



Una experiencia de formación continua con educadores matemáticos en Costa Rica

Andrea Araya Chacón
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
andrea.arayachacon@ucr.ac.cr

Resumen

Este artículo tiene como objetivo exponer el proceso de concepción y ejecución de un proyecto de formación continua para educadores matemáticos en Costa Rica. Así, en el texto se especifican los constructos teóricos de la Didáctica de la Matemática que han sido útiles para orientar los diseños de lección y los análisis de la implementación de dichos diseños. También se precisan los cambios metodológicos que se han realizado, explicando las limitaciones encontradas durante el proceso.

Palabras clave: formación continua, formación permanente, experiencia de formación, educadores matemáticos, educación matemática.

¹La Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, a través del proyecto Juan Félix Martínez, ofrecía desde 1998 un programa de formación continua para profesores de matemáticas ejerciendo en Secundaria. Inscrito como proyecto de Acción Social, se les proporcionó a los docentes participantes, principalmente herramientas sobre conocimiento matemático al asistir a cursos de pre-cálculo y cálculo, con el objetivo de mejorar su formación para reflexionar sobre su labor en el aula.

¹ Los primeros cinco párrafos de esta sección son tomados de los “antecedentes” del proyecto escrito presentado por la proponte para su inscripción en Vicerrectoría de Acción Social de la Universidad de Costa Rica a finales del año 2011.

Desde el año 2007, el proyecto Juan Félix Martínez fue absorbido por el proyecto MATEM (Matemática en la Enseñanza Media²), quedando inscrito como un objetivo de un proyecto de Acción Social más global. El proyecto MATEM ofrece cursos de Matemática Elemental y Cálculo como opciones para contribuir en la formación matemática de los profesores que laboran en la educación Secundaria (y prioritariamente, cuyos estudiantes participan en MATEM), teniendo como premisa que una mejor preparación matemática de los docentes permitiría que los estudiantes obtengan una educación de mayor calidad, mejorando a su vez el rendimiento académico.

A partir del año 2010 y hasta la fecha, se ha trabajado con este grupo de docentes y otros, bajo otra perspectiva, la concepción de lecciones de matemáticas, que posteriormente son experimentadas y evaluadas. En este sentido, la experiencia de formación continua (proyecto ED-2927 IREM-SJ-UCR) que se comparte en este artículo, está orientada a ofrecer a educadores de matemáticas un espacio de formación e investigación vinculado con las problemáticas profesionales del docente y la aplicación de herramientas didácticas en el diseño y análisis de lecciones.

Esta orientación es más próxima a la labor que llevan a cabo desde 1969 en Francia los Institutos de Investigaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM: *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), en donde la proponente de este artículo participó durante el año 2004. Según Douady (1998), estos institutos tienen como objetivo hacer avanzar la investigación en didáctica de la matemática, tomar parte en la formación inicial y continua de los profesores de matemática, así como desarrollar documentos y divulgarlos para el uso de docentes y sus formadores.

Actualmente, los IREM funcionan en una red que asocia profesores de primaria, secundaria y de educación superior. Centran sus investigaciones sobre las perspectivas y problemáticas específicas que aparecen en cualquier nivel de enseñanza de las matemáticas; contribuyen a la formación de profesores a través de acciones que se apoyan fuertemente en investigaciones fundamentales o aplicadas; y tienen una visión de producción y difusión de material de apoyo educativo, lo que les lleva a producir, escribir o editar artículos, brochures, libros de texto, revistas, programas, documentos multi-media, etc. (Portail des IREM, s.f.); así como a organizar encuentros y congresos.

