LOGROS Y DESACIERTOS CUANDO SE APRENDE A DEMOSTRAR

Luis Lara y **Carmen Samper**

Colegio Ciudadela Educativa de Bosa IED, Universidad Pedagógica Nacional

luisfernandolara26@yahoo.es, csamper@pedagogica.edu.co

Se presentan algunos de los resultados obtenidos en un estudio en el que se caracterizaron los argumentos de un grupo de estudiantes de educación básica secundaria cuando, en el marco de la actividad demostrativa, formularon una conjetura como respuesta a un problema y la justificaron. En particular, se muestran dos momentos que proporcionan evidencia de que los estudiantes entendieron qué es demostrar y cómo se construye una demostración, y de que el proceso vivido por uno de ellos se vio afectado por un conflicto epistémico.

INTRODUCCIÓN

Este artículo se basa en un trabajo de grado de maestría (Fonseca y Lara, 2013), adscrito al grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ·G*) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Exponemos aspectos relacionados con los argumentos producidos por un grupo de estudiantes de educación básica secundaria cuando construían una demostración en un entorno que favoreció la actividad demostrativa.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Investigadores en educación matemática, como Pedemonte (2005) y Godino y Recio (2001), identifican problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Hanna (1996, citada en Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2007) señala que en las pocas escuelas donde se trata la demostración, a pesar de ser un aspecto central en matemáticas, prevalece el aprendizaje memorístico lo cual carece de valor educativo. Además, Jones (2000) menciona que los estudiantes no ven la necesidad de hacer demostraciones deductivas porque se privilegia la verificación y se deja a un lado la exploración y la explicación. Para enfrentar esta realidad desde una perspectiva sociocultural del aprendizaje, el grupo *Æ·G* ha propuesto estrategias metodológicas que favorecen la actividad demostrativa tanto en el contexto universitario como en el escolar y, por ende, el desarrollo de habilidades argumentativas.

Lara, L. y Samper, C. (2013). Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 203-210). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Nuestro interés como profesores de secundaria era proponer tareas en el aula que favorecieran la argumentación entre estudiantes porque esta es un elemento esencial para entender lo que es una demostración y aprender a construirla. Teniendo en cuenta todo lo anterior, uno de los aspectos que analizamos en el trabajo de grado fue el tipo de argumentos que producen los estudiantes cuando trabajan en grupo en un ambiente que propicia la actividad demostrativa.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Actividad demostrativa

El grupo de investigación Æ·G propone, para el ámbito escolar y universitario, lo que denominan *actividad demostrativa,* constructo complejo con el cual, siguiendo a de Villiers (1993), consideran la demostración como medio de comunicación, validación, explicación, sistematización y descubrimiento. La actividad demostrativa involucra dos procesos no necesariamente independientes: la *conjeturación*, cuyo producto es una conjetura, y la *justificación* cuyo resultado es la validación de la conjetura, ya sea dentro de un sistema teórico o con explicaciones empíricas, según el respectivo nivel escolar (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012).

Modelo de Toulmin

El modelo de argumentación propuesto por Toulmin es una herramienta útil para analizar los argumentos que los estudiantes producen durante el desarrollo de las acciones de la actividad demostrativa. Asumimos que un *argumento* es un enunciado oral o escrito, utilizado para convencerse o convencer a otros. Según el modelo, un argumento tiene estructura ternaria: los *datos* (D) son información que dan lugar a la *conclusión* (C) y la *garantía* (G) es la regla de inferencia que relaciona los *datos* con la *conclusión*. Estos tres elementos no necesariamente están explícitos en un argumento. La manera como estos se estructuran y relacionan define el *tipo de argumento*: deductivo, abductivo o inductivo (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012). En los esquemas con los que representamos cada tipo de argumento (ver Figuras 1, 2 y 3) destacamos el hecho de que en cada caso, el producto es diferente y se indica en un recuadro punteado.

