EL PROCESO DE VERIFICACIÓN EN EL ESQUEMA DE VALIDACIÓN

Rodolfo Eliseo D`Andrea, Patricia Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Facultad de Química e Ingeniería Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Sede Azul. Facultad de Agronomía
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen. En general, en Argentina, el estudiante de Ingeniería, a la hora de validar realiza verificaciones aleatorias para algunos casos particulares. Para analizar su comportamiento frente a la verificación, se utilizó como instrumento de recogida de datos, una serie de proposiciones del Álgebra elemental y del Cálculo infinitesimal. Para el análisis se utilizaron dos grupos de estudiantes: uno que recibió formación sobre el lenguaje y epistemología matemática y otro que no la recibió. Se concluyó que el estudiante tiene conciencia que la acción de verificar, no es lo que se espera de él cuando se les pide una prueba, sin embargo recurren a ella. Esto se debe quizás a que en la vida cotidiana y en el ámbito las Ciencias Fácticas, resulta el tipo de prueba usual. A pesar de recurrir a la verificación, desconocen cómo debe realmente realizarse y es confundida con la demostración formal de proposiciones matemáticas.

Palabras clave: proposición; verificación; demostración; lenguaje matemático

Abstract. In general, in Argentina, the engineering student, to the time to validate performs random checks for some particular cases. To analyze its behavior compared to verification, was used as an instrument of data collection, a series of propositions in check of elementary algebra and calculus. Two groups were used for the analysis: one formed in the knowledge of the mathematical language and epistemology and another not. It was concluded that the student is aware that the action of verification is not expected, when they are asked to make a test, however resorting to it. Perhaps because in the dailyness and factual sciences, it is the usual type of test. In spite of resorting to verification, they don't know how should done and is confuse with the formal proofs.

Key words: proposition; Verification; demonstration; mathematical language

Introducción

En general, en Argentina, los estudiantes de Ingeniería, a la hora de validar realizan verificaciones aleatorias para algunos casos particulares. Actúan exploratoriamente y sin criterio formado, considerándose suficiente para el establecimiento de la verdad de una proposición matemática. Balacheff (2000) en su clasificación de los modos de demostrar que muestra un estudiante, encuadra la acción antes comentada como empirismo näif o ingenuo, configurada dentro de las denominadas demostraciones pragmáticas. Lo precedentemente descripto denota dos cuestiones epistemológicas importantes. Por un lado, la confusión del estudiante frente a las acciones de demostrar y verificar. Por otro lado, el desempeño en la actividad de realizar verificaciones, que no es llevada a cabo adecuadamente sino a través de un 'tanteo', pero sin un sostén apropiado y un conocimiento consistente de lo que se está realizando. ¿Será conocida la palabra verificación por el estudiante?. Y en tal caso, ¿Se comprenderá la palabra en el contexto epistemológico de la Ciencia Matemática, por lo menos de forma primitiva?

"Verificar una proposición matemática verdadera es exhibir un ejemplo que compruebe para ese caso particular que la proposición se cumple". (D´Andrea, Curia y Lavalle, 2012), más adelante se consideran las acepciones de Wason y Mason (2005). Sumándose entonces, al conocimiento o desconocimiento que podrían tener los estudiantes de la palabra verificación, la palabra ejemplo. Un test piloto realizado en un grupo de ingresantes a Ingeniería, corrobora este desconocimiento. Se le propuso al grupo mencionado que en una tabla de doble entrada vincularan la significación de una serie de términos que hacen a la epistemología de la Ciencia Matemática. Resultó notable que la palabra ejemplo, de un uso tan cotidiano y habitual, fuera solamente reconocida en un 50% aproximadamente de la muestra analizada. (Sastre Vázquez y D´Andrea, 2011)

La supresión de desarrollos teóricos en el ciclo medio ha limitado la cursada, en este estadio, a la realización de una práctica consistente en ejercicios que la única dificultad que poseen es la aplicación de un algoritmo concreto. Estos ejercicios no están concebidos como un proceso, limitándose la búsqueda del estudiante a la selección del algoritmo correcto. Esta selección no permite la interacción con situaciones que lleven al estudiante a analizar sus conocimientos para una revisión ya sea para una corrección o una transformación. (Parra, 1990)