Ahora bien, las condiciones ofrecidas a los participantes de los IREM en Francia (por ejemplo, el Ministerio de Educación asigna carga para participar en la formación e investigaciones que se realizan en estos institutos, el docente IREM tiene flexibilidad de horario en el centro educativo en donde labora para poder asistir a las sesiones de trabajo durante todo un día a la semana, en general los docentes tienen alrededor de 15 horas lectivas a la semana, están vinculados con universidades que cuentan con varios especialistas en Didáctica de la Matemática que también participan en las investigaciones, entre otras) no son las mismas posibilidades de los educadores matemáticos en Costa Rica; por lo que el reto del proyecto consiste en acondicionar un espacio que ofrezca a los docentes de matemáticas reflexión, formación e investigación sobre las experiencias de diseño, implementación y análisis de lecciones, desde sus propias

² Con este proyecto se ofrece a los estudiantes de décimo (16 años) y undécimo año (17 años) la posibilidad de aprobar los primeros cursos de matemática que se imparten en la Escuela de Matemática de la UCR para carreras relacionadas con administración e ingeniería.

condiciones de trabajo (atención a clases de 30 a 40 estudiantes, carga académica de al menos 28 horas lectivas a la semana, sin asignación de carga para la formación continua, por ejemplo).

El reto descrito en el párrafo anterior se asumió al inscribir a finales del año 2011 el proyecto IREM-SJ-UCR: Investigación y formación continua en enseñanza de la matemática, con el siguiente objetivo general: “avanzar de manera conjunta y cooperativa, profesores de educación secundaria y universitaria, en su formación continua para el diseño, implementación y análisis de lecciones de las matemáticas”; y los siguientes objetivos específicos:

1. Actualizar la formación de los docentes de Secundaria en herramientas teóricas y prácticas de la Didáctica de la Matemática para la descripción y el análisis de la labor docente.
2. Diseñar e implementar lecciones de matemáticas orientadas por herramientas didácticas y otras propuestas sobre el tema.
3. Analizar la implementación de los diseños elaborados y retroalimentarlos para futuras aplicaciones.
4. Difundir los trabajos elaborados en el IREM-SJ-UCR como material de apoyo a docentes en ejercicio.

En este artículo se sintetizan los principales resultados y conclusiones entorno a la puesta en práctica de este proyecto de formación continua. En una primera sección se describe el inicio de la experiencia con un grupo de 16 profesores de Secundaria: herramientas teóricas y aspectos metodológicos que orientaron el trabajo, así como las limitaciones encontradas para alcanzar los objetivos previstos. En la segunda sección, se describen los cambios metodológicos y teóricos que tuvieron lugar para reestructurar la dinámica del proyecto. Seguido, se describen otras herramientas de análisis de las implementaciones de los diseños que se han incorporado.

Inicios de una experiencia de formación continua ...

En el año 2010, como lo indicamos anteriormente, iniciamos un proyecto piloto de formación continua, con una dinámica de trabajo inspirada en la experiencia de la proponente en el IREM de Toulouse. En ese momento, la formación se estructuró para todo el año lectivo, orientada por las cuatro fases que expone Artigue (1998) de la metodología de la ingeniería didáctica: (1) análisis preliminar, (2) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, (3) experimentación y (4) análisis a posteriori y evaluación; para temas de la unidad de Funciones, según el Plan de Estudios del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005). Durante el primer semestre (de marzo a junio) se abordaría de la primera fase el “análisis epistemológico como parte de los contenidos contemplados en la enseñanza”; mientras que en el segundo ciclo (de agosto a noviembre), las siguientes tres fases.

Con esta disposición, la dinámica de trabajo convocaba a los docentes participantes a sesiones presenciales de dos horas semanales, durante las cuales las responsables de la experiencia iniciaron retomando los fundamentos matemáticos de las funciones como contenido escolar. Ahora bien, dado los vacíos matemáticos que los participantes evidenciaban a partir de sus preguntas o comentarios, y las constantes intervenciones de los profesores que precisaban sus experiencias didácticas en torno al tema (dificultades que presentan los estudiantes, estrategias de mediación utilizadas, conveniencia de ciertos ejercicios sobre otros, desempeño de los estudiantes en la prueba nacional de Bachillerato, etc.), se consideró pertinente dedicar ese primer semestre a retomar la fundamentación matemática y vincularla con la transposición

didáctica que los docentes realizaban en cuanto al “saber enseñado”. Esto implicó una reestructuración en el planteamiento original.