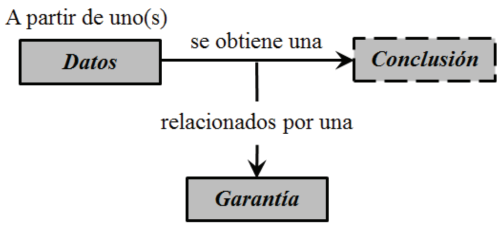


Figura 1: Esquema de argumento deductivo

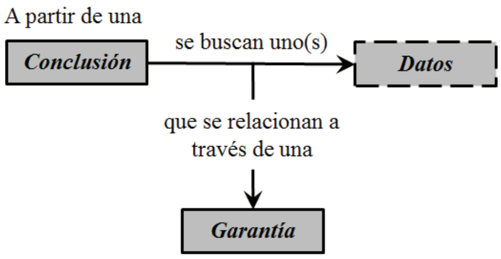


Figura 2: Esquema de argumento abductivo

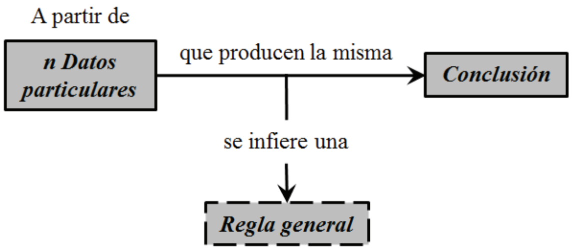


Figura 3: Esquema de argumento inductivo

MARCO METODOLÓGICO

Nuestro estudio adoptó una metodología cualitativa, centrada en la corriente descriptiva-interpretativa, que correspondió a un estudio de caso no participante y estructurado (Cohen y Manion, 1989/1990). Fue estructurado porque usamos la aproximación metodológica del grupo Æ·G con el fin de generar un entorno favorable para aprender a demostrar.

Diseñamos una secuencia didáctica y la implementamos en el segundo semestre de 2011, durante aproximadamente dos meses, en el Colegio Ciudadela Educativa de Bosa I.E.D., con estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria (14-16 años). El estudio de caso se hizo sobre la actividad de un grupo de tres estudiantes del curso, Diana, Dayana y Cristian, cuando resolvieron dos problemas.

El desarrollo del estudio se hizo en dos fases. En la primera fase, diseñamos e implementamos la secuencia didáctica cuyo propósito era construir un sistema teórico local para que los estudiantes, en un momento determinado, pudieran formular y demostrar una conjetura. Para ello, se generó un entorno favorable para aprender a demostrar caracterizado por tres elementos (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012): *las tareas* favorecieron la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas en forma de condicional; *la interacción social en el aula* entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes permitió la comunicación y discusión de ideas que se validaron o rechazaron a través de la argumentación; *el uso de geometría dinámica* (Cabri) favoreció la construcción y exploración de propiedades geométricas y permitió que los estudiantes produjeran conjeturas que se organizaron en un sistema teórico local con apoyo del profesor.

En la segunda fase, grabamos en audio y video cada una de las sesiones del desarrollo de la secuencia didáctica, recogimos las producciones escritas de los estudiantes, transcribimos las dos últimas sesiones correspondientes al proceso de conjeturación y al proceso de justificación, y finalmente las analizamos.

Como resultado del estudio de la situación: *Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma*, los estudiantes formularon una conjetura aproximada a "Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo". Luego, justificaron dicha conjetura usando un esquema de tres columnas, "esquema-deducción" (Samper, Molina y Echeverry, 2011), en el que consignaron el dato, la garantía que proviene del sistema teórico local conformado y la conclusión de sus argumentos respectivamente en las columnas tituladas "Qué sé", "Qué uso" y "Qué concluyo".

