LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE PROBLEMAS EN CONTEXTO

Johnny Vanegas, Sara Henao y Jeisson Gustin
Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
yovanegasdiaz@gmail.com, saramarcelahenao@gmail.com, jeissongustin@gmail.com

Investigaciones recientes en educación matemática reconocen las grandes posibilidades que ofrece la introducción de temáticas relacionadas con la *teoría de grafos* en la formación del pensamiento lógicomatemático, la intuición y la resolución ingeniosa de problemas de diversa índole. Este artículo busca ilustrar algunas de estas posibilidades, a través de un problema paradigmático en la historia de las matemáticas: el de "los siete puentes de Königsberg", en el que se reconoce una conexión entre las matemáticas y el mundo real, lo cual desde la perspectiva de las denominadas matemáticas en contexto podría favorecer la integración de los procesos de resolución de problemas y la modelación matemática en las clases de matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La *teoría de grafos* se presenta como uno de los diversos campos matemáticos que investigadores y educadores en didáctica de las matemáticas han empezado a "revisitar", como escenario apropiado para la integración de procesos matemáticos como la *resolución de problemas* y la *modelación matemática*.

En efecto, algunos investigadores (e.g., Braicovich y Cognigni, 2011) consideran que el uso de la teoría de grafos, como herramienta conceptual en la construcción de modelos y resolución de problemas, posibilita la adquisición y el desarrollo de diversas habilidades en los estudiantes; específicamente, las que se relacionan con la construcción de razonamientos alrededor de la matemática discreta, como son: la intuición, la exploración, el descubrimiento y el diseño de hipótesis. Habilidades que aportan considerablemente al desarrollo del pensamiento lógico y a la visión espacial de los estudiantes, así como a la formación del razonamiento abstracto.

De esta visión, los *grafos* pueden considerarse como una abstracción útil para modelar una amplia gama de problemas en contexto: problemas asociados a redes de computadora, redes telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos, sis-

Vanegas, J., Henao, S. y Gustin, J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 283-290). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

temas de carretera, sistemas de transporte, distribución de mercancía y sistemas organizacionales.

Nuestra propuesta ilustra la utilización de los grafos como un recurso didáctico, que favorece la construcción de la actividad modelizadora por parte de los estudiantes cuando resuelven problemas en contexto. Se propone así el estudio de diversas situaciones-problema vinculadas con la solución del problema histórico que marcó los inicios de la teoría de grafos.

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

La teoría de grafos tiene una interesante conexión con la geometría; de hecho, se la suele considerar como parte de la denominada geometría cualitativa que a su vez se inscribe en el campo de la matemática discreta. Este último es un campo que se considera de especial proyección en las tendencias innovadoras en educación matemática.

Se suelen considerar diferentes elementos que favorecen la introducción de la teoría de grafos en la escuela. Entre ellos, se reconoce el hecho de que no se requieren conocimientos matemáticos previos y que permite el desarrollo de estrategias que apuntan a favorecer un buen desempeño en la resolución de problemas (Nouche, 2008).

También se reconoce que es una herramienta matemática potente en la modelación de problemas matemáticos y no matemáticos, lo que posibilita que los estudiantes establezcan un vínculo entre los conocimientos formales de la matemática y sus conocimientos informales, promoviendo de esta manera mayor disposición para aprender y el mejoramiento del desempeño en matemáticas (Braicovich, Oropeza y Cerda, 2008).

En este sentido, los grafos se pueden utilizar como instrumento de modelización y representación de situaciones-problema. Un claro ejemplo de ello se visualiza en el problema de los puentes de Königsberg, solucionado por Euler en el siglo XVIII, donde se plantea atravesar una ciudad compuesta por siete puentes de tal forma que se puede pasar una sola vez por cada puente para llegar al sitio de partida.

Así pues, los grafos se constituyen en una potente herramienta para generar *significado* de los objetos matemáticos, favoreciendo la comprensión, el aprendizaje y la construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas y la modelación matemática. El renovado interés por la teoría de grafos se refleja en que desde hace dos décadas el tema es asunto de estudio de importantes publicaciones en didáctica de las matemáticas, como por ejemplo la revista SUMA (e.g., Espinel y Sobrón, 1992; Espinel, 1994; Menéndez, 1998; Novo y Méndez, 2004).

Dimensión matemática

La teoría de grafos no cuenta con una terminología uniforme y aceptada por toda la comunidad matemática. De hecho, para evitar confusiones, la mayoría de obras sobre grafos comienzan definiendo los conceptos que se van a usar.

Las siguientes definiciones y conceptos básicos son los más comunes en teoría de grafos y pueden emplearse para demostrar el Teorema de Euler asociado a la solución del problema de los puentes de Königsberg.