Ahora bien, es cierto que durante el ciclo los profesores manifestaron lo provechoso de la actividad; sin embargo, la mayoría priorizaba avanzar en los temas didáctico-matemáticos, en particular, la puesta en práctica de herramientas didácticas que les fueran “de utilidad en el aula”. Por esta razón, para el segundo ciclo lectivo se inició la experiencia exponiendo una descripción de la noción de *Actividades de Estudio e Investigación* (AEI) propuesta por Y. Chevallard, las cuales, siguiendo a Rodríguez (2005),

se caracterizan porque parten de una cuestión generatriz que permite hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo (Chevallard, 1999). Así, esta cuestión generatriz se convierte en la razón de ser de las praxeologías que son construidas en su proceso de estudio.

Para comprender mejor lo anterior, se describieron y comentaron las nociones de (OM) *organización matemática* (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997; Chevallard, 1999; entendida en la TAD como un modelo general de una actividad humana formado por un bloque práctico: los tipos de tarea y las técnicas para resolverlas; y un bloque logos: la tecnología que explica y justifica la técnica, y la teoría que justifica y explica la tecnología), *institución* (Chevallard, 2003; entendida como un dispositivo que permite – e impone – a sus sujetos ciertas maneras de hacer y de pensar) y la *visión monumentalista* de las matemáticas escolares, en la que se afirma que los conocimientos escolares son “mostrados” a los alumnos como si se tratara de exhibiciones o exposiciones de arte. De hecho, la noción de AEI, surge para mitigar los efectos del *monumentalismo*, priorizando la búsqueda de las *razones de ser* de las OM; es decir, (re)construyendo las cuestiones matemáticas a las que los conocimientos matemáticos responden.

En el marco anterior, durante el segundo ciclo del año 2010, los 16 profesores que integraban el equipo conformaron tres grupos, asumiendo cada uno “el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos” (fase 1 de una ingeniería didáctica), así como la concepción y aplicación de una situación didáctica de un tema en la unidad de Funciones. Para diseñar la situación, se debían revisar referencias sobre didáctica de Funciones como Azcárate y Deulofeu (1999), de donde se tomaron o adaptaron ejercicios de interpretación de gráficas que los docentes clasificaron como “novedosos” e “interesantes” (ver Figura 1),

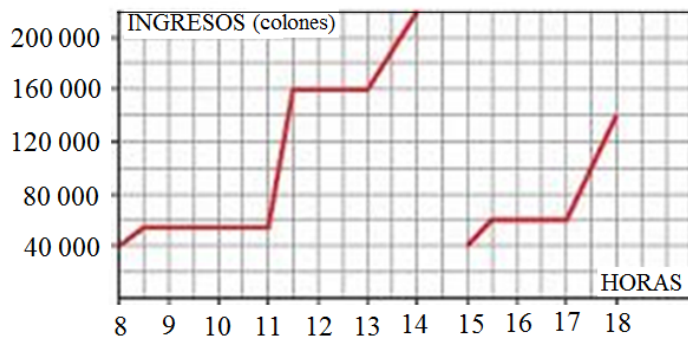
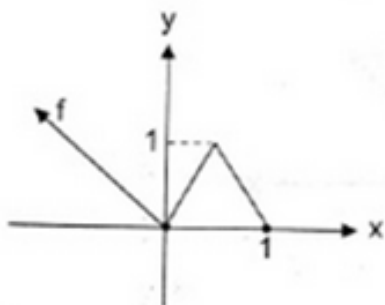


Figura 1. Material adaptado por los docentes para tareas de interpretación de gráficas.

La gráfica adjunta representa la cantidad de dinero que hay en la caja chica de la soda de un colegio a lo largo del día. a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana? b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura? c) El puesto se cierra a las 2pm y el dueño se lleva el dinero, ¿cuáles fueron los ingresos de antes de esa hora? D) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

y que distan del análisis de gráficas “típico” en las pruebas nacionales de bachillerato (ver Figura 2), en libros de texto comúnmente utilizados, o en general, en las aulas costarricenses con estudiantes de décimo año.



