x+x(\tau_n)|<\rho\}} (x + x(\tau_n)) |u(\tau_n, x)|^2 - x(\tau_n) \int_{\{|x+x(\tau_n)|<\rho\}} |u(\tau_n, x)|^2 \\ &= -x(\tau_n) M(\varphi) + \int_{\{|x+x(\tau_n)|<\rho\}} (x + x(\tau_n)) |u(\tau_n, x)|^2 \\ &+ x(\tau_n) \int_{\{|x+x(\tau_n)|>\rho\}} |u(\tau_n, x)|^2. \end{aligned}$$

Deduciamo da (2.7.12) e (2.7.11) che

$$|II| \ge |x(\tau_n)| M(\varphi) - \rho M(\varphi) - \frac{\delta M(\varphi)}{10(1+\delta)} R_n. \tag{2.7.18}$$

Grazie a (2.7.16), (2.7.17) e (2.7.18) otteniamo

$$\left|z_{R_n}\right| \ge |II| - |I| \ge |x(\tau_n)| M(\varphi) - \rho M(\varphi) - \frac{3\delta M(\varphi)}{10(1+\delta)} R_n. \tag{2.7.19}$$

Usando quanto fatto finora si ha

$$\begin{aligned} \frac{\delta M(\varphi)}{2(1+\delta)} \tau_n &\overset{(2.7.14)}{\ge} \int_0^{\tau_n} \left|z'_{R_n}(t)\right| dt \ge \left|z_{R_n}(\tau_n)\right| - \left|z_{R_n}(0)\right| \\ &\overset{(2.7.19+2.7.15)}{\ge} |x(\tau_n)| M(\varphi) - 2\rho M(\varphi) - \frac{\delta M(\varphi)}{2(1+\delta)} R_n. \end{aligned}$$

Infine servendoci di (2.7.12) otteniamo

$$\frac{|x(\tau_n)|}{\tau_n} \le \frac{\delta}{2+\delta} + \frac{\rho}{\tau_n} \frac{4+5\delta}{2+\delta},$$

che passando al limite per $\tau_n \to \infty$ è in contrasto con (2.7.8), e dunque un assurdo.

Siamo pronti per trarre le conclusioni. Siccome $\varphi \ne 0$ si ha $E(\varphi) > 0$ per il Lemma 2.3.1. Fissiamo una funzione $\chi \in \mathbb{C}^\infty([0,\infty))$ tale che

$$\begin{cases} r^2 & 0 \le r \le 1 \\ 0 & r \ge 2. \end{cases}.$$

Dato $R \ge 1$ sia

$$\chi_R(r) = R^2 \chi\left(\frac{r}{R}\right),$$

si verifica facilmente

$$0 = \frac{\chi'_R(r)}{r} - 2 = \chi''(r) - \frac{\chi'_R(r)}{r} = 2N - \Delta\chi_R(|x|) = \Delta^2 \chi_R(|x|)$$

per ogni $r \le R$ e che

$$\frac{1}{R}\left\|\chi_R'\right\|_{L^\infty} + \left\|\frac{\chi_R'}{r}\right\|_{L^\infty} + \left\|\chi_R''\right\|_\infty + \left\|\Delta\chi_R(|\cdot|)\right\|_{L^\infty} + R^2\left\|\Delta^2\chi_R(|\cdot|)\right\|_{L^\infty} \le C$$

con C una costante indipendente da R. Definiamo la funzione

$$Z_R(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_R(|x|)\,|u(t,x)|^2\,dx.$$

Grazie al Lemma 2.7.2 sappiamo che $Z_R(t) \in C^2[0,\infty)$ e che

$$\left|Z_R'(t)\right| \le C\,\|u(t)\|_{L^2}\,\|\nabla u(t)\|_{L^2} \le AR, \tag{2.7.20}$$

dove la costante $A > 0$ è indipendente da $R > 0$ e $t \ge 0$. Inoltre, tenendo conto del fatto che le funzioni integrate al secondo membro della seconda equazione del Lemma 2.7.2 si annullano per $r \le R$, abbiamo l'uguaglianza

$$Z_R''(t) = 8\,\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{4N\alpha}{\alpha+2}\,\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} + H_R(u(t)), \tag{2.7.21}$$

dove

$$|H_R(u(t))| \le B\int_{\{|x|>R\}} \left\{|\nabla u(t)|^2 + |u(t)|^{\alpha+2} + |u(t)|^2\right\}, \tag{2.7.22}$$

con $B > 0$ indipendente da $R > 0$ e $t \ge 0$. Posto

$$\eta = 8\left[1 - \left(\frac{E(\varphi)M(\varphi)^\sigma}{E(Q)M(Q)^\sigma}\right)^{\frac{N\alpha-4}{4}}\right] > 0,$$

deduciamo dal Lemma 2.3.1 che

$$8\,\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{4N\alpha}{\alpha+2}\,\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \ge \eta\,\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \ge 2\eta E(u(t)) = 2\eta E(\varphi). \tag{2.7.23}$$

