

## PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: O CASO DA MATRIZ HESSIANA DE UMA FUNÇÃO REAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Katia Vigo Ingar, Maria José Ferreira da Silva  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo  
kvingar21@gmail.com, zeze@pucsp.br

Brasil

**Resumo.** Esta é uma revisão bibliográfica a respeito do ensino da matriz Hessiana de funções em várias variáveis, e é parte desses resultados que apresentamos no presente artigo. A metodologia é a pesquisa bibliográfica e para a coleta de dados, selecionamos bibliotecas de pós-graduação e, anais de congressos de educação matemática. Fizemos a busca a partir dos descritores: “Cálculo em várias variáveis”, “funções de várias variáveis”, “máximos e mínimos em várias variáveis”. Não encontramos nenhum trabalho que tratasse de funções com mais de duas variáveis.

**Palavras chave:** cálculo à várias variáveis, a matriz Hessiana, revisão bibliográfica

**Abstract.** This is a bibliographic review about the teaching of the Hessian matrix of functions in several variables, and we present in this article part of these results. The methodology is a bibliographic research. Data was collected by selecting libraries of post-graduation and annals of mathematics education. The phrases used to search were: "Calculus in Several Variables", "Functions of Several Variables", "Maximum and Minimum in Several Variables", and search results did not produce any academic literature about functions of three or more variables.

**Key words:** calculus in several variables, the Hessian matrix, bibliographic review

### Introdução

Buscando a prática de engenheiros, economistas, físicos e matemáticos identificamos que grande parte dos problemas que enfrentam, no campo profissional envolve prioritariamente funções reais de várias variáveis: pressão atmosférica, distribuição de temperatura dentro de um corpo, a pressão dentro do fluido, o potencial eletrostático, densidades populacionais, grandezas econômicas, grandezas mecânicas. Esse fato talvez explique por que no segundo ano de cursos de Engenharia de algumas universidades de São Paulo, há em sua matriz curricular, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que envolve o estudo de funções reais de várias variáveis. A matéria procura analisar, de forma coesa e ordenada, a estrutura lógica dos tópicos que são desenvolvidos, ligados ao conceito de diferenciabilidade de funções, sem relacioná-lo a conceitos usados em Física, Mecânica, Fenômenos de Transporte ou em outras disciplinas do curso de Engenharia. Uma importante aplicação do estudo de derivadas parciais é a otimização de funções. Otimizar uma função significa encontrar seu desempenho máximo ou mínimo. Se para as funções de uma variável, quando as derivadas primeiras forem nulas, teremos pontos extremos que podem ser máximos ou mínimos, para as funções reais de várias variáveis, a fim de saber de que tipo são esses pontos, teremos de utilizar a *matriz Hessiana* para o cálculo deles. Assim, pela importância das aplicações dessas funções na Engenharia, nos interessamos em estudar essa matriz.

## Revisão da literatura

Segundo Creswell “a revisão da literatura proporciona uma estrutura para estabelecer a importância do estudo e também uma referência para comparar os resultados com outros resultados”. (Creswell, 2010, p.51). A metodologia é a pesquisa bibliográfica que define procedimentos de maneira sistemática para captar, avaliar e resumir a literatura acadêmica. O objetivo do presente estudo é compartilhar os resultados de outros estudos que estão intimamente relacionados à produção acadêmica sob o Cálculo em várias variáveis, particularmente, sobre o estudo da matriz Hessiana de funções em várias variáveis publicada em revistas, teses e sites.

Começamos identificando os descritores que utilizaríamos para localizar os materiais nas bibliotecas de pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo(PUC-SP), na Universidade Estadual Paulista (UNESP) e Universidade de São Paulo (USP), o banco de teses da CAPES, a revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, bem como os anais dos congressos de Reunião Latino Americana de Matemática Educativa (RELME), Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), International Congress on Mathematical Education (ICME) e o site da Springer. Esses descritores emergiram na identificação do tema e foram “Cálculo em várias variáveis”, “funções de várias variáveis”, “máximos e mínimos de funções em várias variáveis” e “otimização”.

Até o momento encontramos, três teses de doutorado e quatro artigos que tratam do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para funções de duas variáveis. A princípio, foi realizada a leitura flutuante dos resumos publicados em cada um dos materiais escritos. Neles, buscamos o problema que está sendo tratado, o objetivo central ou o foco do estudo, examinamos os resultados fundamentais relacionados ao estudo proposto, e tratamos de identificar os teóricos utilizados.