Considere la siguiente gráfica de la función f . De acuerdo con los datos de la gráfica, considere las siguientes proposiciones: I. El ámbito de f es $[0, +\infty[$, II. El dominio de f es $]-\infty, 1[$. De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Figura 2. Ejercicio típico de interpretación de gráfica (tomado de prueba nacional mayo 2012)

La modalidad independiente con la que trabajaba cada grupo (por ejemplo, definiendo ellos mismos los criterios para realizar análisis y los periodos de trabajo en cada aspecto), no favoreció para optimizar el tiempo durante el semestre, por lo que no se realizaron las aplicaciones de los diseños, ni tampoco todos los grupos alcanzaron las metas propuestas en cuanto a la concepción del mismo. Esto implicó indagar sobre otras metodologías de trabajo para reestructurar el avance y los objetivos a alcanzar por grupo.

Modificaciones metodológicas al proyecto piloto de formación continua

Analizar las descripciones sobre la *Japanese Lesson Study* como base para el desarrollo continuo de docentes, su metodología de trabajo y las varias experiencias publicadas al respecto (Lesson Study Research Group, 2000; Marsigit, 2007; Burghes y Robinson, 2009; Natural Science Foundation, s.f.), fueron determinantes para las decisiones metodológicas que se tomaron para el segundo año de implementación de la experiencia de formación continua que aquí exponemos.

En términos generales, la *lesson study* es un proceso en el cual un grupo de docentes de matemáticas trabajan en conjunto la construcción de lecciones (ver Figura 3):

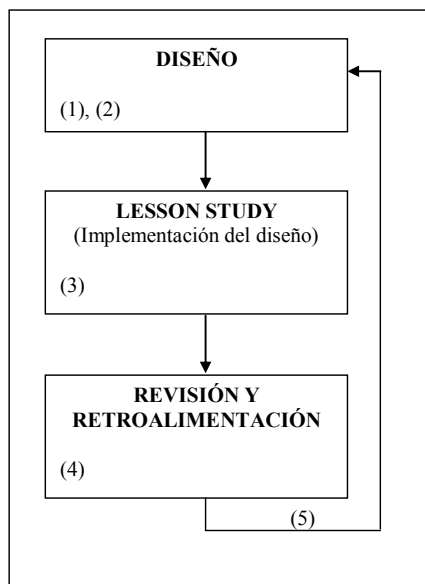


Figura 3. Esquema de la dinámica de trabajo, *lesson study*, para el proyecto piloto

(1) escogen un tema, identifican las metas de su enseñanza, (2) realizan varias propuestas de lecciones que pueden llevarlos a alcanzar el objetivo y escogen la más adecuada, la planean, (3) un profesor del grupo la aplica y los demás observan y toman nota, (4) los docentes se reúnen para analizar y revisar la lección, corregirla y (5) continuar el ciclo (Burghes y Robinson, 2009).

Según los autores la Lesson Study está basada en tres principios básicos:

- es más efectivo aprender y mejorar observando a otros,
- los docentes que tienen conocimientos profundos en pedagogía y les resulta más sencillo realizar este tipo de lección, pueden compartir sus conocimientos,
- cultivar en los estudiantes interés por la materia y hacerlos tomar un rol activo en su proceso de aprendizaje.

Al iniciar el año 2011, durante la primera sesión se analizaron las evaluaciones que los profesores hicieron de la experiencia del año anterior. Se expusieron las razones por las cuales era necesario cambiar la metodología y por qué se asumía la *lesson study* como una opción conveniente. También se presentó y amplió el esquema de la lección de estudio, resaltándolo como la dinámica de trabajo del proyecto.

Se acordó que lo realizado por cada grupo se documentaría en un “Registro de Avances”, una guía que se elaboró inspirada en el material proporcionado por el *Lesson Study Research Group* (2000). En éstas se solicitaba:

- Meta, unidad, temática de la lección, semana estimada de aplicación del diseño
- Jerarquía de conocimientos y procedimientos: listado y conexiones entre previos, los esperados a desarrollar con el diseño, y los posteriores (con los que se vinculan los propiciados con el diseño); cada uno debe ubicarse por ciclo lectivo según el curriculum nacional.