Un *grafo simple* es un par G = (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados *vértices* y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V, llamados *aristas*.

Si $e = \{u, v\}$ es una arista entonces se dice que los vértices u y v son los extremos de e. Para simplificar la notación se designa la arista $\{u, v\}$ simplemente como uv.

Un vértice y una arista son *incidentes* si el vértice es uno de los extremos de la arista. Dos vértices u y v son adyacentes si uv es una arista.

Por simplicidad, un grafo se representa por medio de puntos o pequeños círculos que designan vértices, y líneas (rectas o curvas) que los unen, que representan las aristas. En un grafo, el *grado de un vértice v* se define como el número $g(v)$ de aristas incidentes con él.

Un ciclo de un grafo se dice *ciclo de Euler*, si pasa por todos los vértices recorriendo cada arista exactamente una vez, empezando y terminando en el mismo vértice.

Lema 1: Si G es un grafo euleriano, entonces todos sus vértices son de grado par.

Demostración: En efecto, supongamos que G es un grafo euleriano, es decir, supongamos que existe un ciclo de Euler β, en G. Sea v un vértice cualquiera de G. Veamos que tiene grado par.

− Si v no es el primer vértice de β, cada una de las veces que el ciclo pase por v entrará y saldrá por dos aristas distintas a las de la vez anterior, luego contribuirá con 2 al grado de v.

− Si v es el primer vértice de β, el ciclo contribuye con 2 al grado de v en cada una de las "visitas" que se realicen a v, salvo en la primera y en la última en la que añade 1 cada vez.

Por lo tanto, en cualquier caso, el grado de v es par.

Teniendo en cuenta la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca tenemos: Si existe algún vértice de grado impar, entonces G no es euleriano.

Se dice que un camino de un grafo es de Euler, si pasa por todos los vértices, recorriendo cada arista exactamente una vez.

Obsérvese que un camino de Euler en un grafo G, puede entenderse también como una forma de dibujar el grafo sin levantar el lápiz del papel y sin pintar dos veces la misma arista.

Lema 2. Una condición necesaria para que un grafo admita un camino de Euler es que el número de vértices de grado impar sea dos o ninguno.

DISCUSIÓN Y PRÁCTICA DE LA SITUACIÓN PROBLEMA

El problema de los puentes de Königsberg es quizá el mejor ejemplo para ilustrar el potencial de los grafos en la modelación de problemas en contexto. La historia relata que en la ciudad alemana de Königsberg (hoy Kaliningrado, en Lituania), siete puentes atravesaban el río Plegel en su curso sinuoso por la ciudad.

Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar al punto de partida, habiendo pasado una y solo una vez por cada puente. Aunque era ampliamente conocido que tal camino no existía, ninguno de los habitantes podía explicar por qué (Figura 1).

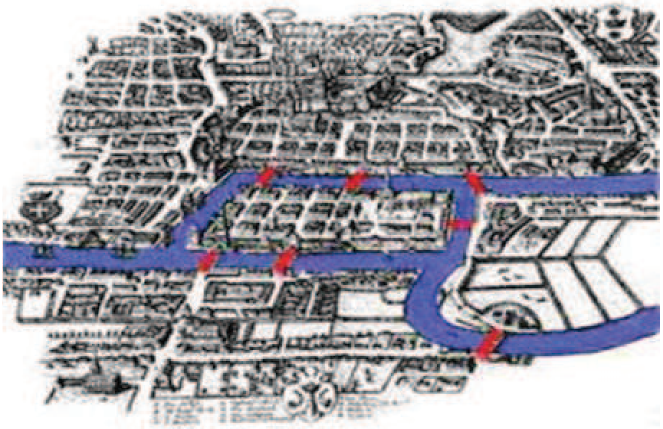


Figura 1: Ciudad de Königsberg en la Prusia oriental del siglo XVIII

En la actualidad, este y otros problemas similares pueden abordarse a través de la teoría de grafos, representando cada una de las zonas de la ciudad por un vértice y cada puente por una arista que une los vértices correspondientes a las zonas conectadas por dicho puente. Un grafo representativo de Königsberg es el siguiente (Figura 2).

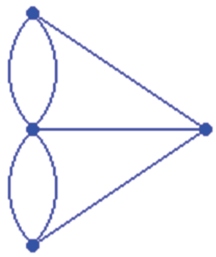
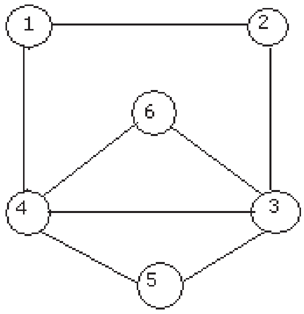


Figura 2: Grafo que representa el conjunto de puentes de la ciudad de Königsberg

Así, el problema inicial se traduce en: ¿es posible realizar el dibujo del gráfico sin levantar el lápiz del papel y pasando solo una vez por cada arista?