Dal momento che $E(\varphi) > 0$ per (2.7.1) esiste $\rho \ge 1$ tale che

$$\int_{\{|x+x(t)|\ge\rho\}} \left\{|\nabla u(t)|^2 + |u(t)|^{\alpha+2} + |u(t)|^2\right\} \le \frac{\eta E(\varphi)}{B}, \tag{2.7.24}$$

per ogni $t \ge 0$, dove B è la costante di (2.7.22). Dal fatto che $x(t) = o(t)$ ricaviamo che esiste $t_0 > 0$ tale che

$$|x(t)| \le \frac{\eta E(\varphi)}{4A}\,t, \tag{2.7.25}$$

per ogni $t \ge t_0$. Preso $\tau > t_0$ poniamo

$$R_\tau = \rho + \frac{\eta E(\varphi)}{4A}\tau. \tag{2.7.26}$$

Ma allora si ha $\{|x| \ge R_\tau\} \subset \left\{|x + x(t)| \ge \rho\right\}$ per $t \in [t_0,\tau]$ e quindi usando (2.7.22) e (2.7.24) otteniamo che

$$\left|H_{R_\tau}\right| \le \eta E(\varphi), \tag{2.7.27}$$

per ogni $t \in [t_0, \tau]$. Infine mettendo insieme (2.7.21), (2.7.23) e (2.7.27) ci assicuriamo che per ogni $t \in [t_0, \tau]$ vale

$$Z''_{R_\tau}(t) \geq \eta E(\varphi).$$

Integrando quest'ultima equazione tra t_0 e τ ed usando (2.7.20) e (2.7.26) abbiamo

$$\begin{aligned}\eta E(\varphi)(\tau - t_0) &\leq \int_{t_0}^{\tau} Z_{R_\tau}(t)\,dt \leq \left| Z'_{R_\tau}(\tau) - Z'_{R_\tau}(t_0) \right| \\ &\leq 2AR_\tau = 2A\left(\rho + \frac{\eta E(\varphi)}{4A}\tau\right).\end{aligned}$$

A questo punto abbiamo finito, perché dividendo tutto per $\tau - t_0$ e passando al limite per $\tau \to \infty$ si ottiene $E(\varphi) \leq E(\varphi)/2$ che è assurdo in quanto avevamo supposto $E(\varphi) > 0$. Pertanto necessariamente $\varphi = 0$.

□

Appendice A

Appendice.

Lemma A.0.3. *Sia* $1 \leq \beta < \gamma \leq \infty$, $0 < T \leq \infty$ *ed* $f \in L^{\rho}(0,T)$, *dove* $1 \leq \rho < \infty$ *è definito da* $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}$. *Se* $\nu \geq 0$ *e* $\varphi \in L^{\gamma}_{loc}([0,T))$ *soddisfa*

$$\|\varphi\|_{L^{\gamma}(0,t)} \leq \nu + \|f\varphi\|_{L^{\beta}(0,t)}, \tag{A.0.1}$$

per ogni $0 < t < T$, *allora*

$$\|\varphi\|_{L^{\gamma}(0,t)} \leq \nu\Phi\left(\|f\|_{L^{\rho}}\right) \tag{A.0.2}$$

per ogni $0 < t \leq T$, *dove* $\Phi(s) = 2\Gamma(3+2s)$ *e* Γ *è la funzione Gamma di Eulero.*

Dimostrazione. Siccome $f \in L^{\rho}(0,T)$, allora esiste $l \leq 2\|f\|_{L^{\rho}(0,T)}$ ed una successione crescente $(\tau_k)_{0\leq k\leq l}$ tale che $\tau_0 = 0$ e $\tau_l = T$ e

$$\|f\|_{L^{\rho}(\tau_{k-1},\tau_k)} = \frac{1}{2} \text{ se } l \geq 2 \text{ e } 1 \leq k \leq l-1, \qquad \|f\|_{L^{\rho}(\tau_{l-1},\tau_l)} \leq \frac{1}{2}. \tag{A.0.3}$$