- Plan instruccional de la Unidad: distribución del número de lecciones que se dedicarán al estudio de cada temática de la unidad. Debe resaltarse la temática sobre la cual trata el diseño.
- Proceso de aprendizaje. Descripción del diseño expuesto en una tabla en donde cada columna corresponde a: el tiempo estimado para cada episodio de la lección, las actividades de los estudiantes, los aspectos a recordar o apoyos para el docente y las preguntas de evaluación.

Al inicio del semestre también se acordó un cronograma en donde se indicaba lo que se esperaba del progreso de todos los grupos cada semana, en términos del Registro de Avances. Los análisis de las aplicaciones se realizaban oralmente, a partir de las preguntas de evaluación que se habían construido. Únicamente se registraron por escrito los cambios a efectuar en el diseño. Durante el primer ciclo del año 2011, se aplicó un diseño en décimo año para la clasificación de las funciones según su codominio (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva).

Al cierre de la primera mitad del año lectivo, se discutió sobre los diferentes niveles de profundidad que evidenciaban los análisis, según cada grupo; por lo que indagamos sobre otras herramientas teóricas que ofrece nuestra disciplina para el analizar procesos de enseñanza en Matemática. Al estudiar el *Enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática* (Godino, Batanero, Font; 2009) identificamos varias similitudes entre éste y nuestra primera orientación teórica, la TAD (Godino, Font, Contreras, y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Contreras, y Wilhelmi; 2007; D'Amore, Godino, 2007); por ejemplo, la noción de *institución* y la distinción que a partir de ésta se hacen de los *objetos personales e institucionales*. Además, identificamos pautas precisas que Godino (2011) llama “indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”, y que se conciben en el EOS como los componentes cuya articulación coherente y sistémica definen la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

Al inicio del segundo ciclo, la responsable del proyecto expuso los principales conceptos del EOS, ampliando sobre los criterios de idoneidad didáctica y sus características. Sobre esta temática, se confeccionó una ficha resumen que incluía el esquema en la Figura 4 y seis tablas que precisan los componentes y descriptores de cada criterio (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2011).

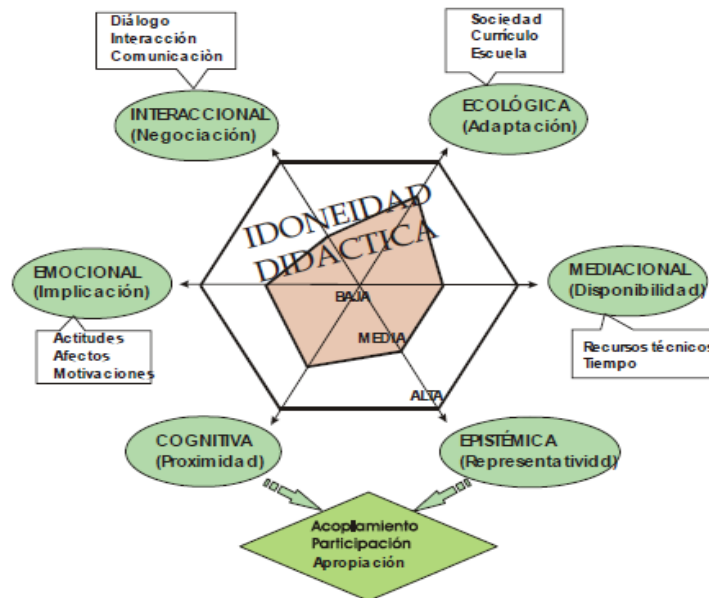


Figura 4. Componentes de la idoneidad didáctica (Tomado de Godino, Batanero y Font, 2009)

Estos criterios se consideraron durante el segundo ciclo del año 2011 al elaborar los diseños de lección. Durante ese año, en grupos de tres a cinco personas, se construyeron *lessons study* para las siguientes temáticas: áreas sombreadas (undécimo año, estudiantes de 17 años), inecuaciones de grado mayor que uno (décimo año), propiedades y simplificación de radicales (noveno año, estudiantes de 15 años).