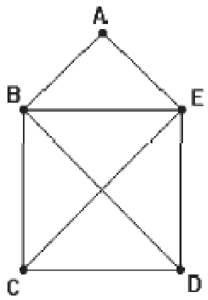
Es importante anotar que el proceso de "reducir un problema a un grafo equivalente" representa un valioso desarrollo de la capacidad de abstracción y visión espacial de los niños de 12 a 14 años. En este sentido, conviene acompañarlo de otras *situaciones problema* como las que se presentan a continuación.

<u>Situación 1</u>. ¿Es posible dibujar la siguiente figura partiendo de un vértice cualquiera y terminando en el mismo, sin levantar el lápiz del papel?



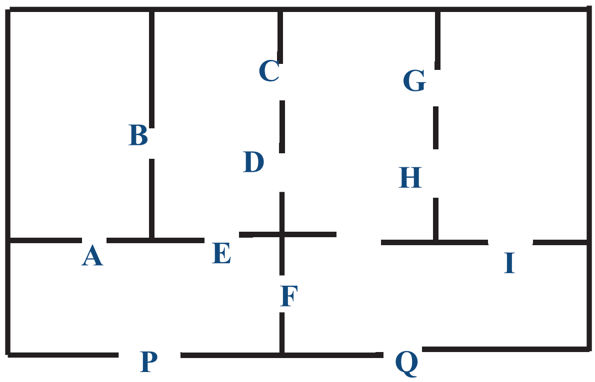
Los docentes y orientadores de la actividad deben reconocer que si un grafo no tiene vértices de orden impar, entonces se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Además, que se puede dibujar empezando desde cualquier vértice y el dibujo será "cerrado" puesto que termina en el mismo vértice en el que se empezó.

<u>Situación 2.</u> ¿Es posible dibujar esta figura partiendo de un vértice cualquiera y terminando en el mismo, sin levantar el lápiz del papel?



Los docentes deben conocer que si un grafo tiene exactamente dos vértices de orden impar, entonces se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, aunque siempre sea necesario empezar en uno de ellos y terminar en el otro. Además, que si un grafo tiene tres o más vértices de orden impar, entonces hasta ahí se llega, ya que no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

<u>Situación 3.</u> En un museo de arte colombiano, un joven ideó una forma de ver todos los salones, entrando por la puerta P y saliendo por la puerta Q, pasando por todas las puertas internas, excepto por una, exactamente una vez.



¿Por cuál puerta interna no pasó?

Finalmente, se discute la solución propuesta por Euler en 1735, en relación al problema de los puentes de Königsberg: es imposible realizar dicho recorrido, pues para la existencia del mismo sería necesario que a lo más dos de las cuatro zonas terrestres fueran el final de un número impar de puentes.

Conclusiones y proyecciones

Situaciones como estas pueden emplearse para incentivar las cualidades de visión espacial, abstracción de problemas, capacidad de deducción y generalización de los estudiantes. Así pues, los grafos representan un recurso didáctico potente para enfocar la enseñanza en el desarrollo significativo de los conceptos matemáticos, al tiempo que brindan la oportunidad de que los estudiantes mismos "reinventen" los objetos de la matemática, lo que se relaciona positivamente con el aumento en los logros e intereses por la ciencia.

De igual manera, este tipo de aproximaciones se ve enriquecido por la integración de las TIC, en particular los ambientes de geometría dinámica, vinculándolos con nuevos campos del conocimiento, como la geometría computacional y con enfoques de especial interés en investigación en didáctica de las matemáticas como las matemáticas en contexto y las *matemáticas experimentales*.

Referencias

Braicovich y Cognigni, (2011). Coloreando la geografía del plano al toroide. *NÚMEROS,* 76, 135-148.

Braicovich, T., Oropeza, M. y Cerda, V. (2008). Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos. *Memorias del II REPEM* (pp. 70-76). La Pampa, Argentina: Editorial de la Universidad Nacional de la Pampa. Recuperado de: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/talleres/T11.pdf

Espinel, M. (1994). El lenguaje de los grafos en los problemas de comunicación. *SUMA,* 18, 32-38.

Espinel, M. y Sobrón, M. (1992). Grafos a través de juegos. *SUMA*, 11-12, 88-94.

González, F. (2004). Grafos. En *Apuntes de matemática discreta* (pp. 395-463), Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, España. Recuperado de http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion14.pdf

Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *SUMA*, 27, 11-26.

Nouche, F. (2008). Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria. *Premisa, 10*(39), 17-26. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Nouche.pdf

Novo, E. y Méndez, A. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *SUMA,* 46, 31-35.