Poniamo $a_0 = 0$ e $a_k = \|\varphi\|_{L^{\gamma}(0,\tau_k)}$ per $1 \leq k \leq l$. Segue da (A.0.1), dalla disuguaglianza di Hölder e da (A.0.3) che pr ogni $k \leq l-1$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq \nu + \|f\varphi\|_{L^{\beta}(0,\tau_k)} + \|f\varphi\|_{L^{\beta}(\tau_k,\tau_{k+1})} \\
&\leq \nu + \|f\|_{L^{\rho}(0,\tau_k)} \|\varphi\|_{L^{\gamma}(0,\tau_k)} + \|f\|_{L^{\rho}(\tau_k,\tau_{k+1})} \|\varphi\|_{L^{\gamma}(\tau_k,\tau_{k+1})} \\
&\leq \nu + \frac{k}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{k+1}.
\end{aligned}$$

Quindi $a_{k+1} \leq 2\nu + ka_k$, e dunque $a_k \leq (k+1)!$. Sia $0 < t < T$ e $1 \leq k \leq l$ tale che $\tau_{k-1} \leq t < \tau_k$. Segue che

$$\|\varphi\|_{L^{\gamma}(0,t)} \leq a_k \leq 2\nu(k+1)!. \tag{A.0.4}$$

D'altra parte deduciamo da (A.0.3) che

$$\|f\|_{L^{\rho}(0,t)} \geq \|f\|_{L^{\rho}(0,\tau_k)} \geq \frac{k}{2} - \frac{1}{2},$$

quindi $(k+1)! = \Gamma(k+2) \leq \Gamma\left(3 + 2\|f\|_{L^{\rho}(0,t)}\right)$. Grazie a (A.0.4) concludiamo. □

Proposizione A.0.4. *Dato $A \geq 0$ esistono $\varepsilon(A) > 0$ e $C(A) > 0$ con le proprietà seguenti. Se $u \in C([0,\infty), H^1)$ è una soluzione di (NLS$_f$), se $\widetilde{u} \in C((0,\infty), H^1)$ ed $e \in L^1_{loc}([0,\infty), H^{-1})$ soddisfano*

$$i\,\widetilde{u}_t + \Delta\widetilde{u} + \widetilde{u}\,|\widetilde{u}|^{p-1} = e,$$

per quasi ogni $t > 0$ e se

$$\|\widetilde{u}\|_{L^a([0,\infty),L^r)} \leq A, \qquad \|e\|_{L^{b'}([0,\infty),L^{r'})} \leq \varepsilon \leq \varepsilon(A), \tag{A.0.5}$$

$$\left\| e^{i\Delta}(u(0) - \widetilde{u}(0)) \right\|_{L^a([0,\infty),L^r)} \leq \varepsilon \leq \varepsilon(A), \tag{A.0.6}$$

allora $u \in L^a((0,\infty), L^r)$ e $\|u - \widetilde{u}\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \leq C\varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $w = u - \widetilde{u}$, allora

$$i\,w_t + \Delta w + |\widetilde{u} + w|^\alpha\,(\widetilde{u} + w) - |\widetilde{u}|^\alpha\,\widetilde{u} + e = 0. \tag{A.0.7}$$

Siccome

$$\left| |\widetilde{u} + w|^\alpha\,(\widetilde{u} + w) - |\widetilde{u}|^\alpha\,\widetilde{u} \right| \leq C(|\widetilde{u}|^\alpha + |w|^\alpha)\,|w| = C(|\widetilde{u}|^\alpha\,|w| + |w|^{\alpha+1}), \tag{A.0.8}$$

deduciamo da (A.0.7), (1.5.2) e dalle ipotesi (A.0.5) che esiste $M > 0$ tale che

$$\|w\|_{L^a((0,t),L^r)} \leq \varepsilon + M \left\| |\widetilde{u}|^\alpha\,|w| + |w|^{\alpha+1} \right\|_{L^{b'}((0,t),L^{r'})} + M\varepsilon \tag{A.0.9}$$

per ogni $t > 0$. Dal momento che $\left\| |\widetilde{u}|^\alpha\,|w| \right\|_{L^{r'}} \leq \|\widetilde{u}(t)\|^\alpha_{L^r}\,\|w(t)\|_{L^r}$ ricaviamo da (A.0.9) che

$$\left\|\varphi\right\|_{L^a(0,t)} \leq (M+1)\varepsilon + M\left\|\varphi\right\|^{\alpha+1}_{L^a(0,t)} + M\left\|f\varphi\right\|_{L^{b'}(0,t)}, \tag{A.0.10}$$

dove abbiamo posto

$$\varphi(t) = \|w(t)\|_{L^r}, \qquad f(t) = \|\widetilde{u}(t)\|^\alpha_{L^r}.$$