As teses de doutorado são de Henriques (2006): “L’enseignement et L’apprentissage des integrales multiples: Analyse didactique integrant l’usage du logiciel maple”, Grimberg (2000): “A constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna” e de Vieira (2011): “Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis”.

No que diz respeito aos artigos, três deles tratam de pesquisas feitas fora do Brasil: “Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning in a multivariate context”, USA e Espanha. *Geometrical representations in the learning of two-variable functions*, Mexico e Porto Rico. *A didactic survey of the main characteristics of Lagrange’s theorem in mathematics and in*

*economics*, Polônia. O artigo publicado no Brasil, intitulado “O software “MAPLE” no estudo de funções de várias variáveis”

### Teses

Henriques (2006) apresenta um trabalho que trata do ensino e da aprendizagem de Integrais Múltiplas e suas aplicações no cálculo de áreas e volumes, utilizando o *software* Maple como ferramenta. O autor ressalta que um dos estudos preliminares para Cálculo de Integrais Múltiplas é o estudo de funções de várias variáveis reais: propriedades, domínio, representação gráfica, continuidade, curvas e superfícies de nível, gradiente, derivação parcial etc. Para o autor, a representação gráfica no espaço assume então um status diferente para o estudo de integrais múltiplas em comparação aos estudos preliminares aplicados ao cálculo de integrais. Assim, o objetivo de seu trabalho foi compreender as dificuldades encontradas pelos alunos e estudar em que medida a utilização de um *software* como o Maple poderia ajudá-los a superar essas dificuldades e favorecer a interação entre representação gráfica e representação algébrica dos objetos matemáticos tratados no trabalho. Visando ao desenvolvimento de seu trabalho em torno do ensino e da aprendizagem das Integrais Múltiplas, o autor estudou as abordagens teóricas que permitiram análises de um dado objeto matemático em vários registros de representação, o que lhe possibilitou precisar o que chamou de representação gráfica e representação algébrica de um sólido nos problemas de cálculo de volume por Integrais Múltiplas. Além disso, o autor apoiou-se na abordagem antropológica do didático e, por utilizar o ambiente computacional, esses estudos teóricos o conduziram a considerar a dimensão instrumental da aprendizagem em ambientes computacionais.

Grimberg (2000), adotando uma linha filosófica, procurou estudar o nascimento e a constituição da Análise Moderna no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. O autor mostrou, ao longo de sua pesquisa, como a Análise tornou-se uma linguagem com aspectos formais característicos de uma teoria matemática: simbolismo, operações e operadores, tornando o cálculo diferencial e integral um cálculo formal.

Em seu trabalho, Vieira (2011) apresenta um estudo sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis cujo objetivo foi a identificação/descrição das categorias de raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis ao longo das fases do ensino, a partir da metodologia denominada Sequência Fedathi. O autor ressalta a estruturação e a concepção de situações didáticas de ensino envolvendo situações-problema diferenciadas que dizem respeito aos rituais algorítmicos identificados nos livros didáticos de Cálculo a Várias Variáveis. Os rituais algorítmicos foram atingidos com base numa visão de complementaridade entre a Teoria das Representações Semióticas e as categorias do raciocínio intuitivo descrita

por Fischbein e exploradas nas quatro fases previstas pela Sequência Fedathi. O autor enfatizou a descrição da transição interna do Cálculo em uma variável para o Cálculo em Várias Variáveis com a intenção de delinear, caracterizar, discutir e compreender a natureza do principal raciocínio que quer registrar. Finalmente, aponta como conclusões que a exploração didática de categorias do raciocínio intuitivo, com base em uma mediação didática que envolveu a exploração de registros de representação semiótica, proporcionou a evolução do conhecimento do estudante a respeito dos conceitos principais do Cálculo em Várias Variáveis.

### Artigos

Em seu artigo, Montiel, Wilhelmi, Vidakovic e Elstak (2009) apresentam um estudo que envolveu o aspecto do pensamento relacionado à matemática avançada. Os autores destacaram que o estudo em educação matemática no nível universitário é relativamente escasso e, por isso, não pode ser dado como certo que a compreensão matemática nesse nível não seja problemática. O objetivo principal do trabalho foi aplicar a abordagem onto-semiótica para analisar o conceito matemático de diferentes sistemas de coordenadas, bem como algumas situações e ações de estudantes universitários relacionados a esses sistemas.

Os autores apontaram como conclusão que a abordagem onto-semiótica permite uma estrutura de análise dos objetos matemáticos e de tudo o que está envolvido na comunicação de ideias matemáticas, o que permite esboçar uma riqueza de instrumentos desenvolvidos no estudo da semiótica.