ANÁLISIS DE DATOS

A continuación presentamos, a modo de ejemplo, el análisis realizado a un proceso de justificación de la conjetura que habían obtenido; en dicho proceso logramos identificar dos momentos en los que encontramos evidencia de argumentos y de comprensión de lo que significa demostrar en matemáticas. En el primer momento, ellos formularon tres argumentos completos, ligados con la información suministrada en la conjetura pero no encadenados como para convertirse en pasos de la respectiva justificación. En un segundo momento, un integrante del grupo propone escoger uno de los tres argumentos completos para determinar el primer paso de la justificación; luego, de manera colectiva, plantean los demás pasos para formular la justificación. Después identificamos el conflicto epistémico que obstaculizó la construcción de la justificación.

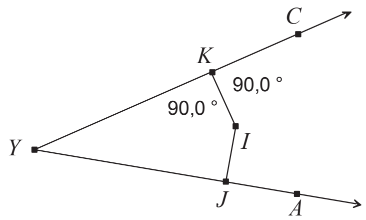
Primer momento: Formulan tercer argumento ligado a la situación

Los estudiantes formularon tres argumentos ligados a la situación de estudio (ver Figura 4). En lo que sigue, Cristian y Diana escriben el tercer argumento.

394. Cristian: La definición de ángulos congruentes. Cópiela que esa es la que vamos a hacer. La que vamos a usar.

395. Diana: [Escribe “D. de Ángulos congruentes” en la columna *Qué uso*, tercera línea.]

396. Cristian: Aaaah. Pues lo mismo que acá [señala la columna *Qué sé* del segundo argumento: $\angle IKC$ 90º, $\angle IKY$ 90º.]



397. Diana: Que son ángulos rectos. Algo así había dicho.

[…]

405. Diana: Ya, ya, ya. [Escribe $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos.] ¿Entonces? ¿Qué concluiríamos? Que el ángulo *C*, *K*, *I* es congruente con *Y*, *K*, *I* [escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$.] Tenemos tres hipótesis. Ahora, ponemos a Dayana que saque [elija] cuál es.

Para este tercer argumento, Cristian desarrolla un argumento deductivo completo que Diana lo transforma pues escribe que $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son rectos (*datos*). Al inicio de este diálogo [394], Cristian le solicita a Diana que copie la definición de ángulos congruentes pues esa es la que van a usar (*garantía*); al final [405], Diana escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$ (*conclusión*). Cuando Diana menciona que hay que elegir una de las tres hipótesis [405] se evidencia que son conscientes de que hay que organizar la justificación para usar los tres argumentos escritos en la hoja.

	Qué sé	Qué uso	Qué concluyo	
	$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$	D. Segmentos congruentes	$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$	
	$\angle IKC$ 90° $\angle IKY$ 90°	D. Rectas perpendiculares	$\overline{IK} \perp \overline{YC}$	Tres argumentos
	$\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos	D. Ángulos congruentes	$\angle CKI \cong \angle YKI$	
(1)	$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$	D. Segmentos congruentes	$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$	
	IK distancia del punto a la recta	D. Distancia de un punto a una recta	$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$	
	IJ distancia del punto a la recta	D. Distancia de un punto a una recta	$\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$	
	$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$	D. Rectas perpendiculares	$\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ son ángulos rectos	Justificación
	$\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ son ángulos rectos	HG. Ángulos rectos	$\angle IKC \cong \angle IKY$ $\angle IJY \cong \angle IJA$ $\angle IKC \cong \angle IJY$ $\angle IKY \cong \angle IJA$	

Figura 4: Argumentación plasmada en el esquema-deducción

Segundo momento: Elaboran segundo y tercer paso de la *justificación*

En el diálogo que sigue, los estudiantes escriben la *conclusión* del segundo paso de la justificación cuyo *dato* es “*IK* distancia del punto a la recta” y cuya *garantía* es la definición de distancia de un punto a una recta, y proponen el tercer paso de la justificación.

814. Diana: *I*, *K* es perpendicular con *Y*, *C* [en la columna *Qué concluyo* del segundo paso, escribe “ $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ ”.] […] Ahora escribimos eso [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$] acá [en la columna *Qué sé* del tercer paso.]