Sia

$$\varepsilon(A) \leq 2^{-\frac{1}{p-1}}\left[(2M+1)\Phi(A^\alpha)\right]^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}}, \tag{A.0.11}$$

dove Φ è data dal Lemma A.0.1. Osserviamo che

$$\left\|f\right\|_{L^{\frac{(\alpha+1)b'}{\alpha}}(0,\infty)} = \left\|f\right\|_{L^{\frac{a}{\alpha}}(0,\infty)} = \|\widetilde{u}\|^\alpha_{L^a((0,\infty),L^r)} \leq A^\alpha. \tag{A.0.12}$$

Dato un qualsiasi $0 < T \leq \infty$ tale che $\left\|\varphi\right\|^{\alpha+1}_{L^a(0,T)} \leq \varepsilon \leq \varepsilon(A)$, deduciamo da (A.0.10), (A.0.12) e dal Lemma A.0.1 che $\left\|\varphi\right\|_{L^a(0,T)} \leq (2M+1)\varepsilon\Phi(A^\alpha)$. Applicando (A.0.11) concludiamo che $\left\|\varphi\right\|^{\alpha+1}_{L^a(0,T)} < \varepsilon^{\alpha+1}\varepsilon(A)^{-\alpha}/2 \leq \varepsilon/2$. Quindi possiamo passare al limite per $T \to \infty$ e troviamo $\left\|\varphi\right\|_{L^a(0,\infty)} \leq (2M+1)\Phi(A^\alpha)\varepsilon$. Questa è la stima cercata con $C(A) = (2M+1)\Phi(A^\alpha)$. □

Lemma A.0.5. *Per ogni $u \in L^\gamma((0,\infty), L^\gamma) \cap L^\infty((0,\infty), H^1)$ si ha*

$$\|u\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \leq C\,\|u\|^{\frac{\gamma}{a}}_{L^\gamma((0,\infty),L^\gamma)}\,\|u\|^{\frac{a-\gamma}{\gamma}}_{L^\infty((0,\infty),H^1)}. \tag{A.0.13}$$

Dimostrazione. Usiamo prima la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg $\|u\|_{L^r} \le C \|\nabla u\|_{L^2}^{\nu} \|u\|_{L^\gamma}^{1-\nu}$ con $\nu = 1 - \gamma/a$ e poi l'immersione di Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^\gamma(\mathbb{R}^N)$:

$$\|u\|_{L^a((0,\infty),L^r)} \le C \left\| \|\nabla u\|_{L^2}^{\nu} \|u\|_{L^\gamma}^{1-\nu} \right\|_{L^a} = \left(\int_0^\infty \|\nabla u\|_{L^2}^{a-\gamma} \|u\|_{L^\gamma}^{\gamma} \, dt \right)^{\frac{1}{a}}$$
$$\le \|u\|_{L^\infty((0,\infty),H^1)}^{\frac{a-\gamma}{\gamma}} \|u\|_{L^\gamma((0,\infty),L^\gamma)}^{\frac{\gamma}{a}}.$$

□

Lemma A.0.6. *Per ogni $P > 1$ e $l \ge 2$ esiste una costante $C_{P,l}$ tale che*

$$\left| \left| \sum_{j=1}^{l} z_j \right|^P - \sum_{j=1}^{l} \left| z_j \right|^P \right| \le C_{P,l} \sum_{j \ne k} \left| z_j \right| |z_k|^{P-1}, \tag{A.0.14}$$

per ogni $(z_j)_{1 \le j \le l} \in \mathbb{C}^l$.