Esto lleva a que el proceso de maduración intelectual, se retrase, de modo que el ingresante universitario, se encuentra con un universo diferente al del ciclo medio. Los cursos universitarios de Matemática requieren del sustento de la teoría para realizar la práctica, hábito no desarrollado en el ciclo medio, donde según expresión textual del estudiante: 'Matemática es sentarse a hacer ejercicios'. Esta praxis, tan alejada del método matemático, persiste en la estructura mental del estudiante, aunque al ingresar a la Universidad se les muestre la forma de desempeñarse que corresponde a la Ciencia Matemática. Esto se refleja precisamente cuando se somete al estudiante a situaciones nuevas para validar e inclusive en muchas oportunidades cuando se les pide que demuestren una proposición cuya prueba fue expuesta por el docente en clase. Su reacción, pese a conocer ya cuál es el procedimiento adecuado, es volver a las fuentes, recurriendo a la exhibición de ejemplos, sin saber cómo escogerlos para que satisfagan una proposición. Esta actitud puede ser debida a que, aún cuando pueda parecer que los estudiantes conocen la prueba de una proposición matemática verdadera no axiomática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación (Vinner, 1983). Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez, necesitan de controles posteriores

(Fishbein, 1982). La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante. Wason y Mason (2005) establecen como definición de ejemplo, a un procedimiento a partir del cual el estudiante podría establecer una generalización y definen al proceso de ejemplificación, como la representación de una categoría genérica con la que el estudiante necesita entrar en contacto para extraer un caso particular. Lo que se postula a través de estas aproximaciones es precisamente establecer que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a la generalización. Esta, permite la abstracción de situaciones concretas, constituyéndose en el puente para la construcción de argumentaciones. La elección adecuada de ejemplos y contraejemplos y la guía del docente en tal búsqueda en las instancias iniciales, constituiría un disparador para la producción de demostraciones. D´Andrea et al (2012) establecen un modelo didáctico para atenuar la dificultad del estudiante de Ingeniería frente a la reproducción de demostraciones, evitando la ritualidad y la memorización. Este modelo se basa en las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, visual y simbólico. Permitiendo que el estudiante desarrolle capacidad de razonamiento lógico, con el objeto de que enfrente problemas nuevos en disciplinas específicas de su Carrera. La cuestión esencial radica en el análisis de los procesos de deducción matemática en el aula y de cómo el estudiante puede tener una adecuada disposición mental para optimizar el acceso a los mismos. Procesos encuadrados en el currículo de los cursos universitarios de Matemática de Ingeniería, pero respetando la epistemología de la Ciencia Matemática. El modelo propone una secuencia para la comprensión de la proposición, como antesala a su prueba formal. Tal secuencia va desde el lenguaje natural del individuo (coloquial), pasando por el lenguaje visual, la verificación de la proposición y finalmente desde el lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática, y que es la instancia previa a la prueba. La verificación, cumple un rol determinante en el proceso descripto, ya que la elección de ejemplos adecuados, permitirá disparar conjeturas previas a la demostración. Este proceso no es completo si no se hace explícito el lenguaje matemático en los cursos iniciales de Matemática.