815. Cristian: No.

816. Diana: ¿Qué más nos falta?

817. Cristian: Se hace lo mismo con el de abajo [con el $\overrightarrow{YA}$ para plantear que $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.]

[…]

822. Diana: Sí. [Como tercer paso, escribe en la columna *Qué sé*: *IJ* distancia del punto a la recta; *Qué uso*: Definición distancia de un punto a una recta; *Qué concluyo*: $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] Ya. Ahora, eso sí lo escribimos aquí abajo [en la columna *Qué sé* del cuarto paso], esas conclusiones.

Cristian rechaza la propuesta de Diana de colocar como *dato* del tercer paso $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y propone formular el mismo argumento con respecto al $\overline{IJ}$ y al $\overrightarrow{YA}$. Diana escribe su argumento en el esquema-deducción [822]: en la primera columna los *datos*; en la segunda, la *garantía*; y en la tercera, la *conclusión.* De esta forma, queda establecido el segundo paso de la justificación. Cuando termina de escribir este paso, así como en la primera intervención de Diana [814], se evidencia que ella comprende que una justificación implica el encadenamiento de argumentos porque menciona que la *conclusión* que acaban de obtener pasa a ser el *dato* de otro paso.

Conflicto epistémico sobre la bisectriz

Las siguientes intervenciones de Cristian, muestran lo que denominamos *conflicto epistémico* que consistió en rechazar la representación del rayo en el interior del ángulo pues no comprendía que dibujarlo no significaba atribuirle la propiedad de ser bisectriz, propiedad que finalmente debía justificar.

103.	Cristian:	¿A qué es lo que tenemos que concluir? El punto está sobre la bisectriz. O sea que aún no sabemos la bisectriz. O sea, no hemos sacado esto [borra la bisectriz del $\angle CYA$.] Aún no hemos sacado esto. […]
		[…]
472.	Diana:	Yo veo dos triángulos congruentes: *J*, *Y*, *I* y *I*, *K*, *Y*.
473.	Cristian:	No porque… es que Diana se está confundiendo con esta línea [$\overrightarrow{YI}$ bisectriz del $\angle CYA$.]
474.	Profesor:	Déjenla. Bueno, no sé.
475.	Cristian:	No, porque esta línea aún no existe [indica con el cursor la bisectriz del ángulo.]

Este conflicto, que requirió la intervención del profesor para sobrepasarlo, se convirtió en obstáculo para desarrollar la justificación como Diana quería, usando la congruencia de triángulos. Una vez aclarado que dibujar el rayo no implicaba asegurar la propiedad de ser bisectriz, pudieron proceder con el plan de Diana y terminar la justificación.

CONCLUSIONES

Identificamos durante el proceso de justificación que, en el primer momento, los estudiantes hicieron *argumentos* ligados a la *situación* del problema (*AS*), mientras que en el segundo, ellos plantearon *argumentos paso* de la justificación (*AP*). En la Figura 4 se evidencia cómo los estudiantes reutilizaron sus *AS* escribiéndolos como *AP*, en el lugar correcto de la justificación final. El análisis nos permite afirmar que Cristian y Diana lograron comprender lo que es una demostración y aprendieron a producirla. Ambos estudiantes reconocieron el papel de cada parte de la conjetura, escrita en forma de condicional, que debían justificar, es decir, entre lo dado (antecedente) y la conclusión (consecuente). Luego de formular los tres *AS*, Cristian menciona la necesidad de formular más argumentos para poder llegar a la conclusión de esta conjetura. Diana entiende que para justificar la conjetura se deben encadenar argumentos pues indica que la *conclusión* de un paso pasa a ser el *dato* de otro.

Referencias

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 305-323). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa* (Francisco Agudo López, Tr.). Madrid, España: Ediciones La Muralla (primera edición en inglés, 1989).

Fonseca, J. y Lara, L.F. (2013). Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Godino, J. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3), 55-85.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *25*, 313-348.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (evaluación). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 1-16). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon,* 26, 15-29.