O artigo de Trigueiros e Martinez apresenta uma pesquisa respeito de como os alunos trabalham com duas variáveis, com o objetivo de investigar a relação entre a noção que os alunos têm dos subconjuntos do espaço cartesiano tridimensional e a compreensão de gráficos de funções de duas variáveis. A teoria APOS e a teoria das Representações Semióticas foram usadas como referencial teórico. O trabalho foi desenvolvido com nove alunos que já tinham feito um curso de cálculo em várias variáveis.

Os autores concluíram que esse estudo forneceu informações a respeito das dificuldades dos alunos na compreensão de funções de duas variáveis. E particularmente, a generalização de funções de uma variável para funções de duas variáveis.

Os autores Xhonneux e Henry apresentam, em seu artigo, uma pesquisa que se concentrou no ensino do Teorema de Lagrange, em cursos de Matemática e Economia com os objetivos de descrever uma metodologia para analisar os processos de Transposição Didática para o teorema de Lagrange nos cursos universitários e, também, de utilizar a Teoria Antropológica

do Didático para comparar os conteúdos das disciplinas de Cálculo de dois cursos nas Universidades de Namur e Louvain. Os autores concluíram que como os livros didáticos não representam efetivamente o conhecimento matemático “ensinado”, seria necessário realizar outras análises para aceder de modo mais profundo às práticas dos professores e às percepções dos alunos.

Em seu artigo, Carvalho e Pereira apresentam um trabalho que tratou da utilização do software Maple V como ferramenta para o estudo de gráficos de funções de várias variáveis e de curvas de nível com estudantes de duas classes, uma do curso de Engenharia e outra do curso de Física. Segundo as autoras, na análise dos gráficos, os alunos realizam uma interação entre os níveis teórico e gráfico e essa manipulação permite a visualização e a explicitação do conteúdo, objeto da atividade. As autoras apontam, em suas conclusões, que o fato de que os alunos não identifiquem a superfície que representa a função estudada os leva a aceitar o gráfico apresentado no computador, sem muito questionamento, o que pode implicar em uma interpretação errônea deste.

### Conclusões

Muitas dessas pesquisas nos mostram a natureza das dificuldades dos estudantes com relação às noções do cálculo em duas variáveis nos anos iniciais em cursos da universidade. Os autores advertiram que a aplicação de uma concepção estrutural dos conceitos, abordada a partir de sua definição formal, acarreta algumas dificuldades em termos de compreensão, principalmente quando se apoiam na transição de funções de uma variável para funções de várias variáveis. Alguns autores insistiram, também, na importância da interação entre diferentes representações semióticas para generalizar os principais aspectos dessas funções e identificar as mudanças nas propriedades fixas de cada tipo de função ou representação. Até o momento temos encontrado nesta revisão bibliográfica pesquisas que tratam de funções em duas variáveis reais, mas não encontramos nenhum trabalho que tratasse de funções com mais de duas variáveis. Esse resultado está nos conduzindo a aprofundar nossa revisão e buscar caminhos para ampliar o ensino para esse tipo de função, pois acreditamos que ele propiciaria a construção de conhecimentos mais significativos para os alunos uma vez que se apoiaria em aplicações de problemas reais.

### Referências bibliográficas

Both, N.T. y Pereira, R. (2004). O software “MAPLE” no estudo de funções de várias variáveis. *Educação Matemática em Revista*, 17, 52-60.

- Creswell, J. (2010). *Projeto de Pesquisa. Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto*. São Paulo: Artmed S.A
- Emile, G. (2001). *A Constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna*. Tesis de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo: Brasil.
- Henriques, A. (2006). *L'Enseignement et l'apprentissage des integrales multiples :Analyse didactique integrant l'usage du logiciel maple*. Tesis de Doctorado, Université Joseph Fourier-Grenoble, Alpes, Francia.
- Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic D. y Elstak, I. (2009). Using the Onto-semiotic approach to indentify and analyze mathematical meaning in a multivariate context. *European society for Research in Mathematics Education*, 12, 2286-2295.
- Trigueros, M. y Martínez, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies Mathematical*, 73, 3-19.
- Vieira, F. (2011). *Aplicações da Sequencia Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tesis de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará. Brasil.
- Xhonneux, S.y Henry V. (2011). A didatic survey of the main characteristics of Lagrange's tehorem in mathematics and in economics. *European Society for research in Mathematics Education*, 14, 1-10.