Experimentación

A los efectos de analizar el proceso de abordaje de la verificación, se aplicó un instrumento de recogida de datos consistente en ejercicios de verificación de proposiciones de Álgebra elemental y Cálculo infinitesimal. Los estudiantes de la muestra se encontraban realizando, en el segundo año de Ingeniería, un curso anual de Cálculo de dos partes: Aplicaciones del Cálculo Diferencial e integral unidimensional, Sucesiones y Series Numéricas y Series de potencias y Cálculo en varias variables. La muestra se tomó sobre dos grupos diferentes de estudiantes: 1) El grupo de control formado sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje "centrado en el contenido, donde el docente transmite a los estudiantes un saber ya acabado y construido" y donde el estudiante no fue instruido sobre rudimentos esenciales del lenguaje y epistemología de la Ciencia Matemática. 2) El grupo experimental, formado sobre un proceso sustentado en los lineamientos del aprendizaje significativo, y donde el estudiante fue instruido sobre rudimentos esenciales del lenguaje y epistemología de la Ciencia Matemática. En cada uno de los ejercicios se propuso que verificaran una serie de proposiciones verdaderas. El primer ejercicio constaba de cuatro proposiciones de Álgebra elemental. Las dos primeras a la hora de ser verificadas, no requerían de un proceso demasiado reflexivo. Una reacción esperada del estudiante es que este exhibiera eventualmente (no necesariamente) en cada uno, dos ejemplos: uno con un real positivo y otro con un real negativo. Mientras que las dos últimas, requerían que el estudiante identificara hipótesis y las chequeara, de modo que se cumpliera lo establecido por la tesis. El segundo ejercicio constaba de dos proposiciones del Cálculo infinitesimal, acerca de contenidos que el estudiante se encontraba aprendiendo. Ambas requerían de lo mismo que necesitaban las dos últimas proposiciones del ejercicio 1.

Ejercicio 1: Las siguientes proposiciones son Verdaderas. Se pide que sean verificadas.

$a. \forall x \in R: \sqrt{x^2} = |x|$ $\qquad b. \forall x \in R: x + 1 > x;$

$c. 0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1};$ $\qquad d. A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

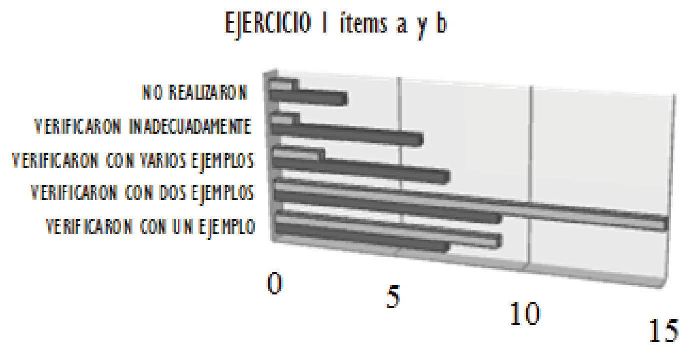
Ejercicio 2: Las siguientes proposiciones son Verdaderas. Se pide que sean verificadas.

$$a. Teorema\ de\ Rolle: f\ función\ continua\ en\ [a, b]\ y\ derivable\ en\ (a, b)\ y\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b)/f'(c) = 0.$$

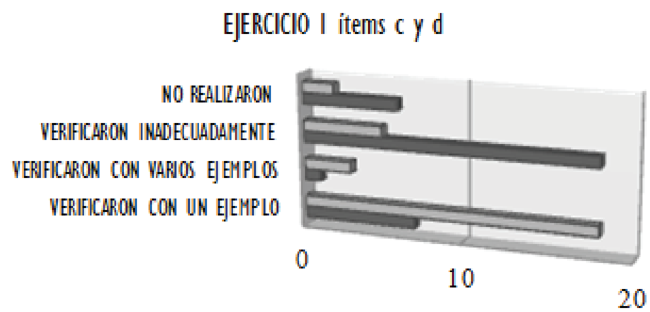
b. Criterio término n – ésimo para convergencia de series: $\sum_{k=1}^{n} a_k\ converge \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Resultados

En el ejercicio 1, ítems a) y b), se observó que ambos grupos verificaron con un ejemplo, en porcentajes similares. Con dos ejemplos, verificó más del 50% del grupo 2, mientras que aproximadamente el 30% del grupo 1. Un poco más del 20% del grupo 1 realizó varias verificaciones para sustentar lo pedido, reacción que pasó prácticamente inadvertida para el grupo 2. Verificaron inadecuadamente, aproximadamente un 20% del grupo 1, mientras que hubo un solo representante del grupo 2 que así lo hizo. Esta inadecuación se reflejó en el ítem a) al asumir la verificación como una explicación, recurriendo a la interpretación geométrica del valor absoluto de un real. En el ítem b) se produjo algo similar, con la interpretación geométrica de la ubicación de los reales en la recta numérica. Un número mínimo en ambos grupos no realizó directamente las consignas propuestas.