Durante el periodo indicado se volvió a implementar, por la misma profesora en un colegio técnico profesional, el diseño sobre clasificación de funciones según su codominio, que se había elaborado el año anterior. Esta segunda aplicación y sus respectivos análisis fueron el insumo para elaborar y publicar un corto artículo en una revista local (Vargas, Venegas, Chacón y Araya, 2011).

Inscripción oficial del proyecto de formación continua

En las evaluaciones de la experiencia por parte de los docentes participantes, aplicadas a finales del año 2011, éstos indicaban su alto grado de satisfacción al “ver las metas alcanzadas” en cuanto al diseño, aplicación, análisis y difusión. Así mismo, se calificó positivamente la nueva dinámica de trabajo y la forma en que se incorporaron los constructos teóricos que orientaban los diseños. Por estas razones, se decidió inscribir oficialmente un proyecto de Extensión Docente de la Escuela de Matemática en la Universidad de Costa Rica, con una vigencia aproximada de dos años.

Para el año 2012, se revisaron otras herramientas teóricas que apoyarían la implementación y el análisis de los diseños, desarrolladas en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). Así, el proyecto inició analizando la exposición de Sadovsky (2005a) sobre *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática*. El objetivo del análisis era comprender los conceptos de *contrato didáctico*, *medio*, *devolución* y *adidacticidad*, para que los profesores los aplicaran en el análisis de sus prácticas docentes. Como material complementario se empleó una traducción libre del informe de observaciones de la situación didáctica “Puzzle” presentada en Brousseau y Brousseau (1987), y un video de una

clase de la Escuela Jules Michelet (material del COREM³) en donde se realizó una de las aplicaciones del “Puzzle”. Se elaboraron fichas resumen de los cuatro conceptos ya mencionados.

Dado que durante este año lectivo se aprobaría una reforma curricular del Plan de Estudios de Matemática en educación preuniversitaria en nuestro país (de primer grado al décimo primero, estudiantes de 7 a 17 años), se trianguló la información sobre procesos matemáticos en los Fundamentos de esta propuesta ministerial y los descriptores de los criterios de idoneidad, ampliando la ficha resumen que se tenía sobre el tema. En el Apéndice A se enlistan los elementos del “Registro de Avances” que actualmente se utiliza en el proyecto.

En el año 2012 se construyeron *lesson study* para las siguientes temáticas: cálculo mental (para segundo ciclo de la educación Primaria, estudiantes de 10 a 12 años), introducción al concepto de variable (octavo año, estudiantes de 14 años) e introducción al concepto de fracción algebraica (octavo año). Once profesores participantes del proyecto expusieron sus investigaciones (Alfaro, Ballet, Cerdas y Venegas, 2012; Araya, Castillo, Madrigal y Vargas, 2012; Chacon, Trejos, Vargas y Venegas, 2012) en el Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa organizado por el Centro de Investigación y Docencia en Educación de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA).

Para este año 2013, se iniciaron las sesiones de trabajo discutiendo sobre *La actividad matemática como “asunto” de la enseñanza* (Savosky, 2005b) y *El espacio social de la clase como una condición de posibilidad para la producción de conocimientos* (Savosky, 2005b). Esto con el objetivo de ampliar y mejorar los referentes conceptuales de los profesores participantes en el proyecto, para analizar sus prácticas docentes.

Este año en el proyecto han participado 18 profesores (3 maestras de Primaria, 11 docentes de Secundaria y 4 profesores de la UCR) distribuidos en tres grupos que abordan las siguientes temáticas: cálculo mental en Geometría, desarrollo del pensamiento algebraico en Primaria e introducción del concepto de logaritmo y sus propiedades. Está proyectada la participación de cuatro docentes en el *IV Encuentro de Enseñanza de la Matemática* organizado por la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica.