Dimostrazione. Quello che vogliamo fare è provare che questa frazione

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^{l} z_j \right|^P - \sum_{j=1}^{l} \left| z_j \right|^P}{\sum_{i \ne j} |z_i| \left| z_j \right|^{P-1}}$$

è limitata su $\mathbb{C}^l$. Per omogeneità basta dimostrare che è limitata sulla palla unitaria $\mathbf{S}^{l-1}$. Osserviamo che questa è una funzione continua al di fuori dei punti in cui $z_i = \pm 1$. Allora consideriamo intorno ad ognuno di questi punti l'intersezione della sfera $\mathbf{S}^{l-1}$ con una palla aperta di $\mathbb{C}^l$ di raggio abbastanza piccolo in modo tale che questi insiemi non si intersechino tra di loro. Siano A_i gli insiemi così ottenuti. Essendo questi un numero finito di aperti abbiamo che $\mathbf{S}^{l-1} \setminus \{\cup A_i\}$ è un compatto e la frazione è una funzione continua su di esso, pertanto ammette massimo e minimo. Per provare il teorema basta dimostrare dunque che la frazione è limitata in un intorno dei punti singolari. Per simmetria facciamo vedere che è limitata in un intorno di z_1. Assumiamo dunque $|z_1| = 1 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ molto piccolo. Stimiamo il denominatore.

$$\sum_{j \ne k} \left| z_j \right| |z_k|^{P-1} \ge \sum_{j=2}^{l} |z_1| \left| z_j \right|^{P-1} = (1 - \varepsilon) \sum_{j=2}^{l} \left| z_j \right|^{p-1}.$$

D'altra parte

$$\left| \sum_{j=1}^{l} z_j \right|^P \le \left(|z_1| + \left| \sum_{j=2}^{l} z_j \right| \right)^P = \sum_{k=0}^{P} \binom{P}{k} |z_1|^{P-k} \left| \sum_{j=2}^{l} z_j \right|^k$$
$$= |z_1|^P + \sum_{k=1}^{P} \binom{P}{k} |z_1|^{P-k} \left| \sum_{j=2}^{l} z_j \right|^k \le |z_1|^P + \sum_{k=1}^{P} \binom{P}{k} \left| \sum_{j=2}^{l} z_j \right|^k$$
$$\le |z_1|^P + C_P \left| \sum_{j=2}^{l} z_j \right|,$$

dunque il numeratore si stima con

$$\left|\sum_{j=1}^{l} z_j\right|^P - \sum_{j=1}^{l} \left|z_j\right|^P \le |z_1|^P + C_p \left|\sum_{j=2}^{l} z_j\right| - \sum_{j=1}^{l} \left|z_j\right|^P$$
$$\le C_p \left|\sum_{j=2}^{l} z_j\right|.$$

E dunque il rapporto resta limitato. □

Con una dimostrazione analoga si ottiene anche:

Lemma A.0.7. *Per ogni $l \ge 2$ esiste una costante $C_l > 0$ tale che per ogni $\left(z_j\right)_{1\le j\le l} \in \mathbb{C}^l$*

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{l} z_j\right|^{\alpha} \sum_{j=1}^{l} z_j - \sum_{j=1}^{l} \left|z_j\right|^{\alpha} z_j\right| \le C_l \sum_{1\le j\ne k\le l} \left|z_j\right|^{\alpha} |z_k|. \tag{A.0.15}$$

Bibliografia

[1] Fang D.Y., Xie J., Cazenave T. *Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation* Sci. China Math, 2011.

[2] Weinstein M. *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Commun. Math., 1982.

[3] Strauss W. A. *Existence of solitary wawes in higher dimensions*, Commun. Math. Phys., 1977.

[4] Berestycki H., Lions P. *Nonlinear scalar field equations, Existence of a ground state*, Arch. Ration. Mech. Anal., 1983.

[5] Gidas B., Ni W. M., Nirenberg L. *Symmetry of a positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Advances in Math. Suppl. Studies, 1981.

[6] Kwong M. K. *Uniqueness of positive solutions of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Ration. Mech. Anal., 1989.

[7] Holmer J., Roudenko S. *On blow-up solutions to* $3D$ *cubic nonlinear Schrödinger equation*, Appl. Math. Res. Express, 2007.

[8] Genibre J., Velo G. *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl., 1985.

[9] Cazenave T. *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, 2003.

[10] Kato T. *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, 1987.

[11] Strauss W. A. *Nonlinear scattering theory at low energy: sequel*, J. Funct. Anal., 1981.

[12] Cazenave T., Weissler F. B. *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys., 1992.