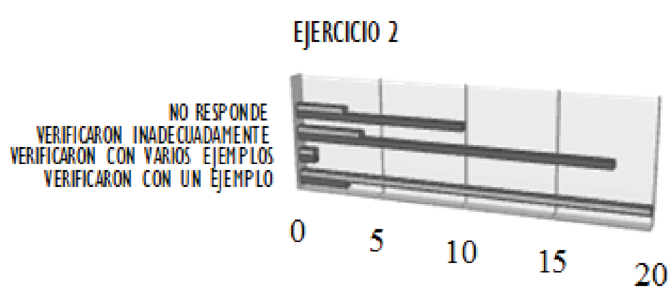


Grupo1: ■ *Grupo 2:* □ ***Gráficos correspondientes a resultados del Ejercicio 1. ítems a y b.***



Grupo1: ■ *Grupo 2:* □ ***Gráficos correspondientes a resultados del Ejercicio 1. ítems c y d.***

En el ejercicio 1, ítems c) y d), se observó que el grupo 1, en un porcentaje superior a la mitad, verificó de forma inadecuada. Aproximadamente un 18% del grupo 2 también así lo hizo. Consideraron que el logro del consecuente de la implicación era suficiente para sostener la verdad de la proposición. Aproximadamente un 22% del grupo 2 verificaron adecuadamente con varios ejemplos, mientras que del grupo 1, solamente lo hizo un solo estudiante. Los estudiantes del grupo 2 pudieron llevar a cabo la verificación adecuadamente con un ejemplo, en un número que superó al 60%. Un número mínimo no realizó directamente las consignas propuestas del grupo 1, siendo aproximadamente el 20% en el grupo 2.



Grupo1: ■ *Grupo 2:* □ ***Gráficos correspondientes a resultados del Ejercicio 2.***

En el ejercicio 2, se observó más claramente la contrastación entre los estudiantes del grupo 1 y 2. Los del grupo 1, verificaron inadecuadamente aproximadamente en un 56%. Contrariamente al grupo 2, entrenado en cuestiones del lenguaje y epistemología de la Ciencia Matemática, mostraron un desempeño adecuado frente a la verificación de ambos ejercicios planteados (72%). Un solo estudiante en cada grupo exhibió varios ejemplos. Un número mínimo no realizó directamente la propuesta en el grupo 2, mientras que aproximadamente un 31% en el grupo 1. Concretamente, en el ejercicio 2 a) hubo estudiantes que obtuvieron valores de c sin analizar el intervalo a que pertenecían y sin determinar si la función propuesta como ejemplo de la verificación, satisfacía las hipótesis del teorema propuesto. Es decir que la elección del ejemplo fue inadecuada, pero esto en correlato con el desconocimiento de la imprescindible necesidad del chequeo de las hipótesis. También hubo casos que, a pesar de una elección adecuada de ejemplos, se direccionaron sobre el consecuente de la implicación sin el chequeo previo de las hipótesis. Precisamente esto puede atribuirse que a diferencia del ejercicio 1, ítems c) y d), aquí eran varias hipótesis que debían chequearse para el cumplimiento de la tesis.

A continuación se detallan dos ejemplos representativos expuestos por los estudiantes, y su forma de operar frente a la acción de verificar. En el ejercicio 2 a) se observa primero el chequeo adecuado que debe hacerse de las hipótesis, que el estudiante en general no realiza y directamente 'verifica' lo postulado por la tesis, sin percatarse que ninguno de los dos valores obtenidos pertenecen al intervalo abierto correspondiente al ejemplo propuesto. En otros casos, el estudiante propone un ejemplo donde las hipótesis se cumplen pero no son chequeadas, direccionándose directamente a lo propuesto por la tesis. En cualquier caso, esa es la constante de su accionar. El proceso se repite en el ejercicio 2 b) como se muestra en el ejemplo escogido de la serie armónica.

Ejercicio 2 a)

$f(x) = x^2 - 1 \ en\ [0,1]$, satisface la continuidad $en\ [0,1]$ y derivabilidad $en\ (0,1)$ pero una de las hipótesis no se satisface: $f(0) = -1 \neq f(1) = 0$, sin embargo la reacción del estudiante se manifestó así:

Se direccionó directamente a la verificación del consecuente de la implicación (tesis):

$f(c) = c^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \notin (0,1) \vee c = -1 \notin (0,1)$, pensando en que logró el objetivo. Esto se produjo por un lado porque no se tuvo en cuenta el chequeo de las hipótesis y por otro, como pudo observarse, no se tuvo en cuenta que los valores hallados no pertenecen al intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 2.b. Reacción del estudiante:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, esto significa que la serie: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ converge.

Conclusiones

Al actual estudiante de Ingeniería le resulta difícil comprender la exposición de procesos de validación de proposiciones matemáticas que realiza el profesor en el aula. Los estudiantes, a la hora de requerirles una demostración, tienen claridad sobre lo que se espera de ellos y reconocen que la verificación es exigua cómo demostración. Asimismo recurren a ésta como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. La verificación resulta un método usual de la vida cotidiana y las ciencias fácticas, y probablemente la actitud esté asociada a este hecho. Esto lleva al estudiante a enfrentar confusiones entre la epistemología de la Ciencia Matemática y las disciplinas científicas factuales. Confundiendo la acción de demostrar y verificar. Esto también está asociado al desconocimiento del lenguaje y la epistemología que le es propia a la Ciencia Matemática. Por lo que se hace necesario que los ingresantes universitarios sean instruidos en el lenguaje matemático, por lo menos en sus rudimentos esenciales, cuestión que debería hacerse en cualquier disciplina que hace al abanico de las Ciencias básicas: Física, Química, Biología.

De la muestra de estudiantes analizada, a la hora de verificar, el grupo no formado en el conocimiento del lenguaje y la epistemología de la Ciencia Matemática fue quién exhibió varios ejemplos. Esto no es casual, y tiene que ver con un razonamiento primitivo, característico del empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), descripto al comienzo del documento. Esa multiplicidad de ejemplos, tiene que ver además con la inseguridad del estudiante. Posiblemente con mayor cantidad de ejemplos exhibidos, sienten que la realización de su tarea tiene más sustento. Puede ocurrir como en los casos a) y b) del ejercicio 1, que la exhibición de dos ejemplos, en este caso particular, sean dos casos bien representativos: reales positivos y negativos. Si bien la consigna de los ejercicios fue clara, muchos pueden haber asociado lo pedido con la prueba de la proposición. Incluso, aquellos estudiantes formados en el lenguaje y epistemología matemática, en ciertas oportunidades, pueden llegar a confundir acciones como la de verificar y probar, aparentemente clarificadas. Esto podría tener que ver con la aceleración obligada de una madurez intelectual que termina siendo artificial ya que no tiene el respaldo de un ciclo medio que haya entrenado en ese estadio previo e imprescindible para el abordaje de la etapa universitaria. Esta aceleración es producto de una necesidad imperiosa que tiene un ingresante, carente de una formación sólida en el ciclo medio y que requiere conocimientos en el primer año universitario que exceden su formación propedéutica.

La falta de claridad de las acciones descriptas, y concretamente la verificación, obedecen a un desconocimiento explícito por parte de los estudiantes. Los términos que hacen a la Epistemología de la Ciencia Matemática no requieren de ser expuestos con un glosario enciclopedista, y menos para estudiantes de Ingeniería. Necesitan ser mostrados a través de una teoría complementada con una praxis activa, dejando de ser compartimentos estancos y desarrollados a través de una práctica cotidiana que lleve a cabo el estudiante, guiado por el docente.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, C. & Saiz, I. (Comp.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones* (pp. 51–63). Buenos Aires: Paidós Educador.

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics,* 3 (2), 9–24.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (4), 396–428.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas. *Revista Educación Matemática*, *2* (3), 22–31.

Sastre Vázquez, P. y D´Andrea, R.E. (2011). Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería. En Borsa, E., Irassar, L., Pavioni, O. (Comp.). *Anales XVI EMCI (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería) Nacional y VIII Internacional.* Olavarría: UNICEN. Sede Olavarría.

Vinner, S. (1983). The notion of proof some aspects of students' views at the senior high level. En: R. Hershkowitz, ed. *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 289–294). Shoresh, Israel.

Wason, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.