Conclusiones

En Costa Rica, los espacios de formación continua o permanente para educadores matemáticos no son abundantes. Lo son aún menos aquellos que no utilizan una modalidad magistral, y que consideran el contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza, adaptando los diseños de lección a condiciones propias de ciertas instituciones educativas. Iniciativas como la expuesta en este artículo, tienen la ambición de responder a factores de diversidad y de contextualización, tal y como lo expone Imbernón (2010) para potencializar una “formación (continua) desde dentro”; realizada de forma conjunta entre docentes universitarios y de educación básica.

³ Siglas en francés para “Centro para la Observación e Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática”.

Referencias y bibliografía

- Alfaro, H., Ballet, B., Cerdas, A. y Venegas, A. (2012). Iniciación al estudio del Álgebra escolar. En *Actas digitales del Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa*. Universidad Nacional, Heredia; 7 – 9 Noviembre 2012.
- Araya, A., Castillo, K., Madrigal, F. y Vargas, D. (2012). Introducción al cálculo mental en la escuela Primaria. En *Actas digitales del Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa*. Universidad Nacional, Heredia; 7 – 9 Noviembre 2012.
- Artigue, M. (1998). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33 – 59). Colombia: Una empresa docente.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1999). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Baba, T. (2007). How is lesson study implemented? En Isoda, M., Miyakawa, T., Stephens, M. y Ohara, Y. (Eds.) *Japanese Lesson Study in Mathematics. Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement* (pp. 2 – 7). US: World Scientific Publishing.
- Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Francia: IREM de Bordeaux.
- Burghes, D. y Robinson, D. (2009). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning*. Berkshire: CfBT Education Trust.
- Chacón, D., Trejos, A., Vargas, K. y Venegas, A. (2012). Áreas sombreadas en Secundaria. Una propuesta para su enseñanza. En *Actas digitales del Primer Seminario de Pedagogía e Investigación Educativa*. Universidad Nacional, Heredia; 7 – 9 Noviembre 2012.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221 – 266.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. En Maury, S. y Caillot, M., *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81 – 104). Paris: FABERT.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Enseñar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- D'Amore, B. y Godino, J-D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *RELIME*, 10(2), 191 – 218.
- Douady, R. (1998). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 1 – 5). Colombia: Una empresa docente.
- Godino, J-D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas digitales de XIII Conferencia interamericana de educación matemática*, Recife, Brazil, 26 – 30 Junio del 2011.
- Godino, J-D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*, 9(1), 117 – 150.
- Godino J-D., Bencomo, D., Font, V., Wilhelmi, M. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

- Godino, J-D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2007). Articulación de marcos teóricos en didáctica de las matemáticas. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, J. (Eds). *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctica (TAD)* (pp. 53 – 83). España: Universidad de Jaén.
- Godino, J-D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Imbernón, F. (2010). *La formación permanente del profesorado. Nuevas ideas para formar en el innovación y el cambio*. España: Graó.
- Le Portail des IREM (s.f.). Página oficial de los IREM en Francia. Recuperado de <http://www.univ-irem.fr/spip.php>
- Lesson Study Research Group (2000). *Lesson study work samples*. Recuperado de <http://www.tc.columbia.edu/lessonstudy/worksamples.html>
- Marsigit (2007). Mathematics teachers' professional development through lesson study in Indonesia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3(2), 141 – 144.
- MEP (2005). *Plan de Estudios de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica*. SJ: MEP.
- Natural Science Foundation (s.f.). *Lesson study communities project in Secondary Mathematics*. Recuperado de <http://www2.edc.org/lessonstudy/lessonstudy/>
- Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.
- Sadovsky, P. (2005a). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P., *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 12 – 68). Argentina: Zorzal.
- Sadovsky, P. (2005b). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Argentina: Libros del Zorzal.
- Vargas, K., Venegas, A., Chacón, D. y Araya, A. (2011). Clasificación de las funciones según su codominio. Propuesta didáctica. *Variables*, 12(3), 16 – 18.

Apéndice A

Elementos del “Registro de Avances” utilizado en el proyecto

1. Concepción de Matemática para los integrantes del grupo (*Dar elementos de respuesta a ¿qué es matemática y qué es hacer matemática? Incluir reflexión sobre la existencia de factores que obstaculicen la labor docente para que nuestros estudiantes evidencien en clase una concepción de Matemática próxima a la nuestra. Si existieran obstáculos, ¿cómo superarlos?*)
2. Unidad temática (*Para elegir la unidad y el tema, debe haber algún miembro del grupo que pueda hacer la aplicación en las primeras semanas del mes de _____*).
3. Propósito del área (*Según el Programa de Estudios. Incluir al menos una referencia más que el grupo investigue*).

4. Habilidades general (*Según el Programa de Estudios y otras que el grupo considere importantes*).
5. Conocimientos nuevos (*Según el Programa de Estudios*)
6. Habilidades específicas a desarrollar (*Según el Programa de Estudios y otras que el grupo considere importantes*).
7. Plan instruccional (*En una tabla se enlistan los conocimientos nuevos de la unidad y el número de lecciones de 40 minutos dedicadas a cada uno. Se señala con un asterisco al lado del número de lecciones, el bloque correspondiente al diseño*).
8. Semana estimada de aplicación del diseño (*Debe coordinarse el desplazamiento de la responsable del proyecto para videogravar la aplicación; así como los permisos para que otros miembros del grupo puedan asistir*).
9. Conexiones: Habilidades necesarias, habilidades a desarrollar y habilidades posteriores
10. Aportes de la literatura sobre aspectos de la Didáctica del tema elegido (*Propuestas metodológicas ya existentes, usos de representaciones, errores frecuentes o situaciones que conducen a errores, recursos, etc. Es probable que existan referencias que aporten sobre la enseñanza o aprendizaje en un área en específico (por ejemplo, el modelo de Van Hiele para aprender – enseñar Geometría). Es necesario considerarlas y adaptar sus aportes a la temática*).
11. Esbozos del diseño de lección (*En pocos párrafos y cuando ya se tenga una idea clara de la secuencia de actividades del diseño de la lección, debemos describir en qué consiste la lección*).
12. Indicadores de los procesos a fomentar (*Se deben elaborar indicadores de los procesos matemáticos que fomentará el diseño: enunciados que se refieran a ‘qué debo observar que el estudiante haga, diga, escriba, ...’ para afirmar que un cierto proceso se promovió. Por ejemplo, si “comunicar” es uno de los procesos a priorizar en el diseño, podríamos incluir indicadores como los siguientes: el profesor invita a los estudiantes a responder una pregunta planteada por otro estudiante o el docente pide a algún estudiante retomar las ideas principales para el cierre*).
13. Diseño de la lección
 - 13.1 Contexto de la aplicación (*Se debe indicar el nombre de la institución, y el profesor que aplicará, fecha, número de aula, hora, número de estudiantes, trabajo de la lección anterior y una descripción de los materiales necesarios para la implementación del diseño*).
 - 13.2 Actividades del diseño (*La lección se estructura en n episodios. Para cada uno de ellos se describe el comportamiento matemático que se espera de los alumnos y del docente, aspectos a recordar durante la implementación y el uso de materiales o recursos*).
14. Análisis según los indicadores de los procesos y las habilidades elegidas. Modificaciones al diseño. (*Es necesario primeramente releer los indicadores y las habilidades elegidas; así como los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica. Luego, observar en grupo el video de la implementación, por episodios. Cada integrante tomará nota del nivel de presencia de los indicadores (habilidades o descriptores). Se deben precisar pasajes – anotar minutos y segundos del video – en donde se interpreta que un indicador/habilidad se verifica o no. Al terminar de observar cada episodio, el grupo discute sobre lo anotado. Antes de pasar al siguiente episodio, deben escribirse las modificaciones a ampliaciones del diseño. Esta dinámica se repite para cada uno de los